

# EXAMEN DE CALIFICACIÓN ANÁLISIS

*Doctorado en Ciencia con mención en Matemática.*

*Universidad de Santiago de Chile.*

*Marzo 2016.*

***Está estrictamente prohibido usar apuntes y equipos electrónicos.***

Resolver los siguientes ejercicios.

**Ejercicio 1.** Sea  $D \subset \mathbb{C}$  un abierto simplemente conexo. Probar que si  $f$  es una función holomorfa en  $D$  tal que  $f(z) \neq 0$  para todo  $z \in D$ , existe una función holomorfa  $h$  en  $D$  tal que  $e^{h(z)} = f(z)$ , para todo  $z \in D$ .

\*\*\*

**Ejercicio 2.** Sea  $f$  una función entera. Probar que  $f$  es un polinomio si y sólo si existen  $A, B \in \mathbb{R}$  positivos y un número entero  $k \geq 0$  tales que

$$|f(z)| \leq A + B|z|^k, \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C}.$$

\*\*\*

**Ejercicio 3.** Sea

$$g : z \mapsto g(z) = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right).$$

Determinar la imagen  $V$  de  $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C}, \Im z > 0\}$  por la función  $g$ . Mostrar que la restricción de  $g$  a  $\mathbb{H}$  es una biyección de  $\mathbb{H}$  a  $V$  y que su inverso es la función analítica  $u(z) = z + f(z)$ , donde  $f$  es la rama de  $\sqrt{z^2 - 1}$  en  $V$  satisfaciendo  $f(0) = e^{i\frac{\pi}{2}}$ .

Podría dibujarse las imágenes por la función  $g$  de los círculos centrados en 0 y las semi-rectas (abiertas) partiendo en el origen.

\*\*\*

**Ejercicio 4.** Mostrar que para todo real  $\lambda > 1$ , la función  $f(z) = ze^{\lambda-z} - 1$  tiene exactamente un cero en el disco unidad  $\{|z| < 1\}$ .

\*\*\*

**Ejercicio 5.** Sea  $(X, S, \mu)$  un espacio de medida y  $\phi : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  una función no-decreciente y mayor que cero en  $(0, +\infty)$ . Si  $f \in M(X, S)$  es tal que  $\phi \circ |f| \in \mathcal{L}_1(\mu)$  entonces para toda  $\alpha > 0$

$$\mu(\{x \in X : |f(x)| \geq \alpha\}) \leq \frac{1}{\phi(\alpha)} \int \phi \circ |f| d\mu.$$

\*\*\*

**Ejercicio 6.** Sea  $X$  un espacio de Banach,  $Y$  un espacio normado y  $T : X \rightarrow Y$  una aplicación lineal continua. Sea  $\tilde{T} : X/Ker(T) \rightarrow R(T)$  la aplicación inducida en el cociente. Se define  $|||y||| = \|\tilde{T}(y)\|$  para  $y \in R(T)$ . Demuestre las siguientes afirmaciones:

- (a) La función  $|||\cdot|||$  es una norma en  $R(T)$  y  $R(T)$  provisto con esta norma es un espacio de Banach.
- (b) La aplicación  $T : X \rightarrow (R(T), |||\cdot|||)$  es continua, abierta y  $|||T||| = 1$ .

\*\*\*

**De los ejercicios propuestos a continuación, elija sólo uno.**

**Ejercicio 7.** Sea  $X$  un espacio vectorial topológico separado real de dimensión finita,  $K \subseteq X$  un conjunto convexo y  $x_0 \in Fr(K)$ . Muestre que existe  $f \in X'$  tal que  $f(x) \geq f(x_0)$ , para todo  $x \in K$ .

\*\*\*

**Ejercicio 8.** Sea  $X$  un espacio vectorial topológico sobre  $\mathbb{K}$  (donde  $\mathbb{K}$  denota indistintamente a  $\mathbb{R}$  o a  $\mathbb{C}$ ),  $M$  un subespacio vectorial de  $X$  y  $A$  un subconjunto convexo, abierto y no vacío tal que  $A \cap M = \emptyset$ . Pruebe que existe una forma lineal continua  $f$  tal que  $f(M) = 0$  y  $\operatorname{Re} f(x) > 0$  para todo  $x \in A$ .