

# EXAMEN DE CALIFICACIÓN ANÁLISIS

*Doctorado en Ciencia con mención en Matemática.*

*Universidad de Santiago de Chile.*

*Marzo 2017.*

***Todos documentos y equipos electrónicos prohibidos.***

Resolver los siguientes ejercicios.

**Ejercicio 1.** Sea  $G \subset \mathbb{C}$  abierto no vacío y  $f \in \mathcal{H}(G)$  sin ceros en  $G$ . Una función  $F \in \mathcal{H}(G)$  se llama *un logaritmo* de  $f$  si  $e^{F(z)} = f(z)$ , para todo  $z \in G$ . Pruebe que son equivalentes:

- a)  $G$  es simplemente conexo.
- b) Si  $f \in \mathcal{H}(G)$  sin ceros en  $G$ , la función  $\frac{f'}{f}$  posee una primitiva en  $G$ .
- c) Toda  $f \in \mathcal{H}(G)$  sin ceros en  $G$  posee un logaritmo en  $G$ .
- d) Para cada  $a \in \mathbb{C} - G$  existe un logaritmo holomorfo de  $z - a$ .

\*\*\*

**Ejercicio 2.** Estudie si la si la función

$$f(z) = \frac{1}{\sin \frac{1}{z}} \quad (z \neq 0, \sin \frac{1}{z} \neq 0),$$

es meromorfa

- a) En  $\mathbb{C}$ .
- b) En  $\mathbb{C} - \{0\}$ .
- c) Calcule el residuo de  $f$  en cada polo.

\*\*\*

**Ejercicio 3.** Dado un entero positivo  $n \geq 4$ , sea

$$f(z) = \sum_{j=0}^n \frac{z^j}{j!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!}.$$

- a) Demuestre que  $f(z) - f'(z) = \frac{z^n}{n!}$ .
- b) Demuestre que  $f$  tiene  $n$  raíces simples, digamos  $z_1, \dots, z_n$ .
- c) Para  $k \geq 0$ , demuestre que  $\text{Res} \left( \frac{z^k}{f(z)}, z_i \right) = -\frac{n!}{z_i^{n-k}}$ .
- d) Demuestre que existe  $R > 0$  tal que para todo  $|z| > R$  y todo  $0 \leq k \leq n-2$  se tiene

$$\frac{|z^k|}{|f(z)|} \leq \frac{2n!}{|z^2|}.$$

- e) Demuestre que para todo  $r > R$  y todo  $0 \leq k \leq n-2$  se tiene

$$\int_{|z|=r} \frac{z^k}{f(z)} = 0.$$

- f) Concluya que

$$\sum_{i=1}^n z_i^{-j} = 0 \quad \text{para } 2 \leq j \leq n.$$

\*\*\*

**Ejercicio 4.** En este ejercicio  $\Omega$  denota un subconjunto de  $\mathbb{R}$  medible en sentido de Lebesgue con  $m(\Omega) > 0$ , y  $p : \Omega \rightarrow [1, \infty]$  es una función medible y esencialmente acotada. Usaremos las notaciones

$$\begin{aligned} p_- &= \text{ess inf}_{x \in \Omega} p(x), \\ p_+ &= \text{ess sup}_{x \in \Omega} p(x). \end{aligned}$$

Sea  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  una función medible. Se define

$$\rho(f) = \int_{\Omega} |f(x)|^{p(x)} dm(x).$$

I). Muestre que  $\rho$  satisface las siguientes propiedades:

- (i)  $\rho(f) \geq 0$  y  $\rho(f) = \rho(|f|)$ .
- (ii)  $\rho(f) = 0$  si, y solamente si,  $f = 0$   $m$ -ctp.
- (iii) Si  $\rho(f) < \infty$ , entonces  $|f|(x) < \infty$   $m$ -ctp.
- (iv) La función  $\rho$  es convexa.
- (v) Si  $g \leq |f|$ , entonces  $\rho(g) \leq \rho(f)$ .

(vi) Sea  $\Lambda > 0$  tal que  $\rho(f/\Lambda) < \infty$ . Entonces la función  $[\Lambda, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ ,  $\lambda \mapsto \rho(f/\lambda)$ , es continua decreciente y  $\rho(f/\lambda) \rightarrow 0$  cuando  $\lambda \rightarrow \infty$ .

(vii) Sea  $\lambda \geq 1$ . Entonces

$$\lambda^{p^-} \rho(f) \leq \rho(\lambda f) \leq \lambda^{p^+} \rho(f).$$

**Definición 1.** Se define  $L^{p(\cdot)}(\Omega)$  como el conjunto formado por las funciones  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  medibles para las cuales existe  $\lambda > 0$  tal que  $\rho(f/\lambda) < \infty$ .

II). Muestre que  $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$  si, y solamente si,  $\rho(f) < \infty$ .

III). Muestre que  $L^{p(\cdot)}(\Omega)$  es un espacio vectorial.

**Definición 2.** Sea  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  medible. Se define

$$\|f\|_{p(\cdot)} = \inf\{\lambda > 0 : \rho(f/\lambda) \leq 1\}.$$

IV). Muestre que si  $p(\cdot) = p \geq 1$ , entonces  $\|f\|_{p(\cdot)} = \|f\|_p$  (es decir, coincide con la norma usual en  $L^p$ ).

V). Muestre que la funcional  $\|\cdot\|_{p(\cdot)}$  es una norma en  $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ .

VI). Sea  $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$  tal que  $\|f\|_{p(\cdot)} > 0$ . Entonces  $\rho(f/\|f\|_{p(\cdot)}) = 1$ .

VII). Sea  $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ .

(a) Muestre que si  $0 < \|f\|_{p(\cdot)} \leq 1$ , entonces  $\rho(f)^{\frac{1}{p^-}} \leq \|f\|_{p(\cdot)} \leq \rho(f)^{\frac{1}{p^+}}$  y que  $\rho(f) \leq \|f\|_{p(\cdot)}$ .

(b) Muestre que si  $\|f\|_{p(\cdot)} > 1$ , entonces  $\rho(f)^{\frac{1}{p^+}} \leq \|f\|_{p(\cdot)} \leq \rho(f)^{\frac{1}{p^-}}$  y que  $\rho(f) \geq \|f\|_{p(\cdot)}$ .

VIII). Sea  $(f_n)_n \subset L^{p(\cdot)}(\Omega)$  una sucesión creciente de funciones positivas que converge puntualmente c.t.p. a  $f$ . Entonces  $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$  y  $\|f_n\|_{p(\cdot)} \rightarrow \|f\|_{p(\cdot)}$ ,  $n \rightarrow \infty$ , o  $f \notin L^{p(\cdot)}(\Omega)$  y  $\|f_n\|_{p(\cdot)} \rightarrow \infty$ ,  $n \rightarrow \infty$ .

IX). Sea  $(f_n)_n \subset L^{p(\cdot)}(\Omega)$  una sucesión que converge puntualmente c.t.p. a  $f$ . Si  $\liminf_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_{p(\cdot)} < \infty$ , entonces  $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$  y  $\|f\|_{p(\cdot)} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_{p(\cdot)}$ .

X). Sea  $(f_n)_n \subset L^{p(\cdot)}(\Omega)$  y  $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ . Entonces  $\|f_n - f\|_{p(\cdot)} \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$ , si, y solamente si,  $\rho(f_n - f) \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$ .

XI). Sea  $(f_n)_n \subset L^{p(\cdot)}(\Omega)$  una sucesión que converge puntualmente c.t.p. a  $f$ . Si existe una función  $g \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$  tal que  $|f_n(x)| \leq g(x)$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$  y  $x$ -c.t.p., entonces  $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$  y  $\|f - f_n\|_{p(\cdot)} \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$ .

XII). Sea  $(f_n)_n \subset L^{p(\cdot)}(\Omega)$  tal que  $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{p(\cdot)} < \infty$ . Entonces existe  $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$  tal que

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} f_n - f \right\|_{p(\cdot)} = 0 \text{ y } \|f\|_{p(\cdot)} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{p(\cdot)}.$$

XIII). Muestre que  $L^{p(\cdot)}(\Omega)$  es completo. (Indicación. Muestre que toda serie absolutamente convergente en  $L^{p(\cdot)}(\Omega)$  es convergente).