

UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

FACULTAD DE CIENCIA

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA Y C. C.

EXAMEN DE CALIFICACION ANALISIS GEOMÉTRICO

Doctorado en Matemática

2° Semestre de 2009.

Problema 1 1) Pruebe que la ecuación

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \cdots + \frac{x_n^2}{a_n^2} = 1$$

donde $a_1, \dots, a_n > 0$, define una $n - 1$ subvariedad de \mathbb{R}^n .

2) Considere para todo $c \in \mathbb{R}$ el subconjunto de \mathbb{R}^3 definido por

$$M_c = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = c\}.$$

¿ Para qué valores de c el conjunto M_c es una subvariedad ?

3) Para los puntos anteriores calcule los respectivos espacios tangentes.

4) ¿Cuál es el número mínimo de cartas que se necesitan para cubrir las subvariedades de los puntos 1) y 2) ?

Problema 2 Sea $SL(2) = \{A \in GL(2, \mathbb{R}) : \det(A) = 1\}$.

(a) Pruebe que $SL(2)$ es un grupo de Lie de dimensión 3.

(b) Encuentre el álgebra de Lie de $SL(2)$.

(c) Pruebe que $SL(2)$ no es compacto.

Problema 3 Considere la función

$$h(u, v) = (a \sin(u) \cos(v), a \sin(u) \sin(v), a[\cos(u) + \ln \tan(u/2)]) .$$

Pruebe que h determina una parametrización local de una superficie en \mathbb{R}^3 y calcule los coeficientes de la métrica inducida.

Problema 4 (a) Pruebe que la esfera \mathbb{S}^n , considerada como una hipersuperficie en \mathbb{R}^{n+1} , es orientable. Exhiba un elemento de volumen y pruebe que la forma de volumen no es exacta.

(b) Sea $\alpha : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ la función antipodal $\alpha(x) = -x$. Pruebe que α preserva orientación si y sólo si n es impar.

(c) Pruebe que \mathbb{RP}^n es orientable si y sólo si n es impar.

Problema 5 Sea $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ la función

$$f(x, y, z) = (yz, xz, xy, x^2 + 2y^2 + 3z^2) .$$

Pruebe que $f(p) = f(q)$ si y sólo si $p = \pm q$, y que f induce una inmersión $f' : \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$

Problema 6 Sea M una variedad diferenciable y orientable de dimensión n con forma de volumen μ . Dado un campo de vectores X sobre M definimos $\text{div}_\mu(X)$ por medio de la fórmula

$$L_X(\mu) = \text{div}_\mu(X) \mu ,$$

donde L_X representa la derivada de Lie.

(a) ¿Por qué $\text{div}_\mu(X)$ está bien definida ?

(b) Sea P una subvariedad con frontera de M con $\dim P = n$. Pruebe que

$$\int_P \text{div}_\mu(X) \mu = \int_{\partial P} i_X \mu .$$

Indicaciones. Recuerde que si w es una k -forma diferencial $i_X w$ es la $(k-1)$ -forma dada por $i_X w(X_1, \dots, X_{k-1}) = w(X, X_1, \dots, X_{k-1})$. Además se satisface la fórmula de Cartan $L_X w = i_X(dw) + d(i_X w)$.

(c) Deduzca el Teorema de la Divergencia en \mathbb{R}^3 .

Tiempo: 4 horas.

Buena suerte

Santiago, Julio 2009.