

EXAMEN DE CALIFICACIÓN TEORÍA DE LA MEDIDA 2010

Problema 1. Sean (X, \mathcal{T}) un espacio medible, $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de conjunto medibles, y G el conjunto de los $x \in X$ que al menos pertenecen a k conjuntos E_n 's. Mostrar que para toda medida μ sobre (X, \mathcal{T}) se tiene que

$$k\mu(G) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(E_n).$$

Problema 2. Sea $f \in L^1(X, \mathcal{T}, \mu)$ tal que existe una constante $C \geq 0$ que satisface

$$\left| \frac{1}{\mu(E)} \int_E f d\mu \right| \leq C,$$

para todo $E \in \mathcal{T}$ tal que $0 < \mu(E) < \infty$. Pruebe que $|f| \leq C$ μ -ctp.

Problema 3. Sea $(f_n)_{n \geq 0}$ una sucesión de funciones en $\mathcal{M}(X, \mathcal{T}, \mu)$ tales que $f_n \geq 0$ para todo $n \geq 0$. Supongamos que existe $f \in L^1(X, \mathcal{T}, \mu)$ tal que $f_n \rightarrow f$ μ -c.t.p y tal que $\int f_n d\mu \rightarrow \int f d\mu$. Pruebe que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int |f_n - f| d\mu = 0.$$

Problema 4. Sea (X, \mathcal{T}, μ) un espacio de medida, y sean $p_1, p_2, \dots, p_n \in (1, \infty)$ tales que

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_n} = 1.$$

Para cada $1 \leq j \leq n$, sea $f_j \in L^{p_j}(X, \mathcal{T}, \mu)$. Pruebe que

- (1) $f_1 f_2 \cdots f_n \in L^1(X, \mathcal{T}, \mu)$,
- (2) $\int |f_1 f_2 \cdots f_n| d\mu \leq \|f_1\|_{p_1} \|f_2\|_{p_2} \cdots \|f_n\|_{p_n}$.

Problema 5. Sea (X, \mathcal{T}, μ) un espacio de medida y sea f medible positiva diferente de 0 c.t.p. Definimos

$$I_f = \{p \in [1, \infty] : \|f\|_p < \infty\}.$$

- (1) Probar que I_f es un intervalo. Es decir, si $r \leq s$ están en I_f , entonces $[r, s] \subseteq I_f$.
- (2) Supongamos que I_f es no vacío.

(5.1) Sean $r \leq s < \infty$ en I_f y sea $p = \alpha r + (1 - \alpha)s$, con $\alpha \in (0, 1)$. Probar que

$$\|f\|_p^p \leq \|f\|_r^{\alpha p} \|f\|_s^{(1-\alpha)p}.$$

(5.2) Deducir que la aplicación $p \rightarrow \ln \|f\|_p^p$ es convexa sobre $I_f \setminus \{\infty\}$, y que $p \rightarrow \|f\|_p$ es continua sobre el interior de I_f . Para esto, utilizar el resultado que dice que toda función convexa sobre un intervalo J es continua sobre el interior de J .

(5.3) Mostrar que si r es un punto extremo de I_f , entonces $\|f\|_p$ tiende a $\|f\|_r$ cuando $p \in I_f$ tiende a r .

(3) Deducir que para todo $r < p < s$ en I_s , se tiene que

$$\|f\|_p \leq \max\{\|f\|_r, \|f\|_s\}.$$

Concluir que

$$L^r(X, \mathcal{T}, \mu) \cap L^s(X, \mathcal{T}, \mu) \subseteq \bigcap_{p \in (r, s)} L^p(X, \mathcal{T}, \mu).$$