

UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

FACULTAD DE CIENCIA

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA Y C. C.

## EXAMEN DE CALIFICACION ANALISIS GEOMÉTRICO

Doctorado en Matemática  
2° Semestre de 2008.

**Problema 1** Con ejemplos, justificando cada uno de ellos, ilustre:

- (i) Existen Variedades no Hausdorff.
- (ii) Existen Variedades sin base numerable para su topología.
- (iii) Existe una incrustación  $C^\infty$  de  $\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m$  en  $\mathbb{R}^{n+m+1}$ .
- (iv) Existe un espacio topológico  $M$  que puede ser dotado de dos estructuras diferenciables de clase  $C^\infty$ ,  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$ , de modo que las variedades  $(M, \mathcal{A})$  y  $(M, \mathcal{B})$  no son difeomorfas.

**Problema 2** Sean  $sl(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{M}(n \times n, \mathbb{R}) : \text{traza}(A) = 0\}$  y  $SL(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{M}(n \times n, \mathbb{R}) : \det(A) = 1\}$ .

- (a) Pruebe que  $sl(n, \mathbb{R})$  y  $SL(n, \mathbb{R})$  ambas son variedades diferenciables de clase  $C^\infty$ , y que la última es un grupo de Lie
- (b) Pruebe que la aplicación  $\exp : \mathbb{M}(n \times n, \mathbb{R}) \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$  dada por

$$\exp(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} X^n,$$

donde  $X^0 = I$ , es de clase  $C^\infty$  e induce un difeomorfismo  $\iota(\text{local/global})?$  entre  $sl(n, \mathbb{R})$  y  $SL(n, \mathbb{R})$ .

**Problema 3** En  $\mathbb{R}^3 - \{0\}$  considere las coordenadas cilíndricas  $(r, \theta, z)$  donde  $r > 0$ ,  $0 < \theta < 2\pi$  y  $z \in \mathbb{R}$ , las cuales son dadas por

$$\begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \\ z = z \end{cases}$$

Usando esas coordenadas, calcule la matriz de los  $(g_{ij})_{3 \times 3}$  de los coeficientes de la métrica riemanniana para la esfera  $\mathbb{S}^2$ .

**Problema 4** Considere la superficie 2-dimensional,  $\mathbb{E} = \{(x, y, z) : 2x^2 + 3y^2 + \frac{1}{3}z^2 = 3\} \subset \mathbb{R}^3$ . Dotemos a  $\mathbb{E}$  con dos orientaciones distintas,  $\Theta$  y  $\tilde{\Theta}$ , en la primera una base  $\{v_1, v_2\}$  de  $T_{(0,0,3)}\mathbb{E}$  es positiva si  $\{v_1, v_2, (0, 0, 1)\}$  es una base positiva de  $\mathbb{R}^3$ ; en la segunda una base  $\{w_1, w_2\}$  de  $T_{(0,0,3)}\mathbb{E}$  es positiva si  $\{w_1, w_2, (0, 0, -1)\}$  es una base positiva de  $\mathbb{R}^3$ . Sea  $\alpha : (\mathbb{E}, \Theta) \rightarrow (\mathbb{E}, \tilde{\Theta})$  la aplicación antipodal. Usando las cartas tipo polo-norte y polo-sur, determine si  $\alpha$  preserva o invierte orientación.

**Problema 5** Sean  $M$ ,  $N$  y  $R$  variedades diferenciables de clase  $C^r$  ( $r \geq 1$ ) y sea  $\varphi : M \times R \rightarrow N$  una aplicación de clase  $C^r$ , tal que para cada  $r \in R$  fijo, la aplicación  $\varphi_r : M \rightarrow N$  definida por  $\varphi_r(x) = \varphi(x, r)$  es un difeomorfismo  $C^r$ . Pruebe que la aplicación  $\psi : N \times R \rightarrow M$  definida por  $\psi(y, r) = \varphi_r^{-1}(y)$ , donde  $y \in N$  y  $r \in R$ , es de clase  $C^r$ .

**Problema 6** Sea  $M$  una variedad  $n$ -dimensional. Suponga que existe una incrustación  $\Phi : M \rightarrow \mathbb{R}^N$ , donde  $N > 2n + 1$ . Demuestre que existe un conjunto de medida (Lebesgue) total de hiperplanos  $\Pi$  en  $\mathbb{R}^N$ , tal que la función  $P_\Pi \circ \Phi : M \rightarrow \Pi$  es inyectiva, donde  $P_\Pi : \mathbb{R}^N \rightarrow \Pi$  denota la proyección ortogonal sobre el hiperplano  $\Pi$ .

**Tiempo: 3 horas.**

**Para aprobar el examen necesita tener por lo menos 4 preguntas completas respondidas correctamente. No se considerarán intentos ni medias soluciones. Sólo valen las respuestas completas.**

**Buena suerte**

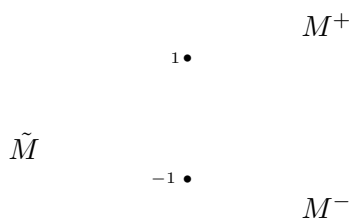
Santiago, Septiembre de 2008.

# Solución

## Pregunta 1.

(i) Ejemplo de Variedad no Hausdorff.

Consideremos el conjunto  $M = M^+ \cup M^- \cup \widetilde{M} \subset \mathbb{R}^2$ , donde  $M^\pm = \{(x, \pm 1) : x \geq 0\}$  y  $\widetilde{M} = \{(x, 0) : x < 0\}$ .



en  $M$  definimos la topología siguiente: en  $\widetilde{M}$  y  $M^\pm - \{(0, \pm 1)\}$  los conjunto abiertos son los intervalos abiertos (con la obvia identificación de  $M^\pm$  con  $\mathbb{R}_0^+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ ). Agregamos a la colección anterior de abiertos los conjuntos  $\emptyset$ ,  $M$  y las vecindades  $N_\varepsilon^\pm$  de los puntos  $(0, \pm 1)$ , las cuales son definidas por  $N_\varepsilon^\pm = \{(x, 0) : -\varepsilon < x < 0\} \cup \{(x, \pm 1) : 0 \leq x < \varepsilon\}$ , donde  $\varepsilon > 0$  es arbitrario. Con esta topología  $M$  es no Hausdorff, puesto que cualquier par de vecindades de los puntos  $(0, \pm 1)$  tienen intersección no vacía.

Ahora sean  $U_\pm = \widetilde{M} \cup M^\pm$ , estos conjuntos son abiertos en  $M$  y definamos  $\varphi^\pm : U_\pm \rightarrow \mathbb{R}$  por  $\varphi^+(x, 0) = x$ ,  $\varphi^+(x, 1) = x$  y  $\varphi^-(x, 0) = x$ ,  $\varphi^-(x, -1) = x$ . Es claro que estas son biyecciones continuas y sus inversas  $(\varphi^+)^{-1}$  y  $(\varphi^-)^{-1}$  también son continuas. Por lo tanto  $\varphi^\pm$  son homeomorfismos. Los cambios de coordenadas son dados por  $\varphi^+ \circ (\varphi^-)^{-1} = \varphi^- \circ (\varphi^+)^{-1} = Id$ , luego son de clase  $C^\infty$ . Por lo tanto,  $\mathcal{A} = \{(U_+, \varphi^+), (U_-, \varphi^-)\}$  es un atlas 1-dimensional de clase  $C^\infty$  en  $M$ .

(ii) Variedad sin base numerable para su topología.

Sea  $\mathbb{R}_m^p$  el producto  $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ , donde  $p+q = m$ . El primer factor está dotado de la topología usual y el segundo factor está dotado de la topología discreta y la topología en  $\mathbb{R}_m^p$  es la topología producto de los factores.

$$\mathbb{R}^q$$

$$\mathbb{R}^p \times \{x\}$$

$$\mathbb{R}^p \times \{0\}$$

$$0^\bullet$$

Los abiertos basales en la topología de  $\mathbb{R}_m^p$  son los productos  $U \times \{y\}$  donde  $U \subset \mathbb{R}^p$  es un abierto e  $y \in \mathbb{R}^q$ . Como cada producto  $\mathbb{R}^p \times \{y\}$  es canónicamente homeomorfo a  $\mathbb{R}^p$  mediante la aplicación  $\varphi_y : \mathbb{R}^p \times \{y\} \rightarrow \mathbb{R}^p$  definida por  $\varphi_y(x, y) = x$ , se sigue que  $\mathcal{A} = \{(\mathbb{R}^p \times \{y\}, \varphi_y) : y \in \mathbb{R}^q\}$  es un atlas  $p$ -dimensional de clase  $C^\infty$  en  $\mathbb{R}_m^p$ . Note que el espacio topológico  $\mathbb{R}_m^p$  es Hausdorff, pero no tiene base numerable para su topología.

- (iii) Construcción de una incrustación  $C^\infty$  de  $\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m$  en  $\mathbb{R}^{n+m+1}$ .

Considere la siguiente cadena de incrustaciones

$$\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m \hookrightarrow \mathbb{S}^n \times \mathbb{R}^{m+1} \hookrightarrow \mathbb{S}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^m$$

- (iv) Ejemplo un espacio topológico  $M$  que puede ser dotado de dos estructuras diferenciables de clase  $C^\infty$ ,  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$ , de modo que las variedades  $(M, \mathcal{A})$  y  $(M, \mathcal{B})$  no son difeomorfas.

Sea  $M = \{(t, 0) \in \mathbb{R}^2 : t \in \mathbb{R}\} \cup \{(0, 1)\} \subset \mathbb{R}^2$ . En  $M$  definimos la topología en la cual  $M$ ,  $\emptyset$  son abiertos, en  $U = \{(t, 0) : t \in \mathbb{R}\}$ , los abiertos son los usuales de  $\mathbb{R}$  y las vecindades de  $\{(0, 1)\}$  son los conjuntos de la forma  $(W - \{(0, 0)\}) \cup \{(0, 1)\}$ , donde  $W \subset U$  es una vecindad abierta de  $(0, 0)$ . Con esta topología  $M$  es un espacio no Hausdorff.

Sea  $V = (U - \{(0, 0)\}) \cup \{(0, 1)\}$ . Definamos las cartas  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$  y  $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}$  por  $\varphi(t, 0) = t$  y  $\psi(t, 0) = t$ , para  $t \neq 0$  y  $\psi(0, 1) = 0$ , entonces  $\mathcal{A} = \{(U, \varphi), (V, \psi)\}$  es un atlas 1-dimensional de clase  $C^\infty$  en  $M$ . Denotemos por  $\overline{M} = (M, [\mathcal{A}])$  la variedad obtenida de este modo.

Ahora, reemplazamos la carta  $(V, \psi)$  por la carta  $\tilde{\psi} : V \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\tilde{\psi}(t, 0) = t^3$ ,  $t \neq 0$  y  $\tilde{\psi}(0, 1) = 0$ . Denotemos por  $\tilde{\mathcal{A}} = \{(U, \varphi), (V, \tilde{\psi})\}$  el atlas 1-dimensional  $C^\infty$  obtenido de esta manera y sea  $\widetilde{M} = (M, [\tilde{\mathcal{A}}])$  la variedad definida por este atlas. Tenemos que  $\tilde{\mathcal{A}} \not\approx \mathcal{A}$ , por lo tanto  $\widetilde{M} \neq \overline{M}$ .

De hecho estas variedades no son difeomorfas. Para mostrarlo, definamos la aplicación  $f : \overline{M} \rightarrow \mathbb{R}$  por  $f(t, 0) = t$  y  $f(0, 1) = 0$ . La representación local de  $f$  en las cartas  $(U, \varphi)$  y  $(V, \psi)$  es la aplicación identidad, luego  $f$  es  $C^\infty$ . Ahora consideremos una aplicación de clase  $C^1$ ,  $g : \widetilde{M} \rightarrow \mathbb{R}$ . Denotemos por  $G$  y  $G_1$  las representaciones de  $g$  en las cartas  $(U, \varphi)$  y  $(V, \tilde{\psi})$ , respectivamente. En  $\mathbb{R} - \{0\}$  tenemos  $G = g \circ \varphi^{-1} = (g \circ \tilde{\psi}^{-1}) \circ (\tilde{\psi} \circ \varphi^{-1}) = G_1 \circ (\tilde{\psi} \circ \varphi^{-1})$ , esto es,  $G(t) = G_1 \circ (\tilde{\psi} \circ \varphi^{-1})(t) = G_1(\tilde{\psi}(t, 0)) = G_1(t^3)$  y  $G'(t) = 3t^2 G'_1(t^3)$ ,  $t \neq 0$ . Como  $g$  es  $C^1$ ,  $G'$  y  $G'_1$  son continuas, por lo tanto  $G'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} G'(t) = 0$ , es decir, el rango de  $G$  en  $t = 0$  es 0.

Supongamos que existe un difeomorfismo  $C^1$ ,  $\eta : \widetilde{M} \rightarrow \overline{M}$ . Las expresiones locales de  $\eta$  en los atlas  $\tilde{\mathcal{A}}$  y  $\mathcal{A}$  debe tener rango 1 en cada punto. Como  $f : \overline{M} \rightarrow \mathbb{R}$  tiene rango 1, la representación local de  $f \circ \eta : \widetilde{M} \rightarrow \mathbb{R}$  en el atlas  $\tilde{\mathcal{A}}$  debe tener rango 1. Esto contradice el hecho recién probado sobre el rango de una aplicación  $C^1$  de  $\widetilde{M}$  en  $\mathbb{R}$ . Por lo tanto tal difeomorfismo  $C^1$ ,  $\eta : \widetilde{M} \rightarrow \overline{M}$  no puede existir. Este ejemplo es el más simple para mostrar que sobre un mismo espacio topológico pueden darse estructuras diferenciables diferentes de modo a obtener variedades no difeomorfas.

## Pregunta 2.

- (a) Sean  $\text{traza}, \det : \mathbb{M}(n \times n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  las aplicaciones traza y  $\det$ , respectivamente, es fácil que ver que ambas son  $C^\infty$ , y que  $\text{traza}^{-1}(0) = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$  y  $\det^{-1}(1) = SL(n, \mathbb{R})$ . Además,  $\text{traza}/\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$  y  $\det/SL(n, \mathbb{R})$  son ambas submersiones.
- (b) Para probar que la aplicación

$$\exp : \mathbb{M}(n \times n, \mathbb{R}) \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$$

dada por

$$\exp(X) = I + X + \frac{1}{2} X^2 + \frac{1}{3!} X^3 + \cdots + \frac{1}{n!} X^n + \cdots$$

es de clase  $C^\infty$  es un cálculo sencillo.

Para lo restante basta probar que  $\exp/\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) : \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) \rightarrow SL(n, \mathbb{R})$  es biyectiva, y usar el teorema de la función inversa.

**Problema 3.** Primero consideramos coordenadas polares en el plano. Sea  $M = \mathbb{R}^2$ . Dado  $\alpha > 0$ , sea  $U_\alpha = \mathbb{R}^2 - L_\alpha$ , donde  $L_\alpha$  es el rayo de pendiente  $\alpha$  comenzando en el origen de  $\mathbb{R}^2$ ,

con  $0 \in L_\alpha$ . Claramente  $U_\alpha$  es abierto. Ahora consideremos la banda abierta  $V_\alpha = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 : r > 0, \alpha < \theta < \alpha + 2\pi\} \subset \mathbb{R}^2$  y definamos  $\psi_\alpha : V_\alpha \longrightarrow U_\alpha$  por  $\psi_\alpha(r, \theta) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta))$ ,

Note que  $\psi_\alpha$  aplica cada segmento vertical  $s_r \subset V_\alpha$ ,  $s_r = \{(r, \theta) : \alpha < \theta < \alpha + 2\pi\}$  en el círculo agujereado (= círculo menos un punto) de radio  $r$  y cada recta horizontal  $r_\theta = \{(r, \theta) : r > 0\} \subset V_\alpha$  en el rayo partiendo desde el origen, que forma un ángulo  $\theta$  con el rayo  $L_\alpha$ . Tenemos que  $\psi_\alpha : V_\alpha \longrightarrow U_\alpha$  es una biyección  $C^\infty$  y

$$J\psi(r, \theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

es inversible para cada  $(r, \theta) \in V_\alpha$ , luego por el Teorema de la Función Inversa,  $\psi_\alpha$  es un difeomorfismo  $C^\infty$ . Sea  $\varphi_\alpha = \psi_\alpha^{-1} : U_\alpha \longrightarrow V_\alpha$  el difeomorfismo inverso,  $\varphi_\alpha$  es llamado sistema de coordenadas polares en  $U_\alpha$ . Es claro que usando las coordenadas polares damos a  $\mathbb{R}^2 - \{0\}$  una estructura de variedad  $C^\infty$ , la cual es equivalente a la estructura diferenciable usual sobre  $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ .

Ahora calculemos los  $g_{ij}$  en coordenadas polares, es decir,  $g_{ij}^{\varphi_\alpha}$ . Tenemos,

$$\begin{aligned} g_{ij}^{\varphi_\alpha}(p) &= \langle (D\varphi_\alpha(p))^{-1}e_i, (D\varphi_\alpha(p))^{-1}e_j \rangle \\ &= \langle D\psi_\alpha(\varphi_\alpha(p))e_i, D\psi_\alpha(\varphi_\alpha(p))e_j \rangle. \end{aligned}$$

Además, como

$$J\psi(r, \theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

se tiene

$$\begin{aligned} D\psi_\alpha(r, \theta)e_1 &= J\psi_\alpha(r, \theta)e_1 = (\cos(\theta), \sin(\theta)), \\ D\psi_\alpha(r, \theta)e_2 &= J\psi_\alpha(r, \theta)e_2 = (-r \sin(\theta), r \cos(\theta)). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} g_{11}^{\varphi_\alpha}(r, \theta) &= \langle (\cos(\theta), \sin(\theta)), (\cos(\theta), \sin(\theta)) \rangle = 1 \\ g_{12}^{\varphi_\alpha}(r, \theta) &= g_{21}^{\varphi_\alpha}(r, \theta) = \langle (\cos(\theta), \sin(\theta)), (-r \sin(\theta), r \cos(\theta)) \rangle = 0 \\ g_{22}^{\varphi_\alpha}(r, \theta) &= \langle (-r \sin(\theta), r \cos(\theta)), (-r \sin(\theta), r \cos(\theta)) \rangle = r^2 \end{aligned}$$

y la matriz de los  $g_{ij}^{\varphi_\alpha}$  es dada por

$$(g_{ij}^{\varphi_\alpha}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$$

Finalmente, considerando coordenadas cilíndricas  $(r, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 - \{0\}$ , donde

$$\begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \\ z = z \end{cases}$$

la matriz de los  $g_{ij}$  es dada por

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

#### Pregunta 4.

Al considerar esas orientaciones de la esfera  $\mathbb{E}$  es fácil ver la aplicación antipodal preserva orientación. Cálculos sencillos.

Otra solución elegante, es mostrar que  $\mathbb{E}$  es de hecho difeomorfo a la esfera  $\mathbb{S}^2$ .

#### Pregunta 5.

Definamos las aplicaciones  $\Phi : M \times R \rightarrow N \times R$  y  $\Psi : N \times R \rightarrow M \times R$  por  $\Phi(x, r) = (\varphi(x, r), r) = (\varphi_r(x), r)$ ,  $x \in M$ ,  $r \in R$ , y  $\Psi(y, r) = (\psi(y, r), r) = (\varphi_r^{-1}(y), r)$ ,  $y \in N$ ,  $r \in R$ .

Es claro que  $\Phi$  y  $\Psi$  son diferenciables si y sólo si  $\varphi$  y  $\psi$  son diferenciables. Tenemos que  $\Phi$  es diferenciable por hipótesis. Probemos que  $\Psi$  es diferenciable.

Observemos que  $(\Psi \circ \Phi)(x, r) = \Psi(\varphi_r(x), r) = (\varphi_r^{-1}(\varphi_r(x)), r) = (x, r)$  para todo  $(x, r) \in M \times R$ , de modo análogo  $\Phi \circ \Psi(y, r) = \Phi(\varphi_r^{-1}(y), r) = (\varphi_r(\varphi_r^{-1}(y)), r) = (y, r)$  para todo  $(y, r) \in N \times R$ . Luego  $\Phi$  y  $\Psi$  son biyectivas.

Ahora bien afirmar que  $\Psi$  es diferenciable es equivalente a afirmar que la biyección diferenciable  $\Phi$  es un difeomorfismo.

Por otra parte, es evidente que una aplicación diferenciable biyectiva es un difeomorfismo si y sólo si es un difeomorfismo local.

Ahora, para cada  $(a, r) \in M \times R$  se tiene que  $D\Phi(a, r) : T_{(a,r)}M \times R \rightarrow T_{\Phi(a,r)}N \times R$ , como  $T_{(a,r)}M \times R = T_aM \oplus T_rR$ , llamando  $b = \varphi(a, r)$  se tiene que  $\Phi(a, r) = (b, r)$  luego

$T_{\Phi(a,r)}N \times R = T_bN \oplus T_rR$ . Con esto podemos pensar que la derivada de  $\Phi$  en  $(a,r)$  tiene la forma

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

donde  $A : T_aM \rightarrow T_bN$ ,  $B : T_rR \rightarrow T_bN$ ,  $C : T_aM \rightarrow T_rR$ , y  $D : T_rR \rightarrow T_rR$  son las aplicaciones lineales construidas de manera obvia. En particular,  $A = D\varphi_r(a)$ ,  $C = 0$  pues es la derivada de una aplicación constante,  $D = Id$ . Luego la matriz asociada a  $D\Phi(a,r)$  es de la forma

$$\begin{pmatrix} D\varphi_r(a) & B \\ 0 & Id \end{pmatrix}$$

la aplicación  $B$  no interesa. Como la aplicación  $D\varphi_r(a)$  es un isomorfismo por hipótesis, se sigue que  $D\Phi(a,r)$  es isomorfismo.

### Pregunta 6.

Note que la aplicación  $P_\Pi \circ \Phi$  es inyectiva si y sólo si cada línea ortogonal a  $\Pi$  intersecciona la variedad  $M$ , en exactamente un punto. Sea  $\Delta$  la diagonal de  $M \times M$ . Definamos la aplicación

$$a : M \times M - \Delta \longrightarrow \mathbb{RP}^{N-1}$$

por

$$a(x,y) = \text{línea a través del origen paralela a la línea que une } \Phi(x) \text{ y } \Phi(y) \text{ en } \mathbb{R}^N$$

Notemos que  $\dim(M \times M - \Delta) = 2n$  y que  $\dim(\mathbb{RP}^{N-1}) = N - 1 \geq 2n + 1$ , por lo tanto, podemos aplicar el siguiente corolario del teorema de Sard.

**Corolario 1** *Suponga que  $M_1$  y  $M_2$  son variedades diferenciables, con  $\dim(M_1) < \dim(M_2)$ , entonces la imagen de  $M_1$  en  $M_2$  por una aplicación de clase al menos  $C^2$  tiene medida de Lebesgue cero.*

luego  $\text{Imagen}(a)$  es un conjunto de medida de Lebesgue cero en  $\mathbb{RP}^{N-1}$ . Luego, su complemento es un conjunto de medida total, por lo tanto el conjunto de hiperplanos  $\Pi$  para los cuales  $P_\Pi \circ \Phi$  es inyectiva es un conjunto de medida total.