

**Examen de Calificación Álgebra 2018**  
**Doctorado en Matemáticas**  
**Universidad de Santiago de Chile**

1. Considere el cubo de Rubik que se ve en la imagen. Este cubo está casi en su estado inicial (salvo por los cubitos en las esquinas al frente arriba, que aparecen traspuestos). Argumente que el cubo fue mal fabricado, puesto que no hay manera de ponerlo en su estado inicial sin retirar y reensamblar piezas.



*Sugerencia: ¿ Que se puede decir sobre la permutación de cubitos inducida por una rotación de 90 grados de una de las caras (independiente de una enumeración o del estado actual del cubo)?*

2. Sea  $f \in \mathbb{Z}[X]$  un polinomio mónico. Demuestre que  $f$  no tiene ninguna raíz en  $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ .
3. Sea  $A$  la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & 1 \\ 1 & 1 & 7 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{3 \times 3}.$$

- (a) ¿ Es  $A$  diagonalizable sobre  $\mathbb{Q}$  ? En caso afirmativo, exhiba una matriz invertible  $Q \in \mathbb{Q}^{3 \times 3}$  tal que  $Q^{-1} \circ A \circ Q$  sea diagonal.
  - (b) Encuentre una matriz  $U \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  con  $U^t \circ U = I_3$  tal que  $U^t \circ A \circ U$  sea diagonal.
  - (c) ¿ Existe un número primo  $p \in \mathbb{N}$  tal que  $A$  (con coeficientes considerados modulo  $p$ ) no diagonalizable sobre el cuerpo  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  ?
4. Sea  $p$  un número primo y  $G$  un grupo de orden  $p^n$  para un  $n \in \mathbb{N}$ . Demuestre que existe una cadena de subgrupos propios

$$\{1_G\} = G_0 < G_1 < \dots < G_n = G$$

con  $|G_i| = p^i$ .

5. Sea  $K/\mathbb{R}$  una extensión propia de Galois.

- (a) Demuestre que  $\text{Gal}(K/\mathbb{R})$  es un grupo de orden  $2^n$  para un  $n \geq 1$ .
- (b) Demuestre que  $K/\mathbb{R}$  contiene un cuerpo intermedio isomorfo a  $\mathbb{C}$ .
- (c) Demuestre que  $n = 1$ .

Concluya que  $\mathbb{C}$  es algebraicamente cerrado.