

EXAMEN DE CALIFICACIÓN ANÁLISIS II

30 de agosto de 2010

Resuelva solamente cuatro de los siguientes seis problemas. Indique claramente los teoremas que utilice en sus razonamientos.

- (1) Sobre $L^2(\mathbb{R})$ considere las funciones de Hermite $\psi_n(t) = \frac{1}{(2^n n! \sqrt{\pi})^{1/2}} e^{-t^2/2} H_n(t)$,

donde $H_0(t) = 1$, $H_n(t) = (-1)^n e^{t^2} \frac{d^n}{dt^n} (e^{-t^2})$, $n \in \mathbb{N}$. Demuestre que para todo subconjunto medible $A \subseteq \mathbb{R}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A \psi_n(t) dt = 0$$

- (2) Sea M subespacio cerrado en \mathcal{H} espacio de Hilbert. Demuestre $(M^\perp)^\perp = M$.

- (3) Sea \mathcal{H} espacio de Hilbert y A operador lineal y acotado sobre \mathcal{H} . Defina sobre la suma directa $\mathcal{K} = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ el operador B por

$$B = \begin{pmatrix} 0 & iA \\ -iA^* & 0 \end{pmatrix}.$$

Demuestre que B es auto-adjunto.

- (4) Considere f una función compleja medible sobre un espacio medible X . Suponer $f \in L^r(X)$ para algún $1 \leq r < \infty$. Demuestre que

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$$

- (5) Sea $N \geq 1$, fijo. Demuestre que existe una medida μ sobre $[0, 1]$ tal que para todo polinomio de grado a lo más N

$$\int_0^1 p(x) d\mu(x) = \sum_{k=1}^N p^{(k)}(k/n)$$

Puede considerar M como el espacio de todos los polinomios en $[0, 1]$ de grado a lo más N . Note que la derivada de un polinomio en $[0, 1]$ es otro polinomio en $[0, 1]$.

- (6) Considere $f \in L^1(\mathbb{R}, d\lambda)$ con $d\lambda$ la medida de Lebesgue sobre \mathbb{R} . Demuestre que la función

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) d\lambda(t)$$

es continua.