

Examen de Calificación Álgebra 2015

Universidad de Santiago de Chile

Resuelva al menos 4 ejercicios.

1. (La pulga en el pentagono) Sea G un grafo pentagonal, es decir G tiene 5 vertices $\{v_1, \dots, v_5\}$ y las aristas de G son los pares (v_i, v_{i+1}) (modulo 5). En este grafo hay una pulga P que salta en tiempos discretos, es decir que si en tiempo n la pulga P esta en v_i , entonces en el tiempo $n + 1$ ella salta a con probabilidad $1/2$ a v_{i-1} y con probabilidad $1/2$ a v_{i+1} . (si no le gustan las probabilidades, puede interpretar esto mismo como una masa que se divide en dos entre los vertices vecinos).

Si en el tiempo 0 la pulga esta en v_1 calcule la distribucion de pulga en el tiempo 2015.

2. Sea $SL_2(\mathbb{R})$ el grupo de matrices 2×2 , reales y con determinante 1. Sea $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{im}(z) > 0\}$, el semi-plano complejo superior (tambien llamado semi-plano de Poincaré). Para $g \in SL_2(\mathbb{R})$, $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, y $z \in \mathcal{H}$ definimos

$$g.z = \frac{az + b}{bz + d}.$$

- (a) Demuestre que esto define una accion de $SL_2(\mathbb{R})$ en \mathcal{H} .
 - (b) Demuestre que la acción es transitiva (es decir, para todo $z, w \in \mathcal{H}$, existe $g \in SL_2(\mathbb{R})$ tal que $g.z = w$).
 - (c) Pruebe que el estabilizador de cualquier punto en \mathcal{H} es isomorfo al círculo $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ (Ayuda, calcule el estabilizador de $i \in \mathcal{H}$).
3. (Un grupo de Baumslag y Solitar) Sean f y g homeomorfismos de la recta dados por $f(x) = 2x$ y $g(x) = x + 1$.
 - (a) Pruebe que $\langle f, g \rangle$, el subgrupo de $\text{Homeo}_+(\mathbb{R})$ generado por f y g es isomorfo al producto semidirecto $\mathbb{Z}[1/2] \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}$, donde $\mathbb{Z}[1/2]$ denota los racionales diádicos y $\alpha : \mathbb{Z} \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{Z}[1/2])$ es tal que $\alpha_n = \alpha(n)$ es la multiplicacion por 2^n . Sugerencia: Calcule $f^n \circ g \circ f^{-n}$.
 - (b) Pruebe que $\langle f, g \rangle$ admite la presentacion $\langle a, b \mid aba^{-1} = b^2 \rangle$.
 4. Sea G un grupo de orden 231. Demuestre que hay un solo 11-Sylow, y que éste está en $Z(G) = \{h \in G \mid gh = hg \ \forall g \in G\}$, el centro de G .
 5. (Enteros de Eisenstein) Sea $w \neq 1$ una raiz cubica de la unidad. Sea $\mathbb{Z}[w] = \{a + bw \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$. Pruebe que $\mathbb{Z}[w]$ es un anillo euclidean con la valuacion $f(a + bw) = a^2 - ab + b^2$.
 6. Pruebe que todo Dominio de Integridad finito es un cuerpo.
 7. Pruebe que $x^4 + 6x^3 + 9x^9 + 3$ genera un ideal maximal en $\mathbb{Q}[x]$

8. Pruebe que $p(x) = x^2 + x + 1$ es irreducible en $F_2[x]$, y calcule la cardinalidad del anillo $F_2[x]/\langle p(x) \rangle$. Pruebe que este anillo cociente es cuerpo que contienen estrictamente a F_2 (en este caso decimos que es una extension de F_2). Puede repetir este argumento para fabricar cuerpos finitos de cardinalidad tan grande como se quiera que extiendan a F_2 ?
9. Sea K el cuerpo de descomposicion de $x^5 - 11$ sobre \mathbb{Q} . Calcule $Gal(K/\mathbb{Q})$ y encuentre todos los cuerpos intermedios entre K y \mathbb{Q} .

- Algebra lineal
 - Vectores y valores propios de una transformación
 - Triangularización y diagonalización de matrices
 - Descomposición de Jordan
 - Método Graham-Schmidt
 -
- Grupos
 - Homomorfismos, subgrupos normales, cocientes de grupos.
 - Teorema de Cayley
 - Teoremas de Sylow
 - El grupo libre y presentaciones de grupos
 - Acciones de grupos
 - Grupos solubles y nilpotentes
 - Grupos residualmente finitos
- Anillos
 - Homomorfismo, ideales y anillos cocientes
 - Factorización
 - Localización
 - Anillos de polinomios, criterios de irreducibilidad
 - Familias de anillos: DIP, DFU, DE, cuerpos etc...
- Cuerpos y teoría de Galois
 - Extensiones algebraicas de un cuerpo y su grupo de Galois.
 - Grupo de Galois de un polinomio
 - Normalidad, separabilidad, clausura algebraica
 - El Teorema de la correspondencia de Galois (teorema fundamental) y el Teorema de Galois
 - Extensiones ciclotómicas, extensiones radicales
 - cuerpos finitos
 - Construcciones con regla y compás.
- Bibliografía sugerida
 - DUMMIT, D., FOOTE, R. . Abstract Algebra. John Wiley and Sons, 1999.
 - HERSTEIN, I.N. Topics in Algebra. John Wiley and Sons, 1975.

- HUNGEFORD, T.W. Algebra. Springer-Verlag, 1997
- JACOBSON, N.. Basic Algebra 1. W.H. Freeman, 1985.
- ARTIN, M. Algebra. Pertinence Hall, 2011 (2nd ed.)
- MORANDI, P. Field and Galois Theory, Springer, 1996.
- LANG, S. Algebra, Springer.