

UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

FACULTAD DE CIENCIA

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA Y C. C.

## EXAMEN DE CALIFICACION ANALISIS GEOMÉTRICO

Doctorado en Matemática

2° Semestre de 2009.

**Problema 1** Sea  $SL(2) = \{A \in GL(2, \mathbb{R}) : \det(A) = 1\}$ .

- (a) Pruebe que  $SL(2)$  es un grupo de Lie de dimensión 3.
- (b) Encuentre el algebra de Lie de  $SL(2)$ .
- (c) Pruebe que  $SL(2)$  no es compacto.

**Problema 2** Considere la función

$$h(u, v) = (a \sin(u) \cos(v), a \sin(u) \sin(v), a[\cos(u) + \ln \tan(u/2)]) .$$

Pruebe que  $h$  determina una parametrización local de una superficie en  $\mathbb{R}^3$ . Calcule los coeficientes de la métrica inducida y la forma de volumen en esta parametrización.

**Problema 3** (a) Pruebe que la esfera  $\mathbb{S}^n$ , considerada como una hipersuperficie en  $\mathbb{R}^{n+1}$ , es orientable. Exhiba un elemento de volumen y pruebe que la forma de volumen no es exacta.

(b) Sea  $\alpha : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$  la función antipodal  $\alpha(x) = -x$ . Pruebe que  $\alpha$  preserva orientación si y sólo si  $n$  es impar.

(c) Pruebe que  $\mathbb{RP}^n$  es orientable si y sólo si  $n$  es impar.

**Problema 4** Sea  $M$  una variedad diferenciable y orientable de dimensión  $n$  con forma de volumen  $\mu$ . Dado un campo de vectores  $X$  sobre  $M$  definimos  $div_\mu(X)$  por medio de la fórmula

$$L_X(\mu) = div_\mu(X) \mu ,$$

donde  $L_X$  representa la derivada de Lie.

(a) ¿Por qué  $\operatorname{div}_\mu(X)$  está bien definida ?

(b) Sea  $P$  una subvariedad con frontera de  $M$  con  $\dim P = n$ . Pruebe que

$$\int_P \operatorname{div}_\mu(X) \mu = \int_{\partial P} i_X \mu .$$

**Indicaciones.** Recuerde que si  $w$  es una  $k$ –forma diferencial  $i_X w$  es la  $(k-1)$ –forma dada por  $i_X w(X_1, \dots, X_{k-1}) = w(X, X_1, \dots, X_{k-1})$ . Además se satisface la fórmula de Cartan  $L_X w = i_X(dw) + d(i_X w)$ .

**Tiempo: 3 horas.**

**Buena suerte**

Santiago, Septiembre 2009.