

Examen de Calificación Álgebra 2016

Universidad de Santiago de Chile

Resuelva

1. Sea G un grupo de orden 12. Demuestre que los subgrupos de orden 6 son normales en G , y que hay al menos un subgrupo de orden 3 o uno de orden 4, normal en G .
2. Pruebe la existencia de un isomorfismo de anillos

$$\mathbb{Q}[X]/(X^6 - 1) \cong \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}[\sqrt{-3}] \times \mathbb{Q}[\sqrt{-3}]$$

3. Sea G un grupo de orden 33. Sea C un conjunto de cardinalidad 19 dotado de una acción por G . Muestra que C tiene un punto fijo bajo la acción.
4. Sea K un cuerpo finito y L/K una extensión finita de cuerpos. Pruebe que

$$\begin{aligned} L &\rightarrow L \\ x &\mapsto x^{|K|} \end{aligned}$$

es un K -automorfismo de L y que L/K es una extensión de Galois con $\text{Gal}(L/K)$ generado por este K -automorfismo.

5. Sea K el cuerpo de descomposición de $x^6 - 2$ sobre \mathbb{Q} . Demuestre que $[K : \mathbb{Q}] = 12$. Determine para cada $n \in \{2, 3, 4\}$ el número de cuerpos intermedios L entre K y \mathbb{Q} con $[L : \mathbb{Q}] = n$. Cuántos hay de grado $[L : \mathbb{Q}] = 6$?