

EXAMEN DE CALIFICACIÓN TEORÍA DE LA MEDIDA 2009

Escoger cuatro problemas entre los seis propuestos.

Problema 1. Sea (X, \mathcal{T}, μ) un espacio de medida. Probar que existe f en $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{T}, \mu)$ con $|f| > 0$ c.t.p si y sólo si μ es σ -finita.

Problema 2. Se (X, \mathcal{T}, μ) un espacio de medida y $f : X \rightarrow \mathbb{R}_+$ una función en $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{T}, \mu)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ se define $A_n = \{x \in X : f(x) \geq n\}$.

- (1) Probar que $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{A_n} f d\mu = 0$.
- (2) Deducir que para todo $n \in \mathbb{N}$, $\mu(A_n)$ es finita y que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n\mu(A_n) = 0.$$

- (3) Muestre un contraejemplo donde $\lim_{n \rightarrow \infty} n\mu(A_n) = 0$ no implica que $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{T}, \mu)$.

Problema 3. Considere el espacio de medida $([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \lambda)$, donde $\mathcal{B}([0, 1])$ denota la σ -álgebra de Borel de $[0, 1]$ y λ es la medida de Lebesgue. Sea f una función integrable sobre $[0, 1]$. Probar que la sucesión

$$\left(\int_0^1 f(x) \left| \sin \frac{\pi}{x} \right|^{1/n} d\lambda(x) \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

converge y determinar su límite.

Problema 4. Sean f_n y f funciones medibles en un espacio de medida finita (X, \mathcal{T}, μ) . Diremos que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a f en medida si para cada $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) = 0.$$

- (1) Pruebe que si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a f y a g en medida, entonces $f = g$ c.t.p.
- (2) Pruebe que si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a f en $L^1(X)$ entonces $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a f en medida.
- (3) Pruebe que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a f c.t.p entonces $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a f en medida.
- (4) Sea $d(f, g) = \int_X \min\{|f - g|, 1\} d\mu$. Probar que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a f en medida si y sólo si $d(f_n, f) \rightarrow 0$.
- (5) De un ejemplo donde $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a f en medida pero $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ no converge a f c.t.p.

Problema 5. Sea (X, \mathcal{T}, μ) un espacio de medida σ -finita y $f : X \rightarrow \mathbb{R}_+$ una función $\mathcal{T} - \mathcal{B}(\mathbb{R})$ medible. Definimos

$$G(f) = \{(x, y) \in X \times \mathbb{R}_+ : f(x) = y\}.$$

$$Epi(f) = \{(x, y) \in X \times \mathbb{R}_+ : 0 \leq y < f(x)\}.$$

- (1) Probar que $G(f)$ y $Epi(f)$ están en la σ -álgebra producto $\mathcal{T} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
- (2) Probar que $\mu \otimes \lambda(G(f)) = 0$.
- (3) Probar que

$$\mu \otimes \lambda(Epi(f)) = \int f d\mu = \int \mu(\{f > y\}) d\lambda.$$

Problema 6. Sea (X, \mathcal{T}, μ) un espacio de medida y $f : X \rightarrow \mathbb{R}_+$ medible, distinta de 0 c.t.p. Definimos

$$I_f = \{p \in [1, \infty] : \|f\|_p < \infty\}.$$

Probar que I_f es un intervalo. Es decir, si $r \leq s$ están en I_f , entonces $[r, s] \subseteq I_f$.