

UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

FACULTAD DE CIENCIA

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA Y C. C.

## EXAMEN DE CALIFICACION ANALISIS GEOMÉTRICO

Doctorado en Matemática

1° Semestre de 2009.

**Problema 1** Con ejemplos, justificando cada uno de ellos, ilustre:

- (i) Existen Variedades no Hausdorff.
- (ii) Existen Variedades sin base numerable para su topología.
- (iii) Existen variedades que NO pueden ser cubiertas por sólo una carta.
- (iv) Existen dos estructuras diferenciables distintas de clase  $C^\infty$  sobre  $\mathbb{R}$ ,  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$ , tal que las variedades  $(\mathbb{R}, \mathcal{A})$  y  $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$  son difeomorfos.
- (v) No todo campo vectorial sobre  $\mathbb{R}$  es completo.

**Problema 2** Sea  $O(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) : A^t A = Id\}$ .

- (a) Pruebe que  $O(n)$  es un grupo de Lie.
- (b) Encuentre el algebra de Lie de  $O(n)$ .
- (c) Pruebe que  $O(n)$  es compacto. ¿Es  $O(n)$  conexo?
- (d) Calcule la dimensión de  $O(n)$ .

**Problema 3** (a) Sea  $D \subset \mathbb{R}^3$  el toro obtenido por revolución del círculo  $(y - 2)^2 + z^2 = 1$  alrededor del eje  $z$ . Defina la función

$$X(\varphi, \theta) = ((2 + \cos \varphi) \cos \theta, (2 + \cos \varphi) \sin \theta, \sin \varphi) .$$

Pruebe que  $X$  determina una parametrización local de  $D$ , y calcule la matriz de la métrica Riemanniana sobre  $D$  inducida por la métrica estandar de  $\mathbb{R}^3$  en esta parametrización.

- (b) Calcule el gradiente de una función  $f$  sobre el toro  $D$  usando la parametrización que aparece en (a).

**Problema 4** (a) Pruebe que la esfera  $\mathbb{S}^n$ , considerada como una hipersuperficie en  $\mathbb{R}^{n+1}$ , es orientable. Exhiba un elemento de volumen.

- (b) Sea  $\alpha : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$  la función antipodal  $\alpha(x) = -x$ . Pruebe que  $\alpha$  preserva orientación si y sólo si  $n$  es impar.

- (c) Pruebe que la forma de volumen en  $\mathbb{S}^n$  no es exacta.

**Problema 5** Sea  $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$  la función

$$f(x, y, z) = (yz, xz, xy, x^2 + 2y^2 + 3z^2) .$$

Pruebe que  $f(p) = f(q)$  si y sólo si  $p = \pm q$ , y que  $f$  induce una inmersión  $f' : \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$

**Problema 6** Una variedad  $M$  se dice que es  $C^k$ -simplemente conexa si es conexa y toda función  $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow M$  de clase  $C^k$  es  $C^k$ -homotópica a una constante, esto es, existe una función  $H : (-\epsilon, 1 + \epsilon) \times \mathbb{S}^1 \rightarrow M$  de clase  $C^k$  tal que para todo  $s \in \mathbb{S}^1$ ,  $H(0, s) = f(s)$  y  $H(1, s) = m_0$ , para  $m_0 \in M$ . Pruebe que la esfera  $\mathbb{S}^n$ ,  $n \geq 2$ , es  $C^k$ -simplemente conexa para todo  $k \geq 1$ . (Hint: Pruebe que por el teorema de Sard existe un punto  $x \in \mathbb{S}^n - f(\mathbb{S}^1)$  y use la proyección estereográfica determinada por  $x$ .)

**Tiempo: 3 horas.**

**Buena suerte**

Santiago, Marzo 2009.