

EXAMEN DE CALIFICACION
ANALISIS FUNCIONAL

Doctorado en Matemática
2° Semestre de 2008.

1. Sea $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua tal que $g(t) \geq 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y $g(t) \rightarrow \infty$ cuando $|t| \rightarrow \infty$. Sea $C(\mathbb{R})$ el espacio formado por las funciones continuas de \mathbb{R} en \mathbb{R} . Sean

$$C_b = \{f \in C(\mathbb{R}) : \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)| < \infty\},$$

$$C_0 = \{f \in C(\mathbb{R}) : \lim_{|t| \rightarrow \infty} f(t) = 0\},$$

$$C_g = \{f \in C(\mathbb{R}) : \lim_{|t| \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{g(t)} = 0\}.$$

Considere C_b y C_0 provistos con la norma de la convergencia uniforme. En C_g se define

$$\|f\|_g = \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{|f(t)|}{g(t)}.$$

- (a) Muestre que $(C_g, \|\cdot\|_g)$ es un espacio de Banach, $C_0 \subset C_b \subset C_g$, las inclusiones son estrictas y la aplicación inclusión $\iota : C_b \rightarrow C_g$ es continua.
- (b) Los espacios C_g y C_0 son isomorfos e isométricos.
- (c) Sea $K \subseteq C_g$. Establezca las condiciones para que K sea relativamente compacto.
2. Sean X, Y espacios de Banach y $T : X \rightarrow Y$ una aplicación lineal continua.
- (a) Muestre que si $T(X) = Y$, entonces existe $\gamma > 0$ tal que para todo $y \in Y$, existe $x \in X$ tal que $T(x) = y$ y $\|x\| \leq \gamma\|y\|$.
- (b) Muestre que existe la inversa $T^{-1} : Y \rightarrow X$ continua si y solamente si $\ker(T') = \{0\}$ y existe $\alpha > 0$ tal que

$$\|T(x)\| \geq \alpha\|x\|, \quad \forall x \in X.$$

3. Sea X un espacio de Hilbert y sean M, N subespacios vectoriales cerrados de X tal que $X = M + N$. Mostrar que existe $P : X \rightarrow N$ proyección lineal continua tal que $x_1 = x - P(x) \in M$ y

$$\|x_1\| = \min\{\|y\| : y \in M, x = y + z, z \in N\} \quad (1)$$

para cada $x \in X$.

Indicación. Muestre las siguientes propiedades:

- (i) $C_x = \{y \in M : x = y + z, z \in N\} = M \cap (x + N)$.

(ii) C_x es un conjunto convexo cerrado no vacío.

(iii) Existe x_1 que verifica (1).

(iv) Sea $Q : M \rightarrow M \cap N$ la proyección ortogonal. Si $x \in M$, entonces $Px = Qx$.

(v) Si $x \in N$, entonces $Px = x$.

Usando estas propiedades, demuestre la afirmación.

4. Justifique que ℓ^1 no es un espacio reflexivo.

Santiago, Septiembre de 2008.

SOLUCIONES

1. (a) y (b) absolutamente trivial. Sólo para ver si se ubican con las definiciones. (c) Usando (b), sea $T : C_g \rightarrow C_0$, $f \mapsto f/g$ el isomorfismo isométrico. Basta verificar que $T(K)$ es relativamente compacto en C_0 . Es decir, K debe verificar las siguientes condiciones: $\{f/g : f \in K\}$ es puntualmente acotado, equicontinuo y para cada $\varepsilon > 0$ existe $L(\varepsilon) > 0$ tal que $\frac{|f(t)|}{g(t)} < \varepsilon$ para todo $|t| > L$.
2. (a) La aplicación T es epiyectiva y, por tanto, abierta. Se deduce que existe $r > 0$ tal que $B_r(0, Y) \subseteq TB_1(0, X)$. Sea $\beta > 1$. Si $y \in Y$, $y \neq 0$, entonces

$$y \in B_{\beta\|y\|}(0, Y) = B_{r\frac{\beta}{r}\|y\|}(0, Y) \subseteq TB_{\frac{\beta}{r}\|y\|}(0, X)$$

y basta escoger $\gamma = \frac{\beta}{r}$.

(b) Si existe $T^{-1} : Y \rightarrow X$ continua, entonces

$$\|x\| = \|T^{-1}(T(x))\| \leq \|T^{-1}\|\|T(x)\|, \quad \forall x \in X.$$

Además, si $T'(y') = 0$, entonces

$$\langle T(x), y' \rangle = \langle x, T'(y') \rangle = 0,$$

para todo $x \in X$. Como $T(X) = Y$, del Teorema de Hahn-Banach se deduce que $y' = 0$. En consecuencia, $\ker(T') = \{0\}$.

Recíprocamente, la condición

$$\|T(x)\| \geq \alpha\|x\|, \quad \forall x \in X$$

muestra que $\ker(T) = \{0\}$, luego existe T^{-1} , y que $\mathcal{R}(T)$ es cerrado. Si suponemos que $y' \in Y'$ se anula sobre $\mathcal{R}(T)$, procediendo como en la primera parte, obtenemos que $T'(y') = 0$ y, por tanto, $y' = 0$. Del teorema de Hahn-Banach se deduce que $\mathcal{R}(T) = Y$. Se completa la demostración usando el teorema de la aplicación abierta (o el teorema de la inversa continua de Banach).

3. Procedemos a establecer la indicación. Las afirmaciones (i), (ii) son inmediatas. La afirmación (iii) se obtiene como consecuencia del teorema de la mejor aproximación. (iv) Si $x \in M$ y descomponemos $x = y + z$ con $y \in M$, $z \in N$ se deduce que $z \in M \cap N$ y la mejor aproximación a x en $M \cap N$ es $z = Qx$. (v) Si $x \in N$, entonces $C_x = M \cap N$ y $x_1 = 0$.

Usando reiteradamente estas propiedades se completa la demostración. Sea $x \in X$ y descomponemos $x = y + z$ con $y \in M$, $z \in N$. Entonces

$$C_y = M \cap (y + N) = M \cap (x - z + N) = M \cap (x + N) = C_x.$$

Si x_1, y_1 son los elementos de norma mínima correspondientes a x e y , respectivamente, podemos afirmar que $x_1 = y_1$ y

$$Px = x - x_1 = x - y_1 = x - (y - Qy) = Qy + z.$$

Se deduce de la igualdad anterior que P es lineal y que $P^2 = P$. Por ejemplo, esta última afirmación se obtiene de

$$P^2x = P(Qy + z) = P(Qy) + P(z) = Q(Qy) + z = Qy + z = Px.$$

Mostremos finalmente la continuidad de P . Consideremos el espacio $M \times N$ con la norma del producto y sea $S : M \times N \rightarrow M + N = X$, $(m, n) \mapsto m + n$. Es claro que S es una aplicación lineal continua epiyectiva y, usando Problema 2 (a), existe $\gamma > 0$ tal que para cada $x \in X$, existen $y \in M$, $z \in N$ tal que $x = y + z$ y $\|y\| + \|z\| \leq \gamma\|x\|$. Por lo tanto,

$$\|Px\| = \|Qy + z\| \leq \|Qy\| + \|z\| \leq \|y\| + \|z\| \leq \gamma\|x\|.$$

4. Hay muchas maneras de hacer evidente esta propiedad, usando alguna de las caracterizaciones de espacio reflexivo. Una bastante simple es la siguiente. Si suponemos que ℓ^1 es reflexivo, entonces $(\ell^1)' = \ell^\infty$ y $(\ell^\infty)' = \ell^1$. Como ℓ^1 es un espacio separable, se deduce que ℓ^∞ es también separable, lo cual es bien conocido que es falso.