

EXAMEN DE CALIFICACIÓN ANÁLISIS

Doctorado en Ciencia con mención en Matemática.

Universidad de Santiago de Chile.

Abril 2018.

Esta prohibido el uso de apuntes, textos, o equipos electrónicos.

VARIABLE COMPLEJA (resolver dos ejercicios)

Ejercicio 1. Sea U un abierto de \mathbb{C} que es conexo y $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ una función analítica. Pruebe que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. $f \equiv 0$,
2. Existe $a \in U$ tal que $f^{(n)}(a) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (por definición $f^{(0)} = f$ y $f^{(n)}$ es la n -ésima derivada de f).

Ejercicio 2. Sean f, g dos funciones analíticas en $\overline{B(0,1)} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$. Suponga que $|f(z)| = |g(z)|$ para todo $|z| = 1$. Muestre que si f y g nunca son 0 en $B(0,1)$, entonces existe λ , con $|\lambda| = 1$, tal que $f = \lambda g$.

ANÁLISIS FUNCIONAL y TEORÍA DE LA MEDIDA (resolver solamente tres problemas)

Ejercicio 3. Sea $V = \ell_2(\mathbb{N}) = \{a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \mid \sum_i |a(i)|^2 < \infty\}$ con su estructura de Hilbert.

1. Pruebe que $S = \{a \in \ell_2(\mathbb{N}) \mid \|a\| = 1\}$ no es compacto.
2. Sea K un compacto en V . Pruebe que $V \setminus K$ es conexo.

Ejercicio 4. Calcular

$$\min_{a,b,c} \int_{-1}^1 |x^3 - ax^2 - bx - c|^2 dx.$$

Ejercicio 5. Sea $A \subseteq [0, 2\pi]$ un conjunto Lebesgue medible Demuestre que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A \cos(nx) dx = 0.$$

Ejercicio 6. Sea \mathcal{H} un espacio de Hilbert, y $(\phi_n)_{n=1}^{\infty}$ sucesión débilmente convergente a ϕ . Suponer que $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ converge fuertemente a φ . Demuestre $\langle \phi_n, \varphi_n \rangle \rightarrow \langle \phi, \varphi \rangle$.

Ejercicio 7. Sea $(X, \|\cdot\|)$ espacio normado no trivial, y X^* su dual. Demuestre: (i) $X^* \neq \{0\}$ (ii) $\|x\| = \sup\{|f(x)| : f \in X^*, \|f\|_{op} = 1\}$ para todo $x \in X$. (iii) Demuestre que X^* separa puntos de X , es decir si $x_1 \neq x_2$ en X , entonces existe $f \in X^*$ tal que $f(x_1) \neq f(x_2)$.