

Problemas Propuestos para Examen de Calificación DOCTMAT 2010

Prof. Víctor Guíñez, Prof. Sergio Plaza

Pregunta 1 Sea $f : \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{D}^n$ una aplicación C^∞ , tal que $f|_{\partial\mathbb{D}^n} \equiv Id$. Pruebe que f es sobreyectiva.

Pregunta 2 Pruebe que la esfera \mathbb{S}^2 menos dos puntos es difeomorfa a $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2 + 1\}$

Pregunta 3 Sea $C \subset \mathbb{R}^{n+1}$ el conjunto dado por

$$C = \{(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, t) \in \mathbb{R}^{n+1} : t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \dots + a_1t + a_0 = 0\}$$

Pruebe que C es una subvariedad de dimensión n de \mathbb{R}^{n+1} .

Pregunta 4 Sean $i_1 : N_1 \rightarrow M_1$ y $i_2 : N_2 \rightarrow M_2$ incrustaciones C^r , $r \geq 1$, y sean $f : N_1 \rightarrow N_2$ y $g : M_1 \rightarrow M_2$ aplicaciones tales que $i_2 \circ f = g \circ i_1$. Suponga que g es diferenciable. Pruebe que f es diferenciable.

Pregunta 5 Sea $M = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 - \{0\} : p(z_1, z_2, z_3) = 0\}$, donde $p(z_1, z_2, z_3) = z_1^3 + z_2^3 + z_3^3$. Demuestre que M es una variedad 4-dimensional (real). Considere $\mathbb{S}^5 = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 : g(z_1, z_2, z_3) = 1\}$, donde $g(z_1, z_2, z_3) = z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 + z_3\bar{z}_3$. Demuestre que $M \cap \mathbb{S}^5$ es una variedad 3-dimensional (real).

Pregunta 6 Sea $F(X_1, \dots, X_n)$ un polinomio homogéneo de grado $d \geq 1$ con coeficientes reales. Demuestre que para todo $c \neq 0$, el conjunto $M_c = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : F(x_1, \dots, x_n) = c\}$ es una subvariedad cerrada C^∞ de \mathbb{R}^n . Si $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ son tales que $c_1 \cdot c_2 > 0$, demuestre que M_{c_1} y M_{c_2} son difeomorfas. Encuentre un ejemplo para mostrar que esto no es verdad si $c_1 \cdot c_2 < 0$.

Pregunta 7 Sea $\mathbb{D}^2 \subset \mathbb{R}^2$ el disco abierto unitario centrado en el origen, con su estructura de variedad usual inducida por \mathbb{R}^2 . Definimos una métrica g sobre \mathbb{D}^2 por

$$g(u, v) = \frac{\langle u, v \rangle}{(1 - |z|^2)^2}$$

para todo $u, v \in T_z\mathbb{D}^2$, $z \in \mathbb{D}^2$, donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ representa la métrica canónica sobre \mathbb{R}^2 , $z = (x, y)$ y $|z| = (x^2 + y^2)^{1/2}$.

- Demuestre que el ángulo entre dos vectores $u, v \in T_z\mathbb{D}^2$ coincide con el ángulo en la métrica euclídea de \mathbb{R}^2 .
- Demuestre que g se puede escribir en la forma

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{(1 - x^2 - y^2)^2}$$

y calcule una base para los campos de vectores ortonormales para g .

- (c) Demuestre que $\varphi : \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{D}^2$ definida por $\varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, con $|a|^2 - |b|^2 = 1$ es una isometría en (\mathbb{D}^2, g) . Aquí se identificó $z = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ con $z = x + iy \in \mathbb{C}$.
- d) Demuestre que el conjunto de las isometrías de \mathbb{D}^2 es generado por $\{\varphi, c\}$, donde $c : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es la aplicación conjugación compleja $c(z) = \bar{z}$.
- e) Considere el plano hiperbólico $\mathbb{H}^2 = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : y > 0\}$ con la métrica $g_h = \frac{dx^2 + dy^2}{4y^2}$. Demuestre que la aplicación $\psi : \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$, definida por $\psi(z) = -i \frac{z+i}{z-i}$ es una isometría.

Pregunta 8 Sea G un grupo de Lie abeliano y conexo. Pruebe que G es isomorfo (isomorfismo de grupos de Lie) a $\mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^n$, para algún k y n .

Pregunta 9 Sean X e Y campos de vectores suficientemente diferenciable definidos en un subconjunto abierto $D \subset \mathbb{R}^3$, con ∂D siendo una superficie diferenciable, y \overline{D} compacto. Pruebe que

$$\int_D Y \cdot \operatorname{curl} X \, dV = \int_D X \cdot \operatorname{curl} Y \, dV + \int_{\partial D} (X \times Y) \cdot \vec{n} \, dS$$

donde \vec{n} es el vector normal unitario en ∂D , apuntando hacia afuera.

Pregunta 10 Sea G un grupo que actúa libre discontinuamente sobre una variedad diferenciable M , $\varphi : G \times M \rightarrow M$, y sea X un campo de vectores sobre M . Pruebe que existe un campo de vectores \tilde{X} en M/G que está π -relacionado con X si, y sólo si, X es invariante bajo la acción del grupo G , es decir, $(d\varphi_g)_p(X_p) = X_{\varphi_g(p)}$ para todo $g \in G$.

(Nota: $\pi : M \rightarrow M/G$ denota la proyección canónica).

Pregunta 11 Considere el toro \mathbb{T}^2 en \mathbb{R}^3 con coordenadas (θ, ϕ) definidas implícitamente por

$$x = ((b + a \sin(\phi)) \cos(\theta), (b + a \sin(\phi)) \sin(\theta), a \cos(\phi)).$$

Calcule $\partial/\partial\phi$ y $\partial/\partial\theta$. Calcule el vector normal unitario $\vec{n}(x)$ que apunta hacia afuera en la superficie del toro. Defina vol una 2-forma por $vol(X, Y) = \langle \vec{n}, X \times Y \rangle$, y calcule su integral sobre \mathbb{T}^2 , cuando orientamos \mathbb{T}^2 de modo que vol sea positiva.

Problemas nuevos

Pregunta 12 Identificando $T\mathbb{GL}(n, \mathbb{R})$ con $\mathbb{GL}(n, \mathbb{R}) \times \mathbb{M}(\mathbb{R}, n \times n)$, defina

$$g_a(v) = \operatorname{tr}((a^{-1}v)^t a^{-1}v)$$

para $a \in \mathbb{GL}(n, \mathbb{R})$ y $v \in \mathbb{M}(\mathbb{R}, n \times n)$.

Pruebe que g es una métrica Riemanniana sobre $\mathbb{GL}(n, \mathbb{R})$ y que la aplicación $L_a : \mathbb{GL}(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{GL}(n, \mathbb{R})$ definida por $L_a(b) = ab$ es una g -isometría. Verifique que $R_a : \mathbb{GL}(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{GL}(n, \mathbb{R})$ definida por $R_a(b) = ba$ no es necesariamente una g -isometría, salvo que $a \in \mathcal{O}(n)$.

Pregunta 13 Sea $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^1 . Sea $M = g^{-1}(0)$, suponga que $\nabla g \neq 0$, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\frac{\partial g}{\partial x_n} \neq 0$ sobre M . Pruebe que la integración sobre M puede ser calculada mediante la fórmula

$$dvol_{n-1} = \frac{\|\nabla g\|}{\left| \frac{\partial g}{\partial x_n} \right|} dx_1 \cdots dx_{n-1}$$

Use lo anterior para obtener la fórmula para $vol_{n-1}(S(0, a)) = \frac{n}{a} vol(B^n(0, a))$, donde $B(0, a)$ es la bola cerrada de centro en 0 y radio $a > 0$ y $S(0, a)$ es su borde.

Pregunta 14 Sea M una variedad m -dimensional, compacta, orientable y con borde.

- (a) Demostrar que si una aplicación diferenciable $f : \partial M \rightarrow N$, donde N es una $(m-1)$ -variedad, tiene una extensión diferenciable $F : M \rightarrow N$, entonces $\int_{\partial M} f^* \omega = 0$ para toda forma diferenciable ω de grado $m-1$ de N .
- (b) Deducir de lo anterior que ∂M no puede ser un retracto de M
- (c) Usando lo anterior, pruebe la versión diferenciable del teorema de punto fijo de Brouwer, esto es, toda función diferenciable de una bola cerrada $\mathbb{B} \subset \mathbb{R}^k$ en si misma tiene un punto fijo. (Ind. Considere una función $f : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$ diferenciable y defina $\rho : \mathbb{B} \rightarrow \partial \mathbb{B}$ por $\rho(x) = f(x) + \lambda(f(x) - x)$, donde λ es el número positivo elegido convenientemente, y pruebe que ρ es diferenciable).

Pregunta 15 Sea $\pi : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$ la proyección canónica de la esfera en el plano proyectivo.

- (a) Demostrar que existe una (única) métrica riemanniana g en \mathbb{RP}^2 tal que π es una isometría local ¿Es una isometría global?
- (b) Determinar la matriz de g en la carta $\mathbb{RP}^2 \ni [(x_0, x_1, x_2)] \mapsto (x, y) = (x_1/x_0, x_2/x_0) \in \mathbb{R}^2$.
- (c) Haciendo el cambio de coordenadas $x = t \cos(\theta)$, $y = t \sin(\theta)$, calcular la matriz de g respecto a estas nuevas coordenadas.

Pregunta 16 Sea $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ la esfera unitaria centrada en el origen. Fije un punto arbitrario $a \in \mathbb{S}^n$ y considere la proyección p desde el origen sobre el hiperplano afín tangente $a_1 x_1 + \cdots + a_{n+1} x_{n+1} = 1$.

- (a) Pruebe que p define un sistema de coordenadas locales con dominio $\mathbb{S}^n \cap \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : a_1 x_1 + \cdots + a_{n+1} x_{n+1} > 0\}$, pero p no es una isometría.
- (b) Usando p definir una métrica riemanniana g en \mathbb{R}^n .