

EXAMEN DE CALIFICACION

ALGEBRA ABSTRACTA

Doctorado en Matemática
2° Semestre de 2008.

Problema. Pruebe que para todo $n \geq 1$ el polinomio $p(x) = x^n - x^{n-1} - x^{n-2} - \dots - x - 1$ es irreducible en $\mathbb{Q}[x]$ siguiendo los siguientes pasos.

(i) Verifique directamente la irreducibilidad para $n < 4$.

(ii) Pruebe que $p(x)$ tiene una única raíz real positiva r , la cual es además simple.

Sugerencia: utilice el hecho que $p'(0) < 1$, $p''(0) < 1$, etc.

(iii) Pruebe que $p(x)$ no tiene ninguna raíz compleja de módulo 1.

Sugerencia: utilice el hecho que, si ξ es una raíz de p , entonces también es raíz del polinomio $q(x) = (x-1)p(x) = x^{n+1} - 2x^n - 1$.

(iv) Pruebe que, si $n \geq 4$, entonces la raíz positiva r de $p(x)$ es estrictamente mayor que $\sqrt{3}$.

(v) Pruebe que si s es una raíz de $p(x)$ en \mathbb{C} de módulo estrictamente menor a 1, entonces $\|s\| > 1/3^n$. Concluya que el producto de todas las raíces de $p(x)$ de módulo menor a 1 es mayor que $1/3$.

(vi) Usando (iv) y (v), pruebe que toda raíz de $p(x)$ en \mathbb{C} distinta de r tiene módulo estrictamente menor a 1.

Sugerencia: verifique primero que si t es una raíz de $p(x)$ de norma mayor que 1 entonces dicha norma es mayor o igual que r ; utilice luego el hecho que el producto de las raíces de $p(x)$ es igual a -1 para probar que $t = r$, obteniendo así una contradicción.

(vii) De los pasos anteriores concluya que $p(x)$ tiene una raíz real simple y mayor que 1, y toda otra raíz tiene módulo menor a 1. A partir de este hecho concluya la irreducibilidad de $p(x)$.

Observación. Un real $r > 1$ que es raíz de un polinomio irreducible en $\mathbb{Z}[x]$ de modo que todas las otras raíces son de módulo menor a 1 es llamado un *número de Pisot*. Aparte de su interés aritmético, estos números son importantes en probabilidades, sistemas dinámicos y análisis.

Solución Problema.

(i) Para $n = 1$ la afirmación es obvia. Si $n = 2$ entonces las raíces de $p(x) = x^2 - x - 1$ no son racionales, por lo que $p(x)$ es irreducible en $\mathbb{Q}[x]$. Si $n = 3$ entonces $p(x) = x^3 - x^2 - x - 1$. Si $p(x)$ fuese reducible entonces tendría una raíz racional, y por lo tanto entera (por el criterio de Gauss). Sin embargo, es fácil ver que $p(x) < 0$ para todo $x \leq 1$ y $p(x) > 0$ para todo $x \geq 2$.

(ii) Siendo $p(0) < 0$ y $p(x) \rightarrow +\infty$ cuando $x \rightarrow +\infty$, $p(x)$ debe tener una raíz real positiva. Sea k el número de raíces positivas (distintas) de $p(x)$. Como $p'(0) < 1$, $p'(x)$ tiene también al menos k raíces positivas. Lo mismo ocurre para $p''(x), \dots, p^{(n-1)}(x)$. Obviamente, esto es imposible si $k \geq 2$, por lo que $k = 1$.

Para ver que la raíz es simple, basta ver que el número total de raíces (contadas con multiplicidad) es impar. Sean r_1, \dots, r_{m_1} y r'_1, \dots, r'_{m_2} las raíces positivas y negativas, respectivamente. Sean $r''_1, \bar{r}''_1, \dots, r''_{m_3}, \bar{r}''_{m_3}$ las raíces complejas, agrupadas por pares conjugados. Se tiene $m_1 + m_2 + 2m_3 = n$, y como el producto de las raíces es $(-1)^{n+1}$, se tiene además $m_2 \equiv n+1 \pmod{2}$. Luego, $m_1 \equiv 1 \pmod{2}$, es decir, el número de raíces positivas es impar.

(iii) Si $q(\xi) = 0$ y $\|\xi\| = 1$ entonces $\xi^{n-1}(\xi - 2) = -1$, por lo que $1 = 2 - \|\xi\| \leq \|\xi - 2\| = 1$. Se tiene entonces la igualdad en la desigualdad triangular, lo que implica que ξ es un real positivo, y por lo tanto $\xi = 1$. Sin embargo, $p(\xi) = 1 - n < 0$.

(iv) Basta observar que, para $n \geq 4$,

$$q(\sqrt{3}) = (\sqrt{3})^n(\sqrt{3} - 2) + 1 \leq 9(\sqrt{3} - 2) + 1 < 0.$$

(v) Si s es una raíz de $p(x)$ en \mathbb{C} de módulo estrictamente menor a 1, entonces

$$1 = \|s\|^n \|s - 2\| \leq 3\|s\|^n,$$

Se concluye entonces que el producto de todas las raíces de $p(x)$ de módulo menor a 1 es mayor que $1/3^{m/n}$, donde m es el número de dichas raíces. Como $m \leq n$ se tiene lo afirmado.

(vi) Si $q(t) = 0$ entonces $\|t\|^n \|t - 2\| = 1$ y $2 \leq \|t - 2\| + \|t\| = \|t\|^{-n} + \|t\|$. Por lo tanto, $q(\|t\|) \geq 0$, y como $q(x) < 0$ para $x \in [1, r[$, esto implica que si $\|t\| \geq 1$ entonces $\|t\| \geq r$.

El producto de las raíces de norma menor que 1 es $> 1/3$. Luego, si $t \neq r$ entonces el producto de todas las raíces tendría norma mayor que $(\sqrt{3})^2/3 = 1$, lo cual es absurdo. Por lo tanto, $t = r$, lo que contradice (ii).

(vii) Si $p(x)$ fuese reducible en $\mathbb{Q}[x]$, entonces por el Lemma de Gauss también lo sería en $\mathbb{Z}[x]$. Como $p(x)$ tiene sólo una raíz de módulo ≥ 1 , uno de los factores de $p(x)$ tiene todas sus raíces de módulo menor a 1. Sin embargo, el coeficiente constante de dicho factor debe ser ± 1 , por lo que el producto de sus raíces es igual a 1.