

Examen de Calificación Geometria y Topologia

1. (a) Pruebe que, al contrario de la función  $f : S^1 \rightarrow S^1$  dada por  $f(z) = z^2$ , no existe una función continua  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\varphi^{-1}(y)$  tenga exactamente dos puntos para todo  $y \in \mathbb{R}$ .
- (b) Sea  $G$  un grupo cualquiera de homeomorfismos de un espacio topológico  $X$ . Equipe a  $G$  con la topología discreta. Pruebe que  $\varphi : G \times X \rightarrow X$  es un recubrimiento.
- (c) Encuentre un ejemplo de un espacio topológico  $X$  con grupo fundamental  $\mathbb{Z}_n$ . Ayuda: Construya  $X$  usando  $S^3 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : |z|^2 + |w|^2 = 1\}$  y la raíz de la unidad  $u = e^{2\pi i/n}$ .
2. (a) Calcule el grupo fundamental de la flor  $S^1 \vee \dots \vee S^1$  de  $n$  círculos.
- (b) Si  $M$  es una variedad conexa de dimensión al menos 3 y  $q \in M$ , pruebe que  $\pi_1(M \setminus \{q\}) = \pi_1(M)$ .
- (c) Calcule el grupo fundamental de un disco cerrado con dos puntos removidos.
- (d) Calcule el grupo fundamental de una suma conexa de dos toros con un punto removido.
3. (a) Sea  $G$  un grupo de Lie conexo, y sea  $U \subseteq G$  cualquier vecindad de la identidad. Pruebe que todo elemento de  $G$  puede escribirse como producto finito de elementos de  $U$ .
- (b) Pruebe que el conjunto  $T(n)$  de  $n \times n$  matrices triangulares superiores con 1 en la diagonal principal es un grupo de Lie y calcule su dimensión.
- (c) Encuentre una base para el álgebra de Lie de  $T(3)$ .
4. (a) Considere los siguientes campos vectoriales sobre  $\mathbb{R}^4$ :

$$\begin{aligned} X_1 &= -x^2 \frac{\partial}{\partial x^1} + x^1 \frac{\partial}{\partial x^2} + x^4 \frac{\partial}{\partial x^3} - x^3 \frac{\partial}{\partial x^4} \\ X_2 &= -x^3 \frac{\partial}{\partial x^1} - x^4 \frac{\partial}{\partial x^2} + x^1 \frac{\partial}{\partial x^3} + x^2 \frac{\partial}{\partial x^4} \\ X_3 &= -x^4 \frac{\partial}{\partial x^1} + x^3 \frac{\partial}{\partial x^2} - x^2 \frac{\partial}{\partial x^3} + x^1 \frac{\partial}{\partial x^4}. \end{aligned}$$

Úselos para probar que  $S^3$  es paralelizable.

- (b) Pruebe que todo grupo de Lie es paralelizable.
5. Sea  $\mathbb{H} = \mathbb{C} \times \mathbb{C}$  considerado como un espacio vectorial, y defina el producto

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - \bar{d}b, da + b\bar{c})$$

sobre  $\mathbb{H}$ . El álgebra  $(\mathbb{H}, \cdot)$  es el álgebra de los cuaterniones.

- (a) Pruebe que la multiplicación  $\cdot$  es asociativa pero no conmutativa.

- (b) Si  $p = (a, b)$ , defina  $p^* = (\bar{a}, -b)$ . Pruebe que  $(pq)^* = q^*p^*$ .
  - (c) Pruebe que  $\langle p, q \rangle = (1/2)(p^*q + q^*p)$  es un producto interior en  $\mathbb{H}$  y que la norma asociada satisface  $|pq| = |p| |q|$ .
  - (d) Pruebe que todo cuaternion distinto de cero tiene un inverso multiplicativo.
  - (e) Pruebe que el conjunto  $\mathcal{S}$  de cuaterniones unitarios es un grupo de Lie con multiplicación dada por  $\cdot$ , y que es difeomorfo a  $S^3$ . Concluya nuevamente que  $S^3$  es paralelizable.
6. Pruebe que  $SO(3)$  es isomorfo a  $SU(2)/\{\pm e\}$  y difeomorfo a  $\mathbb{RP}^3$  como sigue:
- (a) Pruebe que  $SO(3)$  es una sub-variedad de  $GL(3)$ .
  - (b) Sea  $\mathcal{S}$  el grupo de cuaterniones unitarios, y sea  $E \subset \mathbb{H}$  el subespacio de cuaterniones imaginarios (esto es, el conjunto de cuaterniones  $p$  con  $p^* = -p$ ). Si  $q \in \mathcal{S}$ , pruebe que la función lineal sobre  $\mathbb{H}$  dada por  $v \mapsto qvq^*$  toma  $E$  en sí mismo y preserva el producto interior de  $\mathbb{H}$ .
  - (c) Para cada  $q \in \mathcal{S}$ , sea  $\rho(q)$  la matriz de la función  $v \mapsto qvq^*$  con respecto a la base  $\{(i, 0), (0, 1), (0, i)\}$  de  $E$ . Pruebe que  $\rho(q) \in SO(3)$  y que la función  $\rho : \mathcal{S} \rightarrow SO(3)$  es un homomorfismo sobre de grupos de Lie con kernel  $\{\pm 1\}$ .
  - (d) Pruebe el resultado.

Instrucciones:

Preguntas 1,2,3: basta resolver dos “letras” de cada pregunta.

Preguntas 5,6: resuelvalas completamente.

Pregunta 4: extra. Si resuelta correctamente, puede reemplazar algunos de los problemas anteriores.