

Examen de Calificación Álgebra
Marzo 2017
Universidad de Santiago de Chile

Instrucciones: Resuelva

1. Sean A y B dos matrices $n \times n$ con coeficientes complejos, ambas diagonalizables y tales que $AB = BA$. Demuestre que existe una matriz compleja invertible P de modo que PAP^{-1} y PBP^{-1} son diagonales.
2. Usando la *ecuación de órbitas* (y la *ecuación de clases (de conjugación)* como caso particular).
 - (a) Demuestre que un grupo finito G de orden p^2 para un primo p tiene un centro $C(G)$ no trivial. Después demuestre que $G = C(G)$. (Ayuda: pruebe que $G/C(G)$ no puede ser cíclico de orden > 1 .)
 - (b) Sea G grupo de orden 99. Demuestre que G tiene exactamente un 3-subgrupo de Sylow H_3 y exactamente un 11-subgrupo de Sylow H_{11} . Demuestre que G es isomorfo a $H_3 \times H_{11}$ y concluya que G es abeliano.
3. Sea A un grupo Abelianito finitamente generado y $f : A \rightarrow A$ un homomorfismo sobreyectivo. Demuestre que f es un isomorfismo. Vale lo mismo si A no se asume finitamente generado?
4. Sea $\mathcal{R} := \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ el anillo de las funciones continuas del intervalo compacto $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ hacia \mathbb{R} , el cuerpo de los números reales.
 - (a) Demuestre que $\mathcal{R}^\times = \{f \in \mathcal{R} \mid \forall x \in [0, 1] : f(x) > 0 \vee \forall x \in [0, 1] : f(x) < 0\}$.
 - (b) Demuestre que para cualquier ideal propio $\mathcal{I} \subsetneq \mathcal{R}$ existe un $a \in [0, 1]$ tal que $\forall f \in \mathcal{I} : f(a) = 0$. ¿Vale lo mismo en el anillo $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?
 - (c) Demuestre para $a \in [0, 1]$, que $\mathfrak{m}_a = \{f \in \mathcal{R} \mid f(a) = 0\}$ es un ideal máximo y que cada ideal máximo es de la forma \mathfrak{m}_a para un $a \in [0, 1]$.
 - (d) Considere ahora el (sub) anillo $\mathcal{R}^{(1)} := \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$, de funciones diferenciables en $[0, 1]$. Pruebe que $\mathcal{I}_0 := \{f \in \mathcal{R} \mid f(0) = 0 \text{ y } f'(0) = 0\}$ es un ideal primo que no es máximo. (ESTO ESTA MALO)
5. Sea $a \in \mathbb{R}$ tal que $a^3 - a^2 + a + 2 = 0$.
 - (a) ¿Cual es el polinomio mínimo $f_a \in \mathbb{Q}[X]$ de a sobre \mathbb{Q} ?
 - (b) Sea L/\mathbb{Q} el cuerpo de descomposición de f_a . Determine
 - i. $[L : \mathbb{Q}]$,
 - ii. a qué grupo conocido es isomorfo $\text{Gal}(L/\mathbb{Q})$,
 - iii. el número de cuerpos intermedios de L/\mathbb{Q} .