UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

Facultad de Ciencia

Departamento de Matemática y Ciencia de la Computación

UN ESTUDIO DE UNA CLASE DE ECUACIONES DE SCHRÖDINGER TIEMPO-ESPACIO FRACCIONARIO

Autor:

JOSÉ VICTORINO RAMÍREZ MOLINA

Profesor Guía:

Humberto Eduardo Prado Castillo

Tesis presentada al Departamento de Matemática y Ciencia de la Computación de la Facultad de Ciencia de la Universidad de Santiago de Chile, para optar al grado de Doctor en Ciencia con mención en Matemática.

Santiago - Chile

2019

UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y CIENCIA
DE LA COMPUTACIÓN

Los miembros de la Comisión Calificadora certifican que han leído y recomiendan a la Facultad de Ciencia para la aceptación la tesis titulada: **"Un estudio de una clase de ecuaciones de Schrödinger tiempo-espacio fraccionario"** del canditado **José Victorino Ramírez Molina** en cumplimiento parcial de los requisitos para obtener el grado de Doctor en Ciencia con mención en Matemática . La comisión está compuesta por:

Profesor Guía
Dr. Humberto Prado C.

Profesor Informante
Dra. ....

Director Depto. de Matemática
y Ciencias de la Computación
Dr. Rafael Labarca B.

Profesor Informante
Dr. ....

Director Programa Doctorado en
Ciencia con Mención en Matemática
Dr. Cristóbal Rivas E.

Profesor Informante
Dr. ....

Santiago - Chile

Mayo, 2019

Resumen

UN ESTUDIO DE LA ECUACIÓN DE SCHRÖDINGER TIEMPO-ESPACIO FRACCIONARIO.

José Victorino Ramírez Molina

Mayo–2019

Esta tesis tiene como objetivo estudiar condiciones suficientes para la existencia, unicidad, representación (explícita e implícita) y regularidad de soluciones para una cierta clase de ecuaciones de Schrödinger de tipo homogéneas, lineales y no lineales determinadas por el operador Laplaciano fraccionario. Esta investigación, se desarrolla sobre una escala de espacio de Sobolev apropiado. Además, presentamos ejemplos explícitos de ecuaciones que pueden considerarse en nuestros marco de estudio.

Abstract

A STUDY OF THE EQUATION OF SCHRÖDINGER TIME-SPACE FRACTIONAL.

José Victorino Ramírez Molina

Mayo–2019

This thesis aims to study sufficient conditions for the existence, uniqueness, representation (explicit and implicit) and regularity of solutions for a certain class of equations of Schrödinger of homogeneous, linear and non-linear type determined by the operator Fractional Laplacian. This research is developed on an appropriate Sobolev space scale, and we present explicit examples of equations that can be considered in our study framework.

No puede existir un lenguaje más universal y simple, más carente de errores y oscuridades, y por lo tanto más apto para expresar las relaciones invariables de las cosas naturales [...] . Las matemáticas parecen constituir una facultad de la mente humana destinada a compensar la brevedad de la vida y la imperfección de los sentidos.

Jean-Baptiste Joseph Fourier

(1768–1830)

Matemático Francés.

Agradecimientos

Le agradezco infinitamente a **Dios** por estar a mi lado en cada paso que he dado, por fortalecer mi corazón e iluminar mi intelecto y por haber trazado en mi camino a aquellas personas que han sido un soporte y compañía durante todo el periodo de estudio.

Agradezco a la Comisión Nacional de Investigación Científica y Tecnológica (CONICYT) junto al Fondo Nacional de Desarrollo Científico y Tecnológico (FONDECYT 170571), debido al financiamiento económico proporcionado durante el transcurso del programa de Doctorado en Ciencia con mención en Matemática en la Universidad de Santiago de Chile. Agradezco, adicionalmente y de manera muy especial al director de tesis, Dr. Humberto Prado Castillo, gracias por compartir sus valiosos conocimientos, por sus recomendaciones y constantes enseñanzas en los seminarios y durante el proceso de elaboración de este trabajo de investigación. Deseo dar las gracias a los integrantes del comité evaluador de este trabajo: Dra.... y Dr. ...., sin duda, sus correcciones, críticas y consejos me han permitido culminar este trabajo de manera óptima (pendiente).

Mis agradecimientos al Departamento de Matemáticas de la Universidad de Santiago de Chile, especialmente al programa de Postgrado en Matemáticas y su director que durante mi estancia lo dirigió en gran parte, el Dr. Víctor Guiñez Matamala, gracias a todos los académicos que compartieron sus invaluables conocimientos, análisis y reflexiones conmigo y dirigieron de una u otra manera mi formación académica, a toda la planta docente y administrativa, gracias por compartir conmigo lapsos de su tiempo.

De manera muy especial deseo extender mis agradecimientos a mi núcleo familiar, por su apoyo y la confianza que depositan en mí, son todos ellos el pilar de mi vida, gracias por estar conmigo en los momentos de alegría así como en los más difíciles, gracias por darme ánimos para salir adelante y gracias por ser tan amables, cariñosos, gracias por ser mi familia, sepan todos que los amo, mis agradecimientos a mi madre por estar conmigo de forma incondicional, y a mi padre, que aunque el destino nos ha separado, en esencia orienta mi vida, gracias a todos mis hermanos. Agradezco a mi compañera de vida, por su apoyo invariable, por estar a mi lado y sus consejos que han sido de gran ayuda.

A todos ellos, deseos de gratitud.

JOSÉ VICTORINO RAMÍREZ MOLINA
Mayo, 2019.

Tabla de Contenidos

Introducción

El objetivo principal de este trabajo es estudiar la existencia, unicidad, regularidad y representación de soluciones continuas para una clase de ecuaciones de Schrödinger tiempo-espacio fraccionario en el contexto de ecuaciones homogéneas, lineales y no lineales con una no linealidad del tipo Hartree. Nuestra investigación, se ha desarrollado sobre una escala de espacios de Sobolev de orden fraccionario $H^s(\mathbb{R}^n)$, con $n \geq 1$, $s > 0$ fijos.

En las últimas décadas, la mecánica cuántica fraccionaria ha surgido y ha generado un interés creciente en investigar la nueva ecuación fundamental: "la ecuación de Schrödinger espacio fraccionaria", se sugiere ver e.g., [18,32,43–45]. El origen de esta nueva clase de mecánica cuántica de orden fraccionario, fue construida inicialmente por el autor Laskin, N., en una secuencia de artículos seminales [43–45]. Esta construcción, fue obtenida por medio de integrales de camino sobre distribuciones de probabilidad no-Gaussianas tipo-Levy (caminos cuánticos no estándar), similarmente a la célebre derivación de Feynman [21] por medio de integrales de camino sobre distribuciones de probabilidad Gaussiana tipo-Browniano (caminos cuánticos estándar), lo cual en este segundo caso produce la famosa ecuación de Schrödinger lineal estándar: $iu_t = -\Delta u + Vu$, para cierto potencial de energía V, Δ denota el Laplaciano. Más precisamente, el pionero autor Laskin, N. en el año 2000 [43,44], descubre como modelar por medio de una ecuación la dinámica del movimiento de una partícula cuántica fraccionaria en el caso uno dimensional, la cual está gobernado por el problema no local (0.0.2) para $\alpha = 1$, donde consideramos ausencia de energía potencial y con operador Laplaciano fraccionario, $H_s := (-\hbar\Delta)^{s/2}$, $\hbar$ denota la constante de Planck, $s \in (1, 2]$ denota el índice tipo Lévy (cuando $\alpha = 1$, $s = 2$, es ampliamente conocido que la distribución tipo Lévy se reduce en una de tipo Gaussiana, y el comportamiento de la dinámica se transforma en un proceso de movimiento Browniano). En el caso del problema (0.0.2) para $\alpha = 1$, $s > 0$ la ecuación de Schrödinger espacio fraccionario, permite que la mecánica cuántica fraccionaria soporte todos los fundamentos de la mecánica cuántica estándar (e.g., existencia de operador solución unitario, presencia de la ley de conservación de probabilidad, entre otras propiedades.), [47]. Además, Laskin, N. en el año 2002 [45], describe que "La ecuación de Schrödinger espacio fraccionario nos proporciona un punto de vista general sobre la relación entre las propiedades estadísticas de los camino de la mecánica cuántica y la estructura de las ecuaciones fundamentales de la mecánica cuántica". Para un revisión de aplicaciones, principios de la mecánica cuántica de orden fraccionario y propiedades de la dinámica que describe la ecuación de Schrödinger espacio fraccionario, se sugiere ver e.g., [32], [34], [46].

Con posterioridad a la construcción de la mecánica cuántica espacio fraccionaria realizada por Laskin, N. Se introduce y desarrolla los aspectos preliminares de la mecánica cuántica tiempo fraccionaria, se sugiere ver e.g., [9, 36, 37, 52, 67]. Más precisamente, inspirados por las investigaciones de Laskin, N. [43, 44]. El autor Naber, M., en el año 2004 [52], introduce la derivada fraccionaria temporal en el sentido de Caputo en lugar de la derivada de primer orden en la ecuación de Schrödinger homogénea estándar ($\alpha = 1, s = 2$ en nuestro problema (0.0.2)). Naber, M., para conseguir la ecuación de Schrödinger tiempo fraccionaria implemento la rotación wick $t \mapsto -it$, sobre el $t-$plano complejo elevando la unidad imaginaria i a la misma potencia fraccionaria que posee el operador diferencial de Caputo en la ecuación diferencial de difusión tiempo fraccionario (0.0.1), de este modo el autor consiguió la ecuación de Schrödinger tiempo fraccionaria (0.0.2), asumiendo que la energía potencial del sistema es nulo, y que la partícula tiene masa cero. La ecuación (0.0.2), para $\alpha \in (0,1), s = 2, n = 1$ nos permite describir la dinámica de procesos de evolución no-Markovianos en el contexto de física cuántica. Naber, M., resolvió la ecuación de Schrödinger tiempo fraccionario para una partícula libre (i.e, la energía potencial V de la dinámica es nula) y para el caso de un potencial no nulo V suficientemente regular. Además, concluyo que el problema (0.0.2) con operador pseudo-Hamiltoniano $H_s = (-\hbar^2\Delta)^{s/2} + V(t,x)$, donde $\hbar$ denota la constante de Planck, es equivalente a la ecuación de Schrödinger estándar, sin embargo con un operador Hamiltoniano no local tiempo dependiente definido como,

$$H_\alpha u(t,x) := -(-i)^\alpha \Delta\, \mathbf{D}_t^{1-\alpha}\, u(t,x) + (-i)^\alpha\, \mathbf{D}_t^{1-\alpha}\, u(t,x) + \frac{\mathbf{D}_t^\alpha\, u(t,x)|_{t=0}}{t^{1-\alpha}\Gamma(\alpha)},\ \alpha \in (0,1),$$

donde $(-i)^\alpha = e^{i\alpha\pi/2}$, Δ denota el operador laplaciano sobre $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{D}_t^\alpha$ corresponde a la derivada fraccionaria en el sentido de Caputo de orden α, ver Apéndice A, sección A.1 para la definición del operador $\mathbf{D}_t^\alpha$. Más tarde, Iomin, A., en el año 2009 [36], [37], establece el modelo (0.0.2) para orden $\alpha = 1/2, s = 2$ y operador Hamiltoniano definido como $H := \Delta + V(x)$, donde V denota la energía potencial del sistema. En el artículo [36], se demuestra que la *dinámica cuántica tiempo fraccionaria* de orden $\alpha = 1/2$ es modelada por medio de la mecánica cuántica estándar ($\alpha = 1$) en el marco de un modelo de comb (la ecuación de Schrödinger de orden 1/2 es isopectral a un modelo de comb), y se argumenta que la ecuación de Schrödinger tiempo fraccionaria de orden $\alpha = 1/2$ describe una evolución no Markoviana con un efecto de memoria definida por el núcleo del operador diferencial de orden fraccionario $\mathbf{D}_t^{1/2}$, para $t > 0$. Es necesario señalar, que la clase de ecuaciones de Schrödinger tiempo fraccionario (0.0.2) para $s = 2$, no satisface las siguientes leyes fundamentales de la física cuántica, [47]: La presencia de la ley de superposición cuántica; existencia del operador solución unitario; la presencia de la ley de conservación de probabilidad; existencia de niveles de energía estacionarias del sistema cuántico, entre otras propiedades de interés.

En un marco más general, en el caso de una ecuación de Schrödinger tiempo-espacio fraccionario lineal se han desarrollado algunas investigaciones examinado diferentes aspectos analíticos y probabilísticos de la solución de esta clase de problemas, algunos artículos pioneros en está línea de investigación son e.g., [19, 47, 59, 70]. Los autores Wang, S. & Xu, M., en el año 2007 [70] junto con Dong, J. & Xu, M. en el año 2008 [19], combinaron tanto la ecuaciones propuestas por Laskin, N. (clase de ecuaciones de Schrödinger espacio fraccionario lineales) y las ecuaciones propuestas por Naber, M. & Iomin, A. (clase de ecuaciones de Schrödinger tiempo fraccionario lineales) y surgió de forma natural las ecuaciones de Schrödinger tiempo-espacio fraccionario lineales. Las ecuaciones de Schrödinger tiempo-espacio fraccionario lineal incluyen tanto un operador derivada de orden fraccionario en la variable temporal (usualmente derivada en el sentido de Caputo de orden α, $\mathbf{D}_t^{\alpha}$, $t > 0$.) y derivada fraccionaria en la variable espacial (operador Laplaciano fraccionario de orden $s/2$, $(-\Delta)^{s/2}$, $s > 0$). Wang, S. & Xu, M., [70], establecen el modelo (0.0.2) (correspondiente a la dinámica de una partícula libre) y el modelo (0.0.4), para $\alpha \in (0, 1)$, $s \in (1, 2)$ con operador Hamiltoniano asociado $H_s := (-\Delta)^s + V(t, x)$. Determinan soluciones exactas (de manera formal) por intermedio de la técnica de transformadas integrales (transformada de Fourier y transformada de Laplace) en el caso de potencial nulo ($V = 0$), y determinan algunas propiedades de la dinámica en el caso de un potencial no necesariamente ($V \neq 0$). Posteriormente, Dong, J. & Xu, M. [19], determinan la solución exacta de la ecuación de Schrödinger tiempo-espacio fraccionario para un $\delta-$potencial tiempo independiente $V(t, x)$, $t > 0, x \in \mathbb{R}$. Más precisamente en [19], asumen que la solución de (0.0.2) es de variable separables y determinan de este modo la representación de la solución en el caso que $\alpha \in (0, 1); s \in (1, 2]$; y en el caso que $\alpha \in (1, 2); s \in (1, 2]$ del problema (0.0.2) sobre $[0, \infty) \times \mathbb{R}$, para más detalles, se sugiere consultar [9]. Ahora, más recientemente en el año 2017 Górka, P., Prado, H. & Trujillo, J. [28], investigan el problema homogéneo (0.0.2) sobre el marco general de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, donde consideran el orden $\alpha \in (0, 1)$ y un generador autoadjunto A sobre $\mathcal{H}$ que determina la ecuación de Schrödinger tiempo fraccionario. Luego, a partir del teorema espectral los autores prueban existencia, unicidad y representación de la solución pseudo-diferencial e ilustran que dichas soluciones son gobernadas por una familia de operadores solución $\{U_\alpha(t)\}_{t \geq 0}$. Más aún, se demuestra que $U_\alpha(t) \to e^{-itA}$ para $\alpha \to 1^+$, en este marco general si consideramos $A := (-\Delta)^{s/2}$, para $s > 0$, el problema se reduce al considerado en (0.0.2).

Esta tesis está organizada en cuatro capítulos y un apéndice, en lo que sigue daremos una breve descripción de cada uno de los capítulos y apéndice que conforman este trabajo de investigación.

En el **Capítulo 1**, estaremos interesados en definir la escala de espacios de Sobolev no homogéneos $H^{s,p}(\mathbb{R}^n)$, para $s \geq 0, 1 < p < \infty$ junto a la escala de espacio de Sobolev homogéneos $\dot{H}^{s,p}(\mathbb{R}^n)$, para $s \geq 0, 1 < p < \infty$, los cuales han sido definidos vía la transformada de Fourier. Aplicaremos, el teorema de multiplicadores de Mikhlin en algunos resultados de interés, y examinaremos algunas propiedades elementales del operador Laplaciano fraccionario $(-\Delta)^{s/2}$ actuando sobre su dominio natural $H^s(\mathbb{R}^n)$, con $s > 0$, para más detalle se sugiere revisar e.g., [11, 12, 17, 24, 42].

En el **Capítulo 2**, nos concentraremos en una primera etapa en determinar condiciones suficientes que garanticen existencia, unicidad y regularidad de solución clásica (global) para la siguiente clase de ecuaciones de sub-difusión relativista tiempo-espacio fraccionario, se sugiere ver e.g., [3, 10, 51, 58, 71]:

$$\begin{cases} \mathbf{D}_t^\alpha u(t,x) = -(-\Delta)^{s/2} u(t,x), \quad (0,\infty)\times\mathbb{R}^n \\ \quad u(0,x) = u_0(x), \quad u_0 \in H^s(\mathbb{R}^n), \end{cases} \tag{0.0.1}$$

donde $\alpha \in (0,1], s > 0$, $\mathbf{D}_t^\alpha$ denota la derivada fraccionaria en sentido de Caputo de orden α, $-(-\Delta)^{s/2}$ corresponde al operador Laplaciano fraccionario de orden $s/2$ definido vía transformada de Fourier sobre $\mathbb{R}^n$ (ampliamente conocido en la literatura como *potencial de Riesz* de orden $s/2$ o bien en el contexto de mecánica cuántica como *derivada fraccionaria de Riesz cuántica* de orden $s/2$, [44]), donde su símbolo no clásico es dado por $-|\xi|^s$, $\xi \in \mathbb{R}^n$. En este trabajo, el problema (0.0.1) será resuelto vía técnica de transformadas integrales en la variable temporal y espacial para determinar la solución u. Más precisamente, nuestra solución clásica u (global) son expresadas en término de la convolución de una núcleo fundamental de orden fraccionario $G_{\alpha,s}(\cdot,\cdot)$ contra el dato inicial del problema $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^n)$, y debido a está representación de u podemos demostrar que nuestras soluciones pertenecen a una clase apropiada de espacio de sobolev $H^s(\mathbb{R}^n)$, con $s > 0$. Más aún, demostramos un resultado de regularidad y decaimiento de nuestra solución u sobre $H^s(\mathbb{R}^n)$, para $s > 0$, $\alpha \in (0,1]$.

En una segunda etapa del presente capítulo, investigaremos condiciones suficientes que garanticen existencia, unicidad y propiedades de regularidad de solución clásica (global) para la siguiente clase de ecuaciones de Schrödinger homogéneas tiempo-espacio fraccionaria, determinada por un operador Laplaciano de orden fraccionario $(-\Delta)^{s/2}$, ver e.g., [8, 28, 53, 59]:

$$\begin{cases} \mathbf{D}_t^\alpha u(t,x) = (-i)^\alpha (-\Delta)^{s/2} u(t,x), \quad (0,\infty)\times\mathbb{R}^n \\ \quad u(0,x) = u_0(x), \quad u_0 \in H^s(\mathbb{R}^n), \end{cases} \tag{0.0.2}$$

donde $\alpha \in (0,1), s > 0$, $(-i)^\alpha = e^{-\alpha\pi i/2}$, $\mathbf{D}_t^\alpha$ denota la derivada fraccionaria en sentido de Caputo de orden α. De forma más precisa, consideramos $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^n)$ y deseamos responder las siguientes preguntas: ¿Cuáles son las condiciones suficientes de solubilidad de (0.0.2) en términos del dato inicial u_0, de modo de asegurar existencia y unicidad de soluciones clásicas a nuestro problema homogéneo?, ¿Cuáles son las condiciones suficientes del problema (0.0.2) que permiten asegurar soluciones clásicas de tipo radial?. Estás interrogantes, serán respondidas esencialmente examinando la representación pseudo-diferencial de nuestra solución clásica u, [28], descrita como,

$$u(t,x) = \mathcal{F}^{-1}[E_\alpha((-it)^\alpha |\xi|^s)\mathcal{F}(u_0)(\xi)](x), \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^n, \tag{0.0.3}$$

donde $E_\alpha(\cdot)$ denota la función de Mittag-Leffler de orden α; $\mathcal{F}, \mathcal{F}^{-1}$ corresponden a la transformada de Fourier y Fourier inverso respectivamente en el sentido $L^2(\mathbb{R}^n)$, para $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^n)$. Posteriormente, estudiaremos nuestro problema (0.0.2) para un ejemplo concreto de condición inicial u_0, y describimos de forma explícita nuestra solución u usando el teorema principal de la sección.

En el **Capítulo 3**, estaremos interesados en determinar condiciones suficientes que garanticen existencia, unicidad y regularidad de solución clásica u para la siguiente clase de ecuaciones de Schrödinger lineal tiempo-espacio fraccionario, [47]:

$$\begin{cases} i^\alpha \mathbf{D}_t^\alpha u(t,x) = (-\Delta)^{s/2} u(t,x) + f(t,x), & (0,T] \times \mathbb{R}^n, \\ \qquad u(0,x) = u_0(x), \ u_0 \in H^s(\mathbb{R}^n), \end{cases} \tag{0.0.4}$$

donde $\alpha \in (0,1)$, $i^\alpha = e^{\alpha\pi i/2}$, $s \in (0,1)$, $\mathbf{D}_t^\alpha$ denota la derivada fraccionaria en sentido de Caputo de orden α, $(-\Delta)^{s/2}$ representa el operador Laplaciano fraccionario de orden $s/2$ con dominio maximal $H^s(\mathbb{R}^n) \subseteq L^2(\mathbb{R}^n)$ y $f \in L^1([0,T]; L^2(\mathbb{R}^n))$. El objetivo de este capítulo es responder la siguiente interrogante: ¿Cuáles son las condiciones suficientes de solubilidad de (0.0.4) en términos de u_0 y el término lineal f, de modo de asegurar existencia y unicidad de soluciones clásicas y/o débiles?. Para responder de forma satisfactoria esta interrogante, determinamos la representación explícita de la solución de nuestro problema lineal (0.0.4), descrita como

$$u(t,x) = \mathcal{F}^{-1}[E_\alpha((-it)^\alpha |\xi|^s)\hat{u}_0(\xi)](x) + (-i)^\alpha \int_0^t \mathcal{F}^{-1}[E_\alpha((-i(t-\tau))^\alpha |\xi|^s)\, \mathrm{D}_\tau^{1-\alpha} \hat{f}(\tau,\xi)](x) d\tau, \tag{0.0.5}$$

donde $\hat{u}_0 = \mathcal{F}(u_0)$, $\hat{f} = \mathcal{F}(f)$, $E_\alpha(\cdot)$ denota la función de Mittag-Leffler de orden α; $\mathrm{D}_\tau^{1-\alpha}$ representa la derivada fraccionaria en el sentido de Riemann-Liouville de orden $1-\alpha$; $\mathcal{F}, \mathcal{F}^{-1}$ denotan la transformada de Fourier y Fourier inverso respectivamente. La regularidad de nuestra solución clásica u, queda descrita en una de los resultados principales de este capítulo, donde se considera $f \in AC([0,T]; H^s(\mathbb{R}^n))$, $\mathrm{D}_t^{1-\alpha} f \in C([0,T], H^s(\mathbb{R}^n))$, para $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^n)$. Entonces, se concluye que la solución de (0.0.4) pertenece al espacio $C([0,T]; H^s(\mathbb{R}^n))$. Más aún, existe una constante no negativa M_T de modo que,

$$\|u\|_{C([0,T];H^s(\mathbb{R}^n))} \le M_T \left(\|u_0\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} + \| \mathrm{D}_\tau^{1-\alpha} f\|_{L^1([0,T];H^s(\mathbb{R}^n))} \right),$$

para $\alpha \in (0,1), s > 0$.

En el **Capítulo 4**, estaremos interesados en determinar condiciones suficientes que garanticen existencia, unicidad y regularidad de soluciones débiles para nuestra clase de ecuaciones de Schrödinger tiempo-espacio fraccionario no lineal tipo Hartree, [20, 31, 73]:

$$\begin{cases} i^\alpha \mathbf{D}_t^\alpha u(t,x) = (-\Delta)^{s/2} u(t,x) + \lambda J_t^{1-\alpha} K_\gamma(|u|^2)(x) u(t,x), & (0,T] \times \mathbb{R}^n, \\ \qquad u(0,x) = u_0(x), \ u_0 \in H^s(\mathbb{R}^n), \end{cases} \tag{0.0.6}$$

donde $\alpha \in (0,1)$, $i^\alpha = e^{\alpha\pi i/2}$, $s \in (0,1)$, $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ son parámetros dados. Denotamos, como es usual al operador $\mathbf{D}_t^\alpha$ como la derivada fraccionaria en el sentido de Caputo de orden α, $J_t^{1-\alpha}$ corresponde a la integral fraccionaria en el sentido de Riemann-Liouville de orden $1-\alpha$, $(-\Delta)^{s/2}$ denota el operador Laplaciano fraccionario definido por su símbolo no clásico $|\xi|^s$ sobre $\mathbb{R}^n$, $u \mapsto G(u) := K_\gamma(|u|^2)u$

corresponde al operador no lineal tipo Hartree, donde el término K_γ es definido por convolución,

$$K_\gamma(|u|^2)(x) := (\psi_\gamma * |u|^2)(x), \ u \in L^p(\mathbb{R}^n), p \geq 1,$$

donde $\psi_\gamma(x) := \dfrac{\psi(x)}{|x|^\gamma}$, $\gamma \in (0,n)$, $\psi \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ con cierta hipótesis de crecimiento. Los modelos de ecuaciones que se enmarcan en nuestro problema no lineal (0.0.6) en el caso límite $\alpha = 1$, y aplicaciones $\psi(\cdot)$ particulares. Corresponden, a estudios desarrollados por los autores Lenzmann, E. & Fröhlich, J., en el año 2007 con respecto a una clase de ecuaciones de Schrödinger espacio-fraccionaria con una no linealidad particular tipo Hartree, [23, 48]:

$$\begin{cases} iu_t(t,x) = (\sqrt{-\Delta} + V)u(t,x) - \left(\psi_1 * |u|^2\right) u(t,x) \quad (0,T) \times \mathbb{R}^3, \\ u(0,x) = u_0(x), \ u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n), \end{cases} \tag{0.0.7}$$

donde $\mu \geq 0$, $\psi_1(x) = \dfrac{e^{-\mu|x|}}{|x|}$, $\sqrt{-\Delta}u = \mathcal{F}^{-1}[|\xi|\hat{u}(\xi)]$, $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ denota una energía potencial del sistema (0.0.7). Lenzmann, E. & Fröhlich, J., prueban que (0.0.7) es un problema bien planteado en el caso local y global, para $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^n)$, donde $s \geq 1/2$, [48]. Más tarde, Cho, Y. et at. en el año 2015 [15], investigan una clase más general de ecuaciones que (0.0.7), y que corresponde al caso límite $\alpha = 1$, de nuestro problema (0.0.6). Esta clase de problemas, corresponde a ecuaciones de Schrödinger espacio-fraccionario con una no linealidad tipo Hartree, descritas como

$$\begin{cases} iu_t(t,x) = (-\Delta)^{\alpha/2}u(t,x) - \left(\psi_\gamma * |u|^2\right) u(t,x), \quad \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n+1}, \\ u(0,x) = u_0(x), \end{cases} \tag{0.0.8}$$

donde $\psi_\gamma(x) := \dfrac{\psi(x)}{|x|^\gamma}$, $n \geq 2, \alpha \geq 1$, $\gamma \in (0,n)$, $0 \leq \psi \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Los autores Cho, Y. et at., prueban el buen planteo local del problema (0.0.8), para u_0 suficientemente regular. Más aún, bajo ciertas condiciones de los datos del problema es posible garantizar blows-up (colapso) de la solución en un tiempo finito, para más detalles se sugiere ver [15].
Ahora bien, debido a que estamos interesados en estudiar la existencia de solución de nuestro problema (0.0.6) deseamos responder la siguiente pregunta: ¿Cuáles son las condiciones suficientes de solubilidad de (0.0.6) en términos del dato inicial u_0 y el operador no lineal $u \mapsto G(u) = K_\gamma(|u|^2)u$ para cierto γ, de modo de garantizar existencia, unicidad y regularidad de soluciones débiles al menos de forma local?.
En este capítulo, nuestro objetivo es proporcionar una respuesta precisa a está interrogante, la cual lograremos argumentar por medio de una serie de lemas asociados a la aplicación $u \mapsto K_\gamma(|u|^2)$ y usando el Teorema de Punto fijo de Banach, es decir, descubrimos condiciones apropiadas de los parámetros α, s, γ, n junto a estimaciones de $u \mapsto K_\gamma(|u|^2)$, $u \mapsto G(u)$ y u_0 apropiado nos permitirán garantizar la existencia y unicidad de solución débil de (0.0.6). Más aún, la representación implícita de u asociada a

nuestro problema (0.0.4) posee la siguiente representación integral,

$$u(t,x) = \mathcal{F}^{-1}[E_\alpha((-it)^\alpha|\xi|^s)\hat{u}_0(\xi)](x) + \lambda(-i)^\alpha \int_0^t \mathcal{F}^{-1}[E_\alpha((-i(t-\tau))^\alpha|\xi|^s)\mathcal{F}G(u)(\tau)(\xi)](x)d\tau \quad (0.0.9)$$

donde $\lambda \neq 0$; $E_\alpha(\cdot)$ denota la función de Mittag-Leffler de orden α; $\mathcal{F}, \mathcal{F}^{-1}$ corresponden a la transformada de Fourier y Fourier inverso en el sentido de las distribuciones temperadas $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Finalmente, en la parte culmine de nuestro trabajo se proporcionan las conclusiones obtenidas a partir de la investigación desarrollada en torno a nuestra clase de ecuaciones de Schrödinger, junto a esto se presenta un apartado de apéndice, donde se concentran resultados y definiciones clásicas empleadas a lo largo de esta investigación. Entre otros tópicos, ilustramos la derivada de orden fraccionario en el sentido de Caputo, Riemann-Liouville, funciones de Mittag-Leffler, transformada de Fourier definida en el sentido de las distribuciones temperadas, desigualdad de Hardy, desigualdad de Hardy-Littlewood-Sobolev, operador solución, entre otros resultados. Además, se adjunta las referencias bibliográficas consultadas durante el desarrollo del presente trabajo de tesis.

CAPÍTULO 1

Preliminares

En este capítulo proporcionaremos los conceptos y resultados preliminares empleados durante este trabajo de tesis, que junto al apéndice proporcionan el marco teórico apropiado para el desarrollo de nuestra investigación. En este capítulo, más precisamente describiremos la escala de espacios de Sobolov homogéneos $\dot{H}^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ junto con la escala de espacios de Sobolev no homogéneos $H^{s,p}(\mathbb{R}^n)$, subespacio de Sobolev de tipo radiales $H^s_{rad}(\mathbb{R}^n)$, resultados clásicos de incrustaciones Sobolev sobre $\mathbb{R}^n$, Teorema de multiplicador de Mikhlim, entre otros resultados de interés en esta parte inicial del trabajo. Para más detalles, se sugiere revisar e.g., [11, 12].

1.1 Espacios de Sobolev de orden fraccionario sobre $\mathbb{R}^n$

En esta sección introduciremos la noción de espacios de Sobolev de orden fraccionario $H^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ vía su caracterización en términos de la transformada de Fourier descrito como, [72]:

Definición 1.1.1. Sea $s \geq 0$, $1 \leq p \leq \infty$. El espacio de Sobolev no homogéneo $H^{s,p}$ se define por

$$H^{s,p} := H^{s,p}(\mathbb{R}^n) := \left\{ u \in L^p : \mathcal{F}^{-1}[(1+|\xi|^2)^{s/2}\mathcal{F}(u)] \in L^p \right\}, \tag{1.1.1}$$

donde denotamos el espacio de las funciones $p-$integrable como $L^p := L^p(\mathbb{R}^n)$. Note que, el espacio $H^{s,p}$ corresponde a un espacio de Banach con respecto a la siguiente norma, [72, Teorema 10.3], [11]):

$$\|u\|_{H^{s,p}} := \|\mathcal{F}^{-1}[(1+|\xi|^2)^{s/2}\mathcal{F}(u)]\|_{L^p}, \quad u \in H^{s,p}, \tag{1.1.2}$$

donde $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}^{-1}$ denotan la transformada de Fourier y la transformada de Fourier inversa sobre $\mathbb{R}^n$ en el sentido de las distribuciones temperadas $\mathcal{S}'$, se sugiere revisar apéndice A parte (A.3.7).

Para una mayor precisión de la expresión (1.1.1), deseamos señalar que $f_s := (1 + |\cdot|^2)^{s/2} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ y que la función f_s posee un crecimiento a lo más polinomial en infinito, y debido a que $u \in L^p \subseteq \mathcal{S}'$, luego se concluye que $\mathcal{F}(u) \in \mathcal{S}'$. De este modo, el producto de una función por una distribución temperada $f_s\mathcal{F}(u) \in \mathcal{S}'$ está bien definido, ver [30, Definición 2.3.15,(2.3.16)]. Luego, empleando la Proposición A.3.4, se concluye que $\mathcal{F}^{-1}[f_s\mathcal{F}(u)] \in \mathcal{S}'$. Note que, en nuestra escala de espacios (1.1.1) estamos interesados en los elementos $u \in L^p$, de modo que $\mathcal{F}^{-1}[f_s\mathcal{F}(u)] \in L^p \subseteq \mathcal{S}'$, para cada $s \geq 0, 1 \leq p \leq \infty$.

Note que, para $s = 0$ en la Definición 1.1.1, es directo que $H^{s,p} = H^{0,p} = L^p$, para cada $1 \leq p \leq \infty$. En lo que sigue, se define el operador pseudo-diferencial $(I - \Delta)^{s/2}$ sobre $\mathbb{R}^n$ como, [11, 12]:

$$(I - \Delta)^{s/2}u := \mathcal{F}^{-1}[(1 + |\xi|^2)^{s/2}\mathcal{F}(u)], \quad u \in H^{s,p}, s > 0. \tag{1.1.3}$$

Luego, la norma descrita en (1.1.2) se puede interpretada a partir de (1.1.3) como

$$\|u\|_{H^{s,p}} = \|(I - \Delta)^{s/2}u\|_{L^p},$$

donde $u \in H^{s,p}$, para $s \geq 0, 1 < p < \infty$.

Definición 1.1.2. Sea $s \geq 0, 1 \leq p \leq \infty$. El espacio de Sobolev homogéneo $\dot{H}^{s,p}$ se define como

$$\dot{H}^{s,p} := \dot{H}^{s,p}(\mathbb{R}^n) := \left\{u \in L^p : \mathcal{F}^{-1}[|\xi|^s\mathcal{F}(u)] \in L^p\right\}. \tag{1.1.4}$$

El espacio $\dot{H}^{s,p}$ corresponde a un espacio seminormado, con respecto a la seminorma

$$\|u\|_{\dot{H}^{s,p}} := \|\mathcal{F}^{-1}[|\xi|^s\mathcal{F}(u)]\|_{L^p}, \quad u \in \dot{H}^{s,p}. \tag{1.1.5}$$

Observación 1.1.3. Note que, a partir de la seminorma (1.1.5) se desprende que si $\|u\|_{\dot{H}^{s,p}} = 0$ si y sólo si $\mathrm{supp}(\mathcal{F}(u)) = \{0\}$, $u \in \dot{H}^{s,p} \subseteq \mathcal{S}'$, lo cual es equivalente a señalar que la distribución u se reduce sólo a polinomios en $n-$variables.

Denotamos en lo que sigue al espacio $\dot{H}^{s,2}$ como $\dot{H}^s$, donde destacamos que $\dot{H}^s$ corresponde a una escala de espacios de Hilbert si $s < n/2$. Note que, usando Parseval se tiene que $L^2 = \dot{H}^0$. En lo que sigue, estaremos interesados en ilustrar la Definición 1.1.1, para el caso $s \geq 0$ y $p = 2$, es decir, el subespacio $H^{s,2} := H^s \subseteq L^2$, donde debido al Teorema de Plancherel A.3.2 se desprende la siguiente representación del espacio, [49]:

$$\begin{aligned} H^s := H^s(\mathbb{R}^n) &:= \left\{u \in L^2 : \mathcal{F}^{-1}[(1 + |\xi|^2)^{s/2}\mathcal{F}(u)] \in L^2\right\} \\ &= \left\{u \in L^2 : \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^s|\mathcal{F}(u)(\xi)|^2 d\xi < \infty\right\}, \end{aligned} \tag{1.1.6}$$

donde $s \geq 0$. Notamos que, la escala de espacios H^s para $s \geq 0$, corresponde a una clase de espacios de

Hilbert con respecto al producto interior definido como,

$$\langle u, v\rangle_{H^s(\mathbb{R}^n)} := \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^s \mathcal{F}(u)(\xi)\overline{\mathcal{F}(v)(\xi)}d\xi, \quad u, v \in H^s. \tag{1.1.7}$$

Para verificar que el espacio $(H^s, \langle\cdot,\cdot\rangle_{H^s})$ corresponde a un espacio de Hilbert, basta con considerar la aplicación lineal $T_s : L^2 \to H^s$ definida como

$$T_s(u) := \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\hat{u}}{(1+|\xi|^2)^{s/2}}\right), \quad u \in L^2. \tag{1.1.8}$$

Luego, es directo que T_s es una aplicación lineal sobre L^2. Más aún, la aplicación T_s para $s \geq 0$ está bien definida, ya que debido al Teorema de Plancherel A.3.2 se concluye que,

$$\begin{aligned}\|T_s(u)\|^2_{H^s} &= \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^s |\mathcal{F}(T_s(u))(\xi)|^2 d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{F}(u)(\xi)|^2 d\xi,\end{aligned}$$

es finito, puesto que $u \in L^2$. Observe además que, la aplicación T_s posee como inversa la aplicación $T_s^{-1} : H^s \to L^2$ definida por: $T_s^{-1}(v) := \mathcal{F}^{-1}((1+|\xi|^2)^{s/2}\mathcal{F}(v))$, para cada $v \in H^s$. Luego, notamos adicionalmente que T_s definido por (1.1.8) conserva el producto interior entre los espacios L^2 y H^s, es decir, para cada $u_1, u_2 \in L^2$ y empleando nuevamente el Teorema de Plancherel A.3.2 se deduce que

$$\begin{aligned}\langle T_s(u_1), T_s(u_2)\rangle_{H^s} &= \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^s \mathcal{F}(T_s(u_1))(\xi)\overline{\mathcal{F}(T_s(u_2))(\xi)}d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^s \frac{\mathcal{F}(u_1)(\xi)}{(1+|\xi|^2)^{s/2}}\frac{\mathcal{F}(u_2)(\xi)}{(1+|\xi|^2)^{s/2}}d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}(u_1)(\xi)\mathcal{F}(u_2)(\xi)d\xi = \langle u_1, u_2\rangle_{L^2}.\end{aligned}$$

En consecuencia, T_s corresponde a un isomorfismo isométrico entre los espacios L^2 y H^s, luego se desprende que $(H^s; \langle\cdot,\cdot\rangle_{H^s})$ es efectivamente un espacio de Hilbert, debido a que el espacio $(L^2; \langle\cdot,\cdot\rangle_{L^2})$ lo es.

En lo que sigue, establecemos la definición de la escala de espacio de Sobolev de tipo radial (o *esféricamente simétricas*) $H^s_{rad}(\mathbb{R}^n)$ definido como,

$$H^s_{rad} := H^s_{rad}(\mathbb{R}^n) = \{u \in H^s : u(Rx) = u(x) \ c.t.p., \text{ donde } R \in SO(n,\mathbb{R})\}, \tag{1.1.9}$$

donde $SO(n,\mathbb{R})$ denota el grupo ortogonal especial de matrices de orden n[(1)].

Note que el subespacio $H^s_{rad} \subseteq H^s$ es cerrado, luego es claro que el espacio $(H^s_{rad}; \langle\cdot,\cdot\rangle_{H^s})$ corresponde a un espacio de Hilbert con el producto interno descrito por (1.1.7).

[(1)] El grupo ortogonal especial de matrices de orden n es definido como $SO(n,\mathbb{R}) := O(n) \cap SL(n,\mathbb{R}) = \{R \in SL(n,\mathbb{R}) : R^t R = I_n\}$, donde $O(n)$ denota el grupo ortogonal de orden n y $SL(n,\mathbb{R})$ corresponde al grupo especial de orden n.

Ahora, nos concentraremos en describir algunos resultados de interés necesarios para posteriores discusiones en los subsecuentes capítulos. Iniciamos con un resultado de incrustación continua de H^s sobre el espacio de funciones continuas acotadas, $C_b(\mathbb{R}^n)$, previo que $s > n/2$.

Proposición 1.1.4. *Sea $s > n/2$, entonces la inclusión $H^s \hookrightarrow C_b$ es continua.*

Para la demostración de la Proposición 1.1.4, ver e.g., Proposición 1.3 en Taylor [65].

El siguiente resultado asociado a inclusión de Sobolev y densidad del espacio de Schwartz sobre $\mathbb{R}^n$, es de utilidad en la Observación 1.1.6, expresión (1.1.10), entre otros resultados a lo largo de este trabajo. Notamos que, debido a la importancia del presente teorema presentaremos un bosquejo de la demostración, se sugiere ver e.g., [11, Teorema 6,2,3].

Teorema 1.1.5. *Suponga que $s_1 \leq s_2$, $1 \leq p \leq \infty$, entonces*

$$H^{s_2,p} \hookrightarrow H^{s_1,p}.$$

Además, se satisface que $\overline{\mathcal{S}}^{\|\cdot\|_{s,p}} = H^{s,p}$ para $s \geq 0, 1 \leq p < \infty$.

Demostración. Sea $s_1 \leq s_2, 1 \leq p \leq \infty$. Luego, para $u \in H^{s_2,p}$ y usando (1.1.3) permite deducir que

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^{s_1,p}} &:= \|(I-\Delta)^{s_1/2}u\|_{L^p} = \|(I-\Delta)^{-\eta}(I-\Delta)^{s_2/2}u\|_{L^p} \\ &\leq C\|(I-\Delta)^{s_2/2}u\|_{L^p} = C\|u\|_{H^{s_2,p}}, \quad \eta := \frac{s_2 - s_1}{2} \geq 0, \end{aligned}$$

donde $(I-\Delta)^{-\eta}u := \mathcal{F}^{-1}[m(\xi)\mathcal{F}(u)] : L^p \to L^p$ es un operador lineal acotado, puesto que $m(\xi) := \dfrac{1}{(1+|\xi|^2)^{\eta/2}}$ corresponde a un L^p-multiplicador de Fourier sobre $\mathbb{R}^n$, se sugiere ver e.g., [30, página 449]. Ahora, demostremos la segunda parte del teorema; en efecto, para examinar la densidad del espacio de Schwartz $\mathcal{S}$ sobre $H^{s,p}$, considere $u \in H^{s,p}$, es decir, $(I-\Delta)^{s/2}u \in L^p$. Luego, debido a que el espacio de Schwartz $\mathcal{S}$ es denso sobre L^p, $\overline{\mathcal{S}}^{\|\cdot\|_p} = L^p$, podemos asegurar que existe una sucesión $\phi_n \in \mathcal{S}$ tal que

$$\|\phi_n - (I-\Delta)^{s/2}u\|_{L^p} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

En consecuencia, deducimos desde la convergencia previa sobre L^p que

$$\begin{aligned} \|\psi_n - u\|_{H^{s,p}} &:= \|(I-\Delta)^{s/2}[\psi_n - u]\|_{L^p} \\ &= \|\phi_n - (I-\Delta)^{s/2}u]\|_{L^p} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \end{aligned}$$

donde se satisface que la sucesión $\psi_n := (I-\Delta)^{-s/2}\phi_n = \mathcal{F}^{-1}[(1+|\xi|^2)^{-s/2}\mathcal{F}(\phi_n)(\xi)] \in \mathcal{S}$, puesto que $\mathcal{F}(\phi_n) \in \mathcal{S}$. ■

Observación 1.1.6. A partir de la segunda parte del Teorema 1.1.5, para $s = 0, p = 2$ se desprende que

$\overline{\mathcal{S}}^{\|\cdot\|_2} = L^2$, y debido a la cadena de contenciones: $\mathcal{S} \subseteq H^\beta \subseteq L^2$, para $\beta > 0$, se concluye que

$$\overline{H^\beta}^{\|\cdot\|_2} = L^2, \quad \beta > 0.$$

El siguiente resultado, es fundamental en nuestra cadena de incrustaciones de Sobolev obtenidas en (1.1.10).

Teorema 1.1.7. *Sea* $1 < p \leq p_1 < \infty$, $s, s_1 \geq 0$. *Suponga que* $s - \dfrac{n}{p} = s_1 - \dfrac{n}{p_1}$, *entonces se tiene que*

$$H^{s,p} \hookrightarrow H^{s_1,p_1}$$

En particular, si $1 \leq p < \infty$, $0 < s < \frac{n}{p}$, *entonces*

$$H^{s,p} \hookrightarrow L^{np/(n-sp)}.$$

Para la demostración del Teorema de incrustación 1.1.7, se sugiere ver e.g., Teorema 6.5.1 en Bergh & Löfström [11].

Observación 1.1.8. Note que, a partir del Teorema 1.1.5 para $p = 2$, $s_1 = \gamma/2$, $s_2 = s$ y desde el Teorema 1.1.7 segunda parte, para $p = 2$, $s = \gamma/2$ se concluye la siguiente cadena de inclusiones continuas sobre $\mathbb{R}^n$,

$$H^s \hookrightarrow H^{\gamma/2} \hookrightarrow L^{2n/n-\gamma}, \quad s \geq \gamma/2, \ 0 < \gamma < n. \tag{1.1.10}$$

donde $s \geq \gamma/2$, $\gamma \in (0, n)$.

En lo que sigue, presentamos la definición de L^p-multiplicador de Fourier sobre $\mathbb{R}^n$, entre otros resultados proporcionados por Bergh & Löfström en [11].

Definición 1.1.9. Sea $1 \leq p < \infty$, $m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ una aplicación acotada y medible. Se dice que m es un L^p-multiplicador de Fourier sobre $\mathbb{R}^n$ si para cada $u \in \mathcal{S}$, la aplicación $\mathcal{F}^{-1}[m(\cdot)\mathcal{F}(u)] \in L^p$ y el operador lineal

$$T_m : \mathcal{S} \subseteq L^p \to L^p, \quad T_m(u) := \mathcal{F}^{-1}[m(\cdot)\mathcal{F}(u)],$$

corresponde a un operador acotado.

Ahora, recordaremos el Teorema de multiplicadores de Mikhlin, el cual proporciona condiciones suficientes en torno a una estimación sobre el operador diferencial ∂_ξ^α de orden α actuando sobre la aplicación $m(\cdot)$, para determinar si la aplicación m corresponde a un L^p- multiplicador de Fourier sobre $\mathbb{R}^n$. Este teorema resulta fundamental en la demostración de nuestro Lema 1.1.11, se sugiere revisar el Apéndice A, sección A.3 para ver las notaciones.

Teorema 1.1.10. *(Teorema de multiplicador de Mikhlin) Sea* $m \in C^{n+2}(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ *tal que, para cada* *multi-índice $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, se satisface que*

$$|\partial_\xi^\alpha m(\xi)| \leq C_\alpha |\xi|^{-|\alpha|}, \quad \xi \neq 0,$$

para $|\alpha| \leq n+2$. Entonces, m es un L^p-multiplicador de Fourier sobre $\mathbb{R}^n$, para $1 < p < \infty$.

Para la demostración del Teorema 1.1.10, se sugiere ver e.g., Teorema 3, capítulo IV en Stein [63].

El siguiente resultado, es un lema que será de utilidad en nuestro Teorema 1.1.12. La demostración se basa esencialmente en [30, página 449].

Lema 1.1.11. *Sea $s > 0$, fijo. Entonces, la aplicación*

$$m(\xi) := \left(\frac{|\xi|^2}{1 + |\xi|^2} \right)^{s/2}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

corresponde a un L^p-multiplicador de Fourier sobre $\mathbb{R}^n$, para $1 < p < \infty$.

Demostración. Sea M una aplicación sobre $\mathbb{R}^{n+1} \backslash \{0\}$ definida como,

$$M(\xi, t) := \left(\frac{|\xi|^2}{t^2 + |\xi|^2} \right)^{s/2},$$

donde $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n, s > 0$. Luego, $M \in C^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ y corresponde a una función homogénea de grado 0, es decir, para cada $\lambda > 0$ se tiene que

$$\begin{aligned} M(\lambda\xi, \lambda t) =& \left(\frac{|\lambda\xi|^2}{(\lambda t)^2 + |\lambda\xi|^2} \right)^{s/2} \\ =& \left(\frac{\lambda^2(|\xi_1|^2 + \cdots + |\xi_n|^2)}{\lambda^2 t^2 + \lambda^2(|\xi_1|^2 + \cdots + |\xi_n|^2)} \right)^{s/2} \\ =& M(\xi, t), \quad (\xi, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \backslash \{0\}. \end{aligned} \tag{1.1.11}$$

Más aún, aplicando el operador diferencial $\partial_{(\xi,t)}^\beta$ sobre ambos lados de la identidad (1.1.11), para $\beta \in \mathbb{N}_0^{n+1}$ multi-índice de orden $n+1$ (ver, (A.3.2) del apéndice), se obtiene que

$$\lambda^{|\beta|} \partial_{(\xi,t)}^\beta M(\lambda\xi, \lambda t) = \partial_{(\xi,t)}^\beta M(\xi, t), \quad (\xi, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \backslash \{0\}, \tag{1.1.12}$$

donde hemos definimos el operador $\partial_{(\xi,t)}^\beta M(\xi, t) := \dfrac{\partial^{\beta_1}}{\partial \xi_1^{\beta_1}} \cdots \dfrac{\partial^{\beta_n}}{\partial \xi_n^{\beta_n}} \dfrac{\partial^{\beta_{n+1}}}{\partial t^{\beta_{n+1}}} M(\xi, t)$, para cada multi-índice $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n, \beta_{n+1}) \in \mathbb{N}_0^{n+1}$. En consecuencia, si tomamos $\lambda := \dfrac{1}{|(\xi, t)|} > 0$, la igualdad (1.1.12) nos permite deducir que

$$\begin{aligned}|\partial^{\beta}_{(\xi,t)}M(\xi,t)| &= \left(\frac{1}{|(\xi,t)|}\right)^{|\beta|}\cdot|\partial^{\beta}_{(\xi,t)}M(\lambda\xi,\lambda t)| \\ &\leq C_{\beta}|(\xi,t)|^{-|\beta|},\ (\xi,t)\in\mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\},\end{aligned} \tag{1.1.13}$$

donde $C_{\beta} := \sup_{|\theta|=1}|\partial^{\beta}M(\theta)|$, para $\theta\in\mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\}$, $|(\xi,t)| := (\xi_1^2+\cdots\xi_n^2+t^2)^{1/2}$. Luego, empleando el Teorema 1.1.10 en el caso $(n+1)$-dimensional nos permite concluir que nuestra aplicación M es un L^p-multiplicador de Fourier sobre el espacio $\mathbb{R}^{n+1}$. En particular, si consideramos el multi-índice $\beta := (\alpha,0)\in\mathbb{N}_0^{n+1}$, $\alpha\in\mathbb{N}_0^n$ en (1.1.13), se obtiene la siguiente estimación

$$|\partial^{\beta}_{(\xi,t)}M(\xi,t)| = |\partial^{(\alpha,0)}_{(\xi,t)}M(\xi,t)| \leq \frac{C_{\alpha}}{(t^2+|\xi_1|^2+\cdots+|\xi_n|^2)^{|\alpha|/2}} = \frac{C_{\alpha}}{(t^2+|\xi|^2)^{|\alpha|/2}}. \tag{1.1.14}$$

Más aún, a partir de (1.1.14) para $t=1$ se puede concluir que existe una constante no negativa C_{α}, tal que

$$\begin{aligned}|\partial^{\alpha}_{\xi}m(\xi)| = |\partial^{(\alpha,0)}_{(\xi,t)}M(\xi,1)| &\leq \frac{C_{\alpha}}{(1+|\xi|^2)^{|\alpha|/2}} \\ &\leq \frac{C_{\alpha}}{(|\xi|^2)^{|\alpha|/2}} = C_{\alpha}|\xi|^{-|\alpha|},\quad \xi\neq 0.\end{aligned}$$

Por lo tanto, se concluye desde el Teorema 1.1.10 que la función m es un L^p-multiplicador de Fourier sobre $\mathbb{R}^n$, para $1<p<\infty$. ■

El siguiente resultado, corresponde a un teorema que será de utilidad en la demostración de nuestra Proposición 4.0.12, Lema 4.0.18, Lema 4.0.19, Teorema 4.1.2, entre otros resultados. Se sugiere revisar el Apéndice A, sección A.3.

Teorema 1.1.12. *Sea $s>0$, $p\geq 1$ fijos, $u\in L^p\cap\dot{H}^{s,p}$. Suponer que $u\in\mathcal{S}'$ tal que $\widehat{u}$ se anula sobre una vecindad del origen. Entonces, existe una constante $C>0$, tal que*

$$\|u\|_{H^{s,p}} \leq C(\|u\|_{\dot{H}^{s,p}}+\|u\|_{L^p}).$$

Recíprocamente, sea $u\in H^{s,p}$, entonces existe una constante $C>0$, de modo que

$$\|u\|_{\dot{H}^{s,p}} \leq C\|u\|_{H^{s,p}}. \tag{1.1.15}$$

Para la demostración del Teorema 1.1.12, se sugiere ver e.g., Teorema 6.3.2 en Bergh & Löfström [11]. Note que, la desigualdad (1.1.15) se satisface sin el supuesto que $\hat{u}$ sea nulo en una vecindad del origen. Más precisamente, debido a la Definición 1.1.2 parte (1.1.5), expresión (1.1.3), Definición 1.1.1 parte

(1.1.2) y debido a que $m(\xi) := |\xi|^s(1+|\xi|^2)^{-s/2}$ es un L^p-multiplicador de Fourier sobre $\mathbb{R}^n$ para $1 < p < \infty$, según nuestro Lema 1.1.11. Se puede asegurar, que existe una constante no negativa C, tal que

$$\begin{aligned}\|u\|_{\dot{H}^{s,p}} &:= \|\mathcal{F}^{-1}[|\xi|^s\mathcal{F}(u)(\xi)]\|_{L^p}\\ &= \|\mathcal{F}^{-1}[|\xi|^s(1+|\xi|^2)^{-s/2}(1+|\xi|^2)^{s/2}\mathcal{F}(u)(\xi)]\|_{L^p}\\ &= \|\mathcal{F}^{-1}[m(\xi)\mathcal{F}((I-\Delta)^{s/2}u)(\xi)]\|_{L^p}\\ &\leq C\|(I-\Delta)^{s/2}u\|_{L^p}\\ &= C\|u\|_{H^{s,p}}, \quad u \in H^{s,p}.\end{aligned}$$

Ahora, denotaremos como es usual por $\Delta := \displaystyle\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ al operador Laplaciano sobre $\mathbb{R}^n, n \geq 1$. Luego, por propiedades usuales de la transformada de Fourier $\mathcal{F}$ con respecto a la derivada parcial de primer orden[(2)], y tomando $u \in \mathcal{S}$, se concluye que, [1]:

$$\mathcal{F}(-\Delta u(x))(\xi) = -\mathcal{F}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_j^2}\right)(\xi) = -\sum_{j=1}^{n}\mathcal{F}\left(\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_j^2}\right)(\xi) = |\xi|^2\mathcal{F}(u)(\xi), \tag{1.1.16}$$

donde $\xi \in \mathbb{R}^n$. De este modo, el símbolo de grado dos $|\xi|^2$ en (1.1.16) define al operador Laplaciano Δ sobre $\mathbb{R}^n$. Luego, nuestro interés es definir para $s > 0$ el operador $(-\Delta)^{s/2}$ como un operador pseudo-diferencial con el símbolo $|\xi|^s$, se sugiere ver e.g., [8, 24, 42]:

Definición 1.1.13. Sea $s > 0$ fijo. Se define el operador Laplaciano fraccionario $(-\Delta)^{s/2}$ de orden s, como un operador lineal pseudo-diferencial,

$$(-\Delta)^{s/2}u := \mathcal{F}^{-1}[|\xi|^s\mathcal{F}(u)(\xi)], \quad u \in \mathcal{D}((-\Delta)^{s/2}), \tag{1.1.17}$$

donde $|\xi|^s$ denota el símbolo no clásico asociado al operador $(-\Delta)^{s/2}$, y definimos el dominio maximal de $(-\Delta)^{s/2}$ como,

$$\begin{aligned}\mathcal{D}((-\Delta)^{s/2}) &:= \left\{u \in L^2 : \mathcal{F}^{-1}[|\xi|^s\mathcal{F}(u)(\xi)](\cdot) \in L^2\right\}\\ &= \left\{u \in L^2 : \int_{\mathbb{R}^n}|\xi|^{2s}|\mathcal{F}(u)(\xi)|^2 d\xi < \infty\right\}.\end{aligned}$$

Existen múltiples definiciones equivalentes del operador Laplaciano fraccionario sobre un dominio común, se sugiere al lector interesado revisar e.g., [42]. En un marco más general, notamos que para cada $s \in (0,2)$ el símbolo $\xi \mapsto |\xi|^s = \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2\right)^{s/2}$ empleado en (1.1.17), corresponde a un caso particular de función definida negativa continua sobre $\mathbb{R}^n$, para más detalles acerca de símbolos más generales como por ejemplo, $p(\xi) := (|\xi|^{2s} + m^2)^{1/2} - m, m \geq 0$, que definen otra clase de operador vía transformada de

---

(2) Sea $u \in \mathcal{S}$ tal que $\frac{\partial u}{\partial x_j} \in \mathcal{S}$, entonces $\mathcal{F}\left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\right)(\xi) = i\xi_j\mathcal{F}(u)(\xi),\ i := \sqrt{-1}$.

Fourier, se sugiere al lector consultar las referencias [3, 48].

Proposición 1.1.14. *Sea $s \in (0,1)$. Entonces, la norma $\|\cdot\|_{H^s}$ de H^s es equivalente a la norma del gráfico de $(-\Delta)^{s/2}$ sobre L^2, es decir,*

$$\|u\|_{(-\Delta)^{s/2}} = \|u\|_{L^2} + \|(-\Delta)^{s/2}u\|_{L^2}, \quad u \in \mathcal{D}((-\Delta)^{s/2}). \tag{1.1.18}$$

La demostración de la Proposición 1.1.14, sólo requiere de la siguiente desigualdad elemental: Para $s \in (0,1)$, se satisface que $1 + |\xi|^s \leq (1 + |\xi|^2)^{s/2} \leq C(1 + |\xi|^s)$, para alguna constante no negativa C.

Probaremos en el siguiente lema, que el dominio maximal $\mathcal{D}((-\Delta)^{s/2})$ descrito en la Definición 1.1.13 corresponde exactamente a nuestro espacio de Sobolev de orden fraccionario H^s, para cada $s > 0$.

Lema 1.1.15. *Sea $s > 0$ fijo. Entonces se satisface que,*

$$\mathcal{D}((-\Delta)^{s/2}) = H^s.$$

Más aún, el operador $(-\Delta)^s : H^s \subseteq L^2 \to L^2$ es cerrado sobre H^s.

Demostración. Debido a la definición de los espacios $H^s, \mathcal{D}((-\Delta)^{s/2})$, es directo que $H^s \subseteq \mathcal{D}((-\Delta)^{s/2})$, para $s > 0$. Luego, considerando $u \in \mathcal{D}((-\Delta)^{s/2}) \subseteq L^2$, y usando la desigualdad elemental(3), para $z = 1, w = |\xi|^2, p = s$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\|u\|_{H^s}^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^s |\mathcal{F}(u)(\xi)|^2 d\xi \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} \gamma_s (1 + |\xi|^{2s}) |\mathcal{F}(u)(\xi)|^2 d\xi \\
&= \gamma_s \left(\|u\|_2^2 + \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s} |\mathcal{F}(u)(\xi)|^2 d\xi \right),
\end{aligned}$$

es finito, puesto que $u \in \mathcal{D}((-\Delta)^{s/2})$, $\gamma_s := \text{máx}\{1, 2^{s-1}\}$. Por tanto, $\mathcal{D}((-\Delta)^{s/2}) \subseteq H^s$, para $s > 0$. En la segunda parte de la demostración, asuma que $(u_n) \in H^s$, $u_n \xrightarrow{H^s} u$ y $(-\Delta)^{s/2}u_n \xrightarrow{L^2} v$, entonces determinamos que

$$\begin{aligned}
\|u\|_{H^s}^2 &\leq \|u_n - u\|_{H^s}^2 + \|u_n\|_{H^s}^2 \\
&\leq c + \|u_n - u\|_{H^s}^2 \xrightarrow[n \to \infty]{} c,
\end{aligned}$$

(3) Suponer $p \in (0, \infty)$, $\gamma_p := \text{máx}\{1, 2^{p-1}\}$. Entonces se satisface que

$$|z \pm w|^p \leq \gamma_p (|z|^p + |w|^p), \quad z, w \in \mathbb{C}.$$

es decir, $u \in H^s$. Además, se deduce que

$$\begin{aligned} \|(-\Delta)^{s/2}u_n - (-\Delta)^{s/2}u\|_{L^2} &= \|(-\Delta)^{s/2}(u_n - u)\|_{L^2} \\ &\leq \|u_n - u\|_{H^s} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \end{aligned} \tag{1.1.19}$$

Luego, debido a la convergencia a la convergencia sobre L^2, $(-\Delta)^{s/2}u_n \xrightarrow{L^2} v$, y desde (1.1.19) se concluye que $v = \lim_{n\to\infty}(-\Delta)^{s/2}u_n = (-\Delta)^{s/2}u$, sobre L^2. Por lo tanto, el operador $(-\Delta)^{s/2}$ corresponde a un operador lineal cerrado sobre H^s. ■

Introducción el siguiente lema, el cual será de utilidad en la demostración de nuestro Lema 4.0.14 y Lema 4.0.18.

Lema 1.1.16. *Sea $\gamma \in (0, n)$, $u \in \dot{H}^{\gamma/2}$. Entonces, existe una constante no negativa $C = C_{\gamma,n}$ de modo que,*

$$\sup_{y\in\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x)|^2}{|x-y|^\gamma} dx \leq C\|u\|^2_{\dot{H}^{\gamma/2}}, \tag{1.1.20}$$

Demostración. Denotaremos el operador traslación τ_y de u por el vector $y \in \mathbb{R}^n$, como $\tau_y u(x) := u(x-y)$, de donde se desprende de forma directa que $\mathcal{F}[\tau_y u](\xi) = e^{-iy\cdot\xi}\hat{u}(\xi)$, para $\xi \in \mathbb{R}^n$. Luego, a partir de (1.1.5), se tiene que τ_y es una isometría sobre el espacio $\dot{H}^{\gamma/2}$, para $\gamma > 0$, esto es

$$\begin{aligned} \|\tau_y u\|^2_{\dot{H}^{\gamma/2}} &= \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^\gamma |\mathcal{F}(\tau_y u)(\xi)|^2 d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^\gamma |e^{-iy\cdot\xi}\mathcal{F}(u)(\xi)|^2 d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^\gamma |\mathcal{F}(u)(\xi)|^2 d\xi \\ &= \|u\|^2_{\dot{H}^{\gamma/2}}. \end{aligned} \tag{1.1.21}$$

Por consiguiente, debido a que la medida de Lebegue es invariante con respecto a la traslación sobre $\mathbb{R}^n$ y usando al Lema A.3.6 para $s = \gamma/2$ junto con la identidad (1.1.21) resulta que,

$$\begin{aligned} \sup_{y\in\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x)|^2}{|x-y|^\gamma} dx &= \sup_{y\in\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x-y)|^2}{|x|^\gamma} dx \\ &= \sup_{y\in\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{\tau_y u(x)}{|x|^{\gamma/2}} \right|^2 dy \\ &= \sup_{y\in\mathbb{R}^n} \left\| \frac{\tau_y u(\cdot)}{|\cdot|^{\gamma/2}} \right\|^2_{L^2} \\ &\leq C \sup_{y\in\mathbb{R}^n} \|\tau_y u\|^2_{\dot{H}^{\gamma/2}} \\ &= C\|u\|^2_{\dot{H}^{\gamma/2}}, \end{aligned}$$

donde $C := C_{\gamma,n} > 0$. ■

CAPÍTULO 2

Ecuación homogénea de Schrödinger tiempo-espacio fraccionario

En el presente capítulo, en una primera etapa estudiaremos condiciones que garanticen existencia, unicidad y regularidad de solución clásica global para la siguiente clase de ecuaciones de sub-difusión relativista tiempo-espacio fraccionario, [3, 10, 51, 58, 71]:

$$\begin{cases} \mathbf{D}_t^\alpha u(t,x) = -(-\Delta)^{s/2} u(t,x), & (0,\infty)\times\mathbb{R}^n \\ u(0,x) = u_0(x), & u_0 \in H^s, \end{cases} \tag{2.0.1}$$

donde $\alpha \in (0,1), s > 0,$ $\mathbf{D}_t^\alpha$ denota la derivada fraccionaria en sentido de Caputo de orden α, $-(-\Delta)^{s/2}$ corresponde al operador Laplaciano fraccionario de orden $s/2$ definido vía transformada de Fourier sobre $\mathbb{R}^n$. En este capítulo, el problema (0.0.1) será resuelto vía técnica de transformadas integrales, donde descubrimos que nuestra solución clásica u son representadas en términos de una convolución de un núcleo fundamental de orden fraccionario $G_{\alpha,s}(\cdot,\cdot)$ contra el dato inicial del problema $u_0 \in H^s$, y debido a está representación de u podemos demostrar que pertenece a una clase apropiada de espacio de sobolev H^s, con $s > 0$. Más aún, demostramos un resultado de regularidad y decaimiento de u sobre H^s, para $s > 0$, $\alpha \in (0,1)$.

Más tarde, en una segunda etapa estudiaremos condiciones suficientes para asegurar la existencia y unicidad de soluciones pertenecientes a la clase de espacios $C([0,\infty), H^s)$, para $s > 0$, asociadas a nuestro problema, [9]:

$$\begin{cases} \mathbf{D}_t^\alpha u(t,x) = (-i)^\alpha(-\Delta)^{s/2} u(t,x), & t > 0, x \in \mathbb{R}^n \\ u(0,x) = u_0(x), & u_0 \in H^s, \end{cases} \tag{2.0.2}$$

donde $(-i)^\alpha = e^{-i\alpha\pi/2}$, H^s denota el espacio de Sobolev fraccionario no homogéneo de orden $s > 0$,

$((-\Delta)^{s/2}; H^s)$ corresponde al operador Laplaciano fraccionario de orden $s/2$ con símbolo $|\xi|^s$, para $s > 0$. Además, el operador $\mathbf{D}_t^\alpha$ denota el operador diferencial fraccionario de orden α en el sentido de Caputo, con $\alpha \in (0,1)$, se sugiere al lector revisar Apéndice A, sección A.1. Note que nuestra clase de ecuaciones (2.0.2) incluyen la ecuación clásica de Schrödinger homogénea, la ecuación de Schrödinger tiempo-fraccionaria determinada por el operador $i\Delta$, entre otras ecuaciones de orden fraccionarios de interés, ver e.g., [3], [6]. Probaremos, que nuestra solución u al problema (2.0.2) pertenece al espacio de Sobolev de tipo radial H^s_{rad}, previo que $u_0 \in H^s_{rad}$, para $s > 0$.

Note que, en este capítulo se utilizará de manera frecuente algunas propiedades elementales de la transformada de Fourier en el sentido de las distribuciones temperadas $\mathcal{S}'$, se sugiere ver Apéndice A, sección A.3.

2.1 Ecuación de evolución homogénea tiempo-espacio fraccionario

En una primera etapa, el objetivo de esta sección es introducir y desarrollar los aspectos básicos acerca de la existencia, unicidad y regularidad de solución para una clase de ecuaciones de difusión relativistas, cuyo modelo matemático está descrito como, [2, 3]:

$$\begin{cases} u'(t,x) = -(-\Delta)^{s/2} u(t,x), & t > 0, x \in \mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = u_0(x), & u_0 \in L^2. \end{cases} \tag{2.1.1}$$

donde $s > 0$, $-(-\Delta)^{s/2}$ corresponde al operador Laplaciano fraccionario de orden $s/2$, definido como $-(-\Delta)^{s/2}u(t,x) := \mathcal{F}^{-1}[-|\xi|^s \mathcal{F}(u)(\xi)](x)$, para $u \in H^s$. Los argumentos empleados en está sección están basados fuertemente en las investigaciones de Arendt et. al. [1]; Prado, H. & Reyes, E. [55]. A partir de ahora, denotaremos $u(t) := u(t,\cdot)$ para $t > 0$. Luego el sistema (2.1.1) se reduce al siguiente problema,

$$\begin{cases} u'(t) = -(-\Delta)^{s/2} u(t), & t > 0 \\ u(0) = u_0, & u_0 \in L^2, \end{cases} \tag{2.1.2}$$

para $s > 0$.

El siguiente resultado, corresponde a una proposición que describe una representación pseudo-diferencial del operador resolvente de nuestro operador $-(-\Delta)^{s/2}$, para $s > 0$. Se sugiere revisar la sección 8.3 en Arent, et al. [1]. Notamos que, este resultado será de utilidad en la demostración de la Proposición 2.1.2.

Proposición 2.1.1. *Sea $s > 0$, $\lambda \in \rho(-(-\Delta)^{s/2})$, fijo. Entonces, se satisface que*

$$R(\lambda, -(-\Delta)^{s/2})u = \mathcal{F}^{-1}\left[(\lambda + |\xi|^s)^{-1}\mathcal{F}(u)(\xi)\right], \quad u \in H^s,$$

donde $R(\lambda, -(-\Delta)^{s/2})$ denota el operador resolvente de $-(-\Delta)^{s/2}$.

Demostración. Sea $h \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ fijo. Luego, se define el operador traslación por h como $\tau_h \in \mathcal{B}(L^2)$ como $\tau_h u(x) := u(x-h)$. Luego, para $u \in H^s$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\|\tau_h u\|_{H^s}^2 &:= \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^s |\mathcal{F}(\tau_h u)(\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^s |e^{-ih\cdot\xi}\mathcal{F}(u)(\xi)|^2 d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^s |\mathcal{F}(u)(\xi)|^2 d\xi = \|u\|_{H^s}^2 \quad h \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}, s > 0,
\end{aligned}$$

donde $\mathcal{F}(\tau_h u)(\xi) = e^{-ih\cdot\xi}\mathcal{F}(u)(\xi)$. En consecuencia, para cada $u \in H^s$ se obtiene $\tau_h u \in H^s$. Además, es directo que $-(-\Delta)^{s/2}$ conmuta con el operador traslación τ_h, ya que

$$\begin{aligned}
-(-\Delta)^{s/2}\tau_h u(x) &:= -(-\Delta)^{s/2} u(x-h) \\
&= -\mathcal{F}^{-1}(|\xi|^s \mathcal{F}(u)(\xi))(x-h) \\
&= -\tau_h \mathcal{F}^{-1}(|\xi|^s \mathcal{F}(u)(\xi))(x) = -\tau_h(-\Delta)^{s/2}u(x), \quad u \in H^s,
\end{aligned}$$

donde $h \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}, s > 0$. Luego, $(\lambda + (-\Delta)^{s/2})\tau_h u(x) = \tau_h(\lambda + (-\Delta)^{s/2})u(x)$, lo cual nos permite afirmar que para cada elemento $\lambda \in \rho(-(-\Delta)^{s/2})$, el operador resolvente $R(\lambda, -(-\Delta)^{s/2})$ conmuta con el operador traslación τ_h, es decir,

$$R(\lambda, -(-\Delta)^{s/2})\tau_h u(x) = \tau_h R(\lambda, -(-\Delta)^{s/2})u(x), \quad u \in H^s, \tag{2.1.3}$$

donde nuestro operador resolvente $R(\lambda, -(-\Delta)^{s/2}) \in \mathcal{B}(L^2)$. En consecuencia, debido a la Proposición A.4.1 para $T := R(\lambda, -(-\Delta)^{s/2})$ se concluye que existe un L^2-multiplicador de Fourier m_λ, tal que

$$R(\lambda, -(-\Delta)^{s/2})u(x) = \mathcal{F}^{-1}[m_\lambda(\xi)\mathcal{F}(u)(\xi)](x), \quad u \in L^2 \tag{2.1.4}$$

Por tanto, usando la igualdad (2.1.4) obtenemos para cada $\lambda \in \rho(-(-\Delta)^{s/2})$,

$$\begin{aligned}
u &= (\lambda + (-\Delta)^{s/2})R(\lambda, -(-\Delta)^{s/2})u \\
&= \lambda R(\lambda, -(-\Delta)^{s/2})u + (-\Delta)^{s/2}R(\lambda, -(-\Delta)^{s/2})u \\
&= \lambda \mathcal{F}^{-1}[m_\lambda(\xi)\mathcal{F}(u)(\xi)] + \mathcal{F}^{-1}[|\xi|^s \mathcal{F}(R(\lambda, -(-\Delta)^{s/2})u(\xi))] \\
&= \mathcal{F}^{-1}[\lambda m_\lambda(\xi)\mathcal{F}(u)(\xi)] + \mathcal{F}^{-1}[|\xi|^s m_\lambda(\xi)\mathcal{F}(u)(\xi)] = \mathcal{F}^{-1}[(\lambda + |\xi|^s)m_\lambda(\xi)\mathcal{F}(u)(\xi)],
\end{aligned}$$

luego $\mathcal{F}(u)(\xi) = (\lambda + |\xi|^s)m_\lambda(\xi)\mathcal{F}(u)(\xi)$. Así, por unicidad de la Transformada de Fourier a nivel del espacio L^2, se concluye que

$$(\lambda + |\xi|^s)m_\lambda(\xi) = 1.$$

Luego, ya que $\xi \mapsto |\xi|^s$ es continua para cada $s > 0$, y $\xi \mapsto m_\lambda(\xi)$ es acotada, se concluye que el multiplicador de Fourier $m_\lambda(\xi) = (\lambda + |\xi|^s)^{-1}$, finalmente por igualdad (2.1.4) se obtiene lo deseado. ■

El siguiente resultado prueba que la potencia fraccionaria del operador Laplaciano $-(-\Delta)^{s/2}$ para $s > 0$, genera un semigrupo de operadores $\{e^{-t(-\Delta)^{s/2}}\}_{t\geq 0}$ analítico acotado sobre L^2, el cual procuraremos describir de forma explícita en nuestra Proposición 2.1.4, se sugiere ver e.g., [38]. Denotamos, el sector angular de ángulo θ como $\Sigma_\theta := \{z \in \mathbb{C} : |\arg(z)| < \theta\}$, para $\theta \in [0, \pi)$.

Proposición 2.1.2. *Sea $s > 0$ fijo. Luego, el operador $-(-\Delta)^{s/2}$ genera un semigrupo analítico $\{T_s(t)\}_{t\geq 0}$ de operadores acotado sobre L^2, sobre el sector $\Sigma_{(1-\frac{s}{2})\frac{\pi}{2}}$, para $s \in (0, 2)$.*

Demostración. Considere $\lambda \in \sigma(-(-\Delta)^{s/2})$, esto es, $\lambda \in \mathbb{C}$ y $\ker(\lambda + (-\Delta)^{s/2}) \neq \{0\}$. Luego, para cada función u no trivial, se satisface que

$$(\lambda + (-\Delta)^{s/2})u = \lambda u + \mathcal{F}^{-1}(|\xi|^s \mathcal{F}(u)(\xi)) = 0, \ u \in H^s,$$

luego

$$(\lambda + |\xi|^s)\mathcal{F}(u)(\xi) = 0.$$

Entonces por unicidad de la transformada de Fourier $\mathcal{F}$ y definiendo $\lambda := a + bi \in \mathbb{C}$, se concluye que $a = -|\xi|^s \leq 0$, $b = 0$, i.e, $\lambda = -|\xi|^s$, luego $\sigma(-(-\Delta)^{s/2}) \subseteq \mathbb{R}_0^-$. En consecuencia, al menos $\mathbb{R}^+ \subseteq \rho(-(-\Delta)^{s/2})$. Más aún, usando la Proposición 2.1.1 y el Teorema de Plancherel A.3.2 encontramos que,

$$\begin{aligned}
\|\lambda R(\lambda, -(-\Delta)^{s/2})u\|_{L^2}^2 &= \|\lambda \mathcal{F}^{-1}[(\lambda + |\xi|^s)^{-1}\mathcal{F}(u)(\xi)]\|_{L^2}^2 \\
&= \|\lambda(\lambda + |\xi|^s)^{-1}\mathcal{F}(u)(\xi)\|_{L^2}^2 \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\lambda|^2 |\mathcal{F}(u)(\xi)|^2}{|\lambda + |\xi|^s|^2} d\xi \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{F}(u)(\xi)|^2 d\xi = \|u\|_{L^2}^2,
\end{aligned} \tag{2.1.5}$$

por tanto, $M := \sup\limits_{\Re(\lambda)>0} \|\lambda R(\lambda, -(-\Delta)^{s/2})\|_{\mathcal{B}(L^2)} \leq 1$. En consecuencia, usando la Proposición A.4.2 para $A := -(-\Delta)^{s/2}$, $X := L^2$ se tiene la primera parte del resultado. En una segunda etapa, debido a la Proposición A.4.3 para $A = \Delta, X = L^2$ el operador Laplaciano Δ sobre $\mathbb{R}^n$ corresponde al generador de un semigrupo fuertemente continuo de contracción $\{e^{t\Delta}\}_{t\geq 0}$ sobre L^2, entonces por [38, Teorema 2] para $w = \pi/2$, se tiene que el Laplaciano fraccionario $-(-\Delta)^{s/2}$ es el generador de un semigrupo $\{T_s(t)\}_{t\geq 0}$ analítico sobre el sector

$$\Sigma_{(1-\frac{s}{2})\frac{\pi}{2}} = \left\{z \in \mathbb{C} : |\arg(z)| < \left(1 - \frac{s}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right\}, \quad s \in (0, 2).$$

■

Observación 2.1.3. Para $s > 0$, por Lema 1.1.15 y Observación 1.1.6 el operador $-(-\Delta)^{s/2}$ corresponde a un operador lineal cerrado, su dominio maximal es el espacio de Sobolev H^s, y $\overline{H^s}^{\|\cdot\|_2} = L^2$, para $s > 0$.

En consecuencia, por desigualdad (2.1.5) y Proposición A.4.3 para $A = -(-\Delta)^{s/2}, s > 0$; $X = L^2$ se concluye que el operador $-(-\Delta)^{s/2}$ genera un C_0-semigrupo analítico de operadores acotado sobre L^2. Por lo tanto, encontramos que debido a la Proposición A.4.4 para $x_0 := u_0 \in L^2$ y $A = -(-\Delta)^{s/2}, s > 0$, nos permite asegurar existencia y regularidad de solución (clásica) del problema de valor inicial de primer orden (2.1.2): Sea $u_0 \in L^2$, entonces existe una única solución con la siguiente regularidad

$$u \in C^\infty((0,\infty); L^2) \cap C([0,\infty); L^2) \cap C((0,\infty); H^s),$$

al problema descrito en (2.1.2).

El siguiente resultado, representa a la familia $\{T_s(t)\}_{t\geq 0}$ semigrupo de operadores[(1)] generada por $-(-\Delta)^{s/2}$, $s > 0$, donde dicho semigrupo de operadores existe debido a la Proposición 2.1.2. Notamos además, que está proposición será de utilidad en la demostración de la Proposición 2.1.5.

Proposición 2.1.4. *Sea $s > 0$, fijo. El semigrupo de operadores $\{T_s(t)\}_{t\geq 0}$ generador por el operador $-(-\Delta)^{s/2}$ se representa como*

$$T_s(t)u_0 = (G_s(t,\cdot) * u_0), \quad t > 0, u_0 \in L^2, \tag{2.1.6}$$

donde el núcleo fundamental $G_s(\cdot,\cdot)$ está definido como

$$G_s(t,x) := \mathcal{F}^{-1}[e^{-t|\xi|^s}](x), \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^n. \tag{2.1.7}$$

Demostración. Suponer que el sistema (2.1.1) admite una solución u no trivial. Notamos que, aplicando de manera formal la transformada de Fourier $\mathcal{F}$ sobre ambos lados de (2.1.1), encontramos que

$$\begin{cases} \hat{u}_t(t,\xi) = -|\xi|^s \hat{u}(t,\xi), \\ \hat{u}(0,\xi) = \hat{u}_0(\xi), \end{cases} \tag{2.1.8}$$

donde $\mathcal{F}u(t,\xi) := \hat{u}(t,\xi)$. Luego, notamos que el sistema (2.1.8) es lineal en la variable t con incógnita la función $\hat{u}(\cdot,\xi)$, para $\xi \in \mathbb{R}^n$. Para resolver (2.1.8), basta con multiplicar por el factor integrante $\mu(t,\xi) := e^{|\xi|^s t}$ y se concluye que

$$\hat{u}(t,\xi) = e^{-|\xi|^s t}\hat{u}(0,\xi) = e^{-|\xi|^s t}\hat{u}_0(\xi).$$

Por lo tanto, $u(t,x) = \mathcal{F}^{-1}[e^{-|\xi|^s t}\mathcal{F}(u_0)(\xi)](x)$, y de este modo

$$u(t,x) = (\mathcal{F}^{-1}[e^{-|\xi|^s t}] * u_0)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} G_s(t,x-y)u_0(y)dy, \tag{2.1.9}$$

[(1)]La familia de operadores $\{T_s(t)\}_{t\geq 0}$, para $s = 1$ se conoce como semigrupo de Poisson, y para $s = 2$ se conoce como semigrupo de Gauss-Weierstrass asociado al problema de evolución, ver Arent, et al. [1, sección 3.7].

donde $G_s(t, x-y) := \mathcal{F}^{-1}[e^{-|\xi|^s t}](x-y)$.
Ahora bien, a partir de las propiedades de nuestro núcleo $G_s(t, \cdot)$ es directo que la aplicación $P_s : \mathbb{R}_+ \to \mathcal{B}(L^2)$ definida como

$$P_s(t)u_0(x) := \mathcal{F}^{-1}[e^{-|\xi|^s t}\mathcal{F}(u_0)(\xi)](x), \tag{2.1.10}$$

determina un C_0-semigrupo de operadores sobre L^2, cuyo generador corresponde al operador $-(-\Delta)^{s/2}$, para $s > 0$, es decir, se satisface que:

(i) La aplicación $P_s : \mathbb{R}_+ \to \mathcal{B}(L^2)$ definida en (2.1.10) es fuertemente continua, i.e.,

$$\lim_{t \to 0^+} P_s(t)u_0 = u_0, \quad u_0 \in L^2;$$

(ii) $P_s(0)u_0(x) = (\mathcal{F}^{-1}[1] * u_0)(x) = (\delta * u_0)(x) = u_0(x),\ x \in \mathbb{R}^n$. Notando que $1 \in L^\infty \subset \mathcal{S}'$, luego $\mathcal{F}(\delta) = 1$ en el sentido de las distribuciones temperadas $\mathcal{S}'$.

(iii) Para cada $t, \tau \geq 0$,

$$\begin{aligned} P_s(t+\tau)u_0(x) &:= \mathcal{F}^{-1}[e^{-|\xi|^s(t+\tau)}\mathcal{F}(u_0)(\xi)](x) \\ &= \mathcal{F}^{-1}[e^{-|\xi|^s t} \cdot e^{-|\xi|^s \tau}\mathcal{F}(u_0)(\xi)](x) \\ &= \mathcal{F}^{-1}[e^{-|\xi|^s t} \cdot \mathcal{F}(S(\tau)u_0)(\xi)](x) \\ &= P_s(t)(P_s(\tau)u_0)(x), \quad u_0 \in L^2. \end{aligned}$$

En consecuencia, debido a la unicidad del C_0-semigrupo de operadores $\{P_s(t)\}_{t \geq 0}$ se concluye que $P_s(t) = T_s(t)$, para $t > 0$. ■

En una segunda etapa de esta sección, estaremos interesados en estudiar la solubilidad del siguiente problema tiempo-espacio fraccionario homogéneo, para $\alpha \in (0,1)$ y $s > 0$, se sugiere revisar e.g., [2, 3, 10, 25, 60]:

$$\begin{cases} \mathbf{D}_t^\alpha\, u(t) = -(-\Delta)^{s/2}u(t), \quad t > 0 \\ \qquad u(0) = u_0 \in L^2, \end{cases} \tag{2.1.11}$$

donde $-(-\Delta)^{s/2}u := \mathcal{F}^{-1}[-|\xi|^s \hat{u}(\xi)]$, para $u \in H^s, s > 0$, denota el operador Laplaciano fraccionario de orden $s/2$, $\mathbf{D}_t^\alpha$ corresponde a la derivada fraccionaria en el sentido de Caputo de orden α.

El siguiente resultado, corresponde a una aplicación directa del Lema A.4.5, descrito por Bajlekova en [4], y resultados examinados previamente en nuestra sección 2.1, se sugiere ver [4, Teorema 2.1]. Note que, este resultado es una proposición que será de utilidad en la demostración de la Proposición 2.1.7, Proposición 2.1.9.

Proposición 2.1.5. *Sea $\alpha \in (0,1)$, $s > 0$, fijos. El operador solución $\{T_{\alpha,s}(t)\}_{t\geq 0}$ asociado al problema (2.1.11) se representa como*

$$T_{\alpha,s}(t)u_0 = (G_{\alpha,s}(t,\cdot) * u_0), \quad t > 0, u_0 \in L^2. \tag{2.1.12}$$

donde el núcleo fundamental $G_{\alpha,s}(\cdot,\cdot)$ se define como

$$G_{\alpha,s}(t,x) := \mathcal{F}^{-1}[E_\alpha(-t^\alpha|\xi|^s)](x), \tag{2.1.13}$$

donde $E_\alpha(\cdot)$ denota la función de Mittag-Leffler, $\mathcal{F}^{-1}$ se interpreta en el sentido de las distribuciones temperadas $\mathcal{S}'$.

Demostración. Suponiendo que nuestro problema (2.1.11) admite una solución u no trivial. Aplicamos la transformada de Fourier $\mathcal{F}$ (formalmente) sobre ambos lados de la ecuación (2.1.11), se obtiene que

$$\begin{cases} \mathbf{D}_t^\alpha \, \hat{u}(t,\xi) = -\,|\xi|^s \hat{u}(t,\xi), \\ \quad \hat{u}(0,\xi) = \hat{u}_0(\xi). \end{cases} \tag{2.1.14}$$

Posteriormente, aplicando la transformada de Laplace $\mathcal{L}$ (formalmente) sobre ambos del sistema (2.1.14), junto con la igualdad (A.1.19) permiten deducir que

$$z^\alpha \mathcal{L}(\hat{u})(z,\xi) - z^{\alpha-1}\hat{u}_0(\xi) = -|\xi|^s \mathcal{L}(\hat{u})(z,\xi),$$

para $\alpha \in (0,1), s > 0$. Luego, usando el Lema A.2.2 para $w = |\xi|^s$ se sigue que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\hat{u})(z,\xi) &= \frac{z^{\alpha-1}}{z^\alpha + |\xi|^s}\hat{u}_0(\xi) \\ &= \mathcal{L}\{E_\alpha(-t^\alpha|\xi|^s)\}(z)\hat{u}_0(\xi) \\ &= \mathcal{L}\{E_\alpha(-t^\alpha|\xi|^s)\hat{u}_0(\xi)\}(z), \end{aligned}$$

donde $\Re(z) > 0$, $|z| > |\xi|^{s/\alpha}$. Luego, a partir de la unicidad de la transformada de Laplace $\mathcal{L}$, se tiene que $\hat{u}(t,\xi) = E_\alpha(-t^\alpha|\xi|^s)\hat{u}_0(\xi)$. Para despejar la función u de esta última expresión, basta con aplicar la transformada de Fourier inversa (formalmente) para concluir que,

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \mathcal{F}^{-1}[E_\alpha(-t^\alpha|\xi|^s)\mathcal{F}(u_0)(\xi)](x) = [\mathcal{F}^{-1}(E_\alpha(-t^\alpha|\xi|^s)) * u_0](x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} G_{\alpha,s}(t,x-y)u_0(y)dy, \end{aligned} \tag{2.1.15}$$

donde $G_{\alpha,s}(t,x) := \mathcal{F}^{-1}[E_\alpha(-t^\alpha|\xi|^s)](x)$. En lo que sigue, denotamos $P_{\alpha,s}(t)u_0(x) := u(t,x)$. Es directo que, a partir de las propiedades de nuestro núcleo $G_{\alpha,s}(\cdot,\cdot)$ que la familia de operadores $\{P_{\alpha,s}(t)\}_{t\geq 0}$ es fuertemente continuo sobre L^2; $P_{\alpha,s}(0) = I$; $P_{\alpha,s}(t)(H^s) \subseteq H^s$ y se satisface que

$$-(-\Delta)^{s/2} P_{\alpha,s}(t) u_0 = -P_{\alpha,s}(t)(-\Delta)^{s/2} u_0, \quad u_0 \in H^s, t \geq 0.$$

Más aún, debido a la representación (2.1.15), identidad (A.2.3) para $w = -|\xi|^s$ se desprende que el operador $P_{\alpha,s}(t)u_0$ satisface la ecuación integral asociada a nuestro problema (2.1.11) para $u_0 \in H^s$, esto es,

$$\begin{aligned}
u(t,x) - u_0(x) &= \mathcal{F}^{-1}[E_\alpha(-t^\alpha |\xi|^s)\hat{u}_0(\xi)] - u_0(x) \\
&= \mathcal{F}^{-1}[(E_\alpha(-t^\alpha |\xi|^s) - 1)\hat{u}_0(\xi)](x) \\
&= -\mathcal{F}^{-1}[|\xi|^s J_t^\alpha E_\alpha(-t^\alpha |\xi|^s)\hat{u}_0(\xi)](x) \\
&= -J_t^\alpha \mathcal{F}^{-1}[|\xi|^s \hat{u}(t,\xi)](x) \\
&= -J_t^\alpha (-\Delta)^{s/2} u(t,x), \quad t \geq 0, x \in \mathbb{R}^n.
\end{aligned}$$

De este modo, se concluye que la familia $\{P_{\alpha,s}(t)\}_{t\geq 0}$ define un operador solución para (2.1.11) sobre el espacio L^2.

En una segunda parte de la demostración, note que usando la Proposición 2.1.2 y Proposición 2.1.4 conocemos que el problema de primer orden $u'(t) = -(-\Delta)^{s/2}u(t)$, $u(0) = u_0 \in L^2$ admite un C_0-semigrupo de operadores $\{T_s(t)\}_{t\geq 0}$ definidos por la igualdad (2.1.6) de la Proposición 2.1.4. Luego, debido al principio de subordinación descrito por el Lema A.4.5 para $A = -(-\Delta)^{s/2}$ se concluye que nuestro problema (2.1.11) de orden α, admite un operador solución $\{T_{\alpha,s}(t)\}_{t\geq 0}$. De este modo, debido a la unicidad del operador solución se tiene que

$$T_{\alpha,s}(t) = P_{\alpha,s}(t) = (G_{\alpha,s}(t,\cdot) * u_0), \quad t \geq 0.$$

■

Una vez que hemos determinado la existencia, unicidad y representación del operador solución asociado a nuestro problema (2.1.11). A partir de ahora, estaremos interesados en determinar condiciones que garanticen la existencia de una solución fuerte de (2.1.11), donde solución fuerte es una solución de nuestro problema que tiene mayor regularidad que la obtenida hasta el momento, para conseguir esto disponemos de la siguiente definición, ver e.g., [5, 10]:

Definición 2.1.6. Sea $\alpha \in (0,1), s > 0$, $u_0 \in H^s$ fijos. Una función $u \in C([0,\infty); L^2)$, es una solución fuerte del problema (2.1.11), si $u \in C([0,\infty); H^s)$; $J^{1-\alpha}u \in C^1((0,\infty); L^2)$, y la función u satisface el problema (2.1.11) para $(t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^n$.

Note que, a partir de la Definición A.1.5, Definición A.1.9 y la identidad (A.1.16) se concluye que la condición $J_t^{1-\alpha}u \in C^1((0,\infty); L^2)$ de la Definición 2.1.6 es equivalente a solicitar que $\mathbf{D}_t^\alpha u \in C((0,\infty); L^2)$.

La siguiente proposición nos permite asegurar existencia y unicidad global de solución fuerte a nuestro problema tiempo-espacio fraccionario (2.1.11), siempre que la condición inicial $u_0 \in H^s$, para $s > 0$, se sugiere ver [2, Proposición 1]. Note que, está proposición será de utilidad en la Proposición 2.1.9.

Proposición 2.1.7. *Sea* $\alpha \in (0,1)$, $s > 0$, $u_0 \in H^s$, *fijos. Entonces,*

$$u(t,x) = T_{\alpha,s}(t)u_0(x) = \mathcal{F}^{-1}[E_\alpha(-t^\alpha|\xi|^s)\mathcal{F}(u_0)(\xi)](x)$$

representa la única solución fuerte de (2.1.11) sobre la semi-recta $[0,\infty)$.

Demostración. Dado $\alpha \in (0,1)$, $s > 0$ fijos. Debido a la Proposición 2.1.5, el operador solución tiene la siguiente representación

$$u(t,x) = T_{\alpha,s}(t)u_0(x) = \mathcal{F}^{-1}[E_\alpha(-t^\alpha|\xi|^s)\mathcal{F}(u_0)(\xi)](x), \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^n. \tag{2.1.16}$$

Luego, por Proposición 2.1.5 la familia de operadores $\{T_{\alpha,s}(t)\}_{t\geq 0}$ es fuertemente continua sobre $[0,\infty)$, $u_0 \in H^s$ entonces $T_{\alpha,s}(t)(H^s) \subseteq H^s$, y

$$u \in C([0,\infty); H^s).$$

En una segunda etapa de la demostración, a partir de (2.1.16) y debido a que $\{T_{\alpha,s}(t)\}_{t\geq 0}$ representa un operador solución se satisface que

$$\begin{aligned} J_t^{1-\alpha}(u(t,x) - u_0(x)) &= J_t^{1-\alpha}(T_{\alpha,s}(t)u_0(x) - u_0(x)) \\ &= -J_t^{1-\alpha}J_t^{\alpha}(-\Delta)^{s/2}T_{\alpha,s}(t)u_0(x) \\ &= -J_t^{1}(-\Delta)^{s/2}T_{\alpha,s}(t)u_0(x) \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned} \tag{2.1.17}$$

Luego, diferenciando (2.1.17) con respecto a la variable temporal t se tiene que,

$$D_t^1 J_t^{1-\alpha}(u(t,x) - u_0(x)) = -D_t^1 J_t^1(-\Delta)^{s/2}T_{\alpha,s}(t)u_0(x) = -(-\Delta)^{s/2}T_{\alpha,s}(t)u_0(x),$$

así para $u_0 \in H^s$ se concluye que,

$$\begin{aligned} D_t^1 J_t^{1-\alpha}u(t,x) &= -T_{\alpha,s}(t)(-\Delta)^{s/2}u_0(x) + D_t^1 J_t^{1-\alpha}u_0(x) \\ &= -T_{\alpha,s}(t)(-\Delta)^{s/2}u_0(x) + \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t \tau^{-\alpha}d\tau u_0(x)\right] \\ &= -T_{\alpha,s}(t)(-\Delta)^{s/2}u_0(x) + \frac{d}{dt}\left[\frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)(1-\alpha)}u_0(x)\right] \\ &= -T_{\alpha,s}(t)(-\Delta)^{s/2}u_0(x) + \frac{t^{-\alpha}u_0(x)}{\Gamma(1-\alpha)}, \quad t > 0. \end{aligned}$$

Luego, debido a que la familia de operadores $\{T_{\alpha,s}(t)\}_{t\geq 0}$ es continua sobre $[0,\infty)$ y la función real $\tau(t) := t^{-\alpha}$ es continua sobre $(0,\infty)$, se concluye que $D_t^1 J_t^{1-\alpha}u \in C((0,\infty); L^2)$.

Finalmente, debemos verificar que nuestra solución u satisface efectivamente el problema (2.1.11) sobre $(0,\infty)\times\mathbb{R}^n$. Para esto, usando la identidad (A.1.16) y el Teorema A.1.7 para $(-\Delta)^{s/2}T_{\alpha,s}(t)u_0$ se tiene,

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}_t^\alpha\, u(t,x) &= D_t^\alpha(u(t,x)-u_0(x))\\
&= D_t^\alpha(T_{\alpha,s}(t)u_0(x)-u_0(x))\\
&= -D_t^\alpha J_t^\alpha(-\Delta)^{s/2}T_{\alpha,s}(t)u_0(x)\\
&= -(-\Delta)^{s/2}T_{\alpha,s}(t)u_0(x) = -(-\Delta)^{s/2}u(t,x), \quad t>0, x\in\mathbb{R}^n.
\end{aligned}$$

En consecuencia, $u=T_{\alpha,s}(\cdot)u_0$ representa una solución fuerte a nuestro problema (2.1.11), para $u_0\in H^s$. Además, debido a la unicidad del operador solución asociado a (2.1.11), se desprende la unicidad de la solución fuerte u. ■

Observación 2.1.8. (i) Sea $\alpha\in(0,1)$, $s>0$, $u_0\in H^s$ fijos. Suponiendo que u solución fuerte del problema (2.1.11) satisface que u, $\mathbf{D}_t^\alpha\, u\in AC((0,T);L^2)$ entonces debido a (A.1.13), y Teorema A.1.11 para u', se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}_t^{1-\alpha}\ \mathbf{D}_t^\alpha\, u(t) &= \mathbf{D}_t^{1-\alpha}\ J_t^{1-\alpha}u'(t)\\
&= u'(t), \quad t>0.
\end{aligned} \tag{2.1.18}$$

Luego, aplicando el operador diferencial fraccionario $\mathbf{D}_t^{1-\alpha}$ sobre ambos lados de nuestro problema (2.1.11), junto con la identidad (2.1.18), se obtiene que

$$u'(t) = -\,\mathbf{D}_t^{1-\alpha}(-\Delta)^{s/2}u(t), \quad u(0)=u_0. \tag{2.1.19}$$

A partir de (2.1.19), se concluye que si u es una solución fuerte de (2.1.11), tal que $u\in AC((0,T);L^2)$, entonces u corresponde a una función diferenciable sobre la semi-recta $(0,\infty)$.

(ii) Note que, a partir del núcleo fundamental (2.1.13) junto con la Proposición A.2.1 para $\alpha\in(0,1)$, $x:=t^\alpha|\xi|^s\geq 0$, se satisface que

$$\mathcal{F}(G_{\alpha,s}(t,\cdot))(\xi) = E_\alpha(-t^\alpha|\xi|^s) = E_\alpha(-x)\geq 0, \quad t>0, \xi\in\mathbb{R}^n. \tag{2.1.20}$$

De este modo, debido a la desigualdad (2.1.20) junto al Lema A.2.3 parte (ii) para $z=-t^\alpha|\xi|^s$, se tiene que existe una constante no negativa M tal que,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(G_{\alpha,s}(t,\cdot))(\xi) &= |\mathcal{F}(G_{\alpha,s}(t,\cdot))(\xi)|\\
&= |E_\alpha(-t^\alpha|\xi|^s)| \leq \frac{M}{t^\alpha|\xi|^s},\ t>0, \xi\in\mathbb{R}^n,
\end{aligned}$$

luego

$$\lim_{t\mapsto\infty}\mathcal{F}(G_{\alpha,s}(t,\cdot))(\xi) \leq \frac{M}{|\xi|^s}\lim_{t\mapsto\infty}\frac{1}{t^\alpha} = 0,\ \xi\in\mathbb{R}^n.$$

Por lo tanto, a partir de la desigualdad anterior se concluye que

$$\lim_{t\to\infty} E_\alpha(-t^\alpha|\xi|^s) = 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

para $\alpha \in (0,1), s > 0$.

En una segunda parte, estamos interesado en determinar el valor límite de $\mathcal{F}^{-1}[E_\alpha(-t^\alpha|\xi|^s)]$ para t cercano a cero. Para conseguir esto, notamos desde (2.1.20) y debido a la continuidad de la función de Mittag-Leffler $E_\alpha(\cdot)$ se desprende que

$$\lim_{t\mapsto 0} \mathcal{F}(G_{\alpha,s}(t,\cdot))(\xi) = \lim_{t\mapsto 0} E_\alpha(-t^\alpha|\xi|^s) = E_\alpha(0) = 1 = \mathcal{F}(\delta_0),$$

donde $\delta_0 \in \mathcal{S}'$. Luego, usando la continuidad de $\mathcal{F}$ sobre $\mathcal{S}'$, permite asegurar que nuestro núcleo

$$\mathcal{F}^{-1}[E_\alpha(-t^\alpha|\xi|^s)] \xrightarrow{\mathcal{S}'} \delta_0, \quad t \to 0 \tag{2.1.21}$$

Casos particulares de la convergencia (2.1.21), para $\alpha = s = 1$ y $\alpha = 1, s = 2$ han sido estudiados en el ejemplo 1.6 parte (iii) en Umarov, S. [69].

La siguiente proposición establece para t suficientemente grande un decaimiento a cero de nuestra solución fuerte u, descrita previamente en la Proposición 2.1.7. Este decaimiento ocurre tanto en la norma $\|\cdot\|_{H^s}$ y en la norma $\|\cdot\|_\infty$, previo que $s > n/2$.

Proposición 2.1.9. *Sea $s > 0$, $u_0 \in H^s$ fijos. Entonces, la solución fuerte del problema (2.1.11) satisface que*

$$\lim_{t\to\infty} \|u(t,\cdot)\|_{H^s} = 0. \tag{2.1.22}$$

Demostración. Dado $s > 0$, luego debido a la representación (2.1.12) de la Proposición 2.1.5 junto con el Lema A.2.3 parte (ii) para $z = -t^\alpha|\xi|^s$, existe una constante no negativa M tal que,

$$\begin{aligned} \|u(t,\cdot)\|_{H^s}^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^s |\hat{u}(t,\xi)|^s d\xi \\ &\leq M^2 \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+t^\alpha|\xi|^s)^2} (1+|\xi|^2)^s |\hat{u}_0(\xi)|^2 d\xi. \end{aligned} \tag{2.1.23}$$

Denotamos en lo que sigue, $f_t(\xi) := \dfrac{1}{(1+t^\alpha|\xi|^s)^2}(1+|\xi|^2)^s|\hat{u}_0(\xi)|^2$, luego es directo que $f_t(\xi) \to 0$ cuando $t \to \infty$, y se satisface la siguiente estimación

$$|f_t(\xi)| \leq (1+|\xi|^2)^s |\hat{u}_0(\xi)|^2 =: g(\xi),$$

donde $g \in L^1$, puesto que por hipótesis $u_0 \in H^s$. En consecuencia, calculando el límite cuando $t \mapsto \infty$ sobre ambos lados de la desigualdad (2.1.23), y empleando el Teorema de convergencia dominada de

Lebesgue, se concluye que

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} \|u(t,\cdot)\|_{H^s}^2 &\leq M^2 \lim_{t\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+t^\alpha|\xi|^s)^2}(1+|\xi|^2)^s|\hat{u}_0(\xi)|^2 d\xi \\
&\leq M^2 \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{t\to\infty} \frac{1}{(1+t^\alpha|\xi|^s)^2}(1+|\xi|^2)^s|\hat{u}_0(\xi)|^2 d\xi \\
&= 0, \quad u_0 \in H^s.
\end{aligned}$$

A partir, de esta desigualdad se tiene la expresión deseada (2.1.22). En una segunda parte, deseamos señalar que por Proposición 1.1.4 si $s > n/2$, entonces $H^s \hookrightarrow C_b$ de forma continua, luego por (2.1.22)

$$\lim_{t\to\infty} \|u(t,\cdot)\|_\infty = 0.$$

Aquí $(C_b, \|\cdot\|_\infty)$ denota el espacio de Banach de funciones continuas acotadas sobre $\mathbb{R}^n$, dotado con la norma del supremo. ■

2.2 Ecuación de Schrödinger tiempo-espacio fraccionario

En esta segunda etapa del capítulo 2, estamos interesados en realizar un estudio de la solución de una ecuación homogénea de Schrödinger tiempo-espacio fraccionario (2.0.2), conocida en la literatura como ecuación de Schrödinger tiempo-fraccionario para una "partícula libre" (en el caso que $s = 2$), ver

Definición 2.2.1. Sea $\alpha \in (0,1), s > 0$, $u_0 \in H^s$ fijos. Una función $u \in C([0,\infty); L^2)$ se llama una solución fuerte del problema

$$\begin{cases} \mathbf{D}_t^\alpha\, u(t,x) = (-i)^\alpha(-\Delta)^{s/2}u(t,x), & t > 0, x \in \mathbb{R}^n \\ u(0,x) = u_0(x), \quad u_0 \in H^s, \end{cases} \tag{2.2.1}$$

si $u \in C([0,\infty); H^s)$; $J_t^{1-\alpha}u \in C^1((0,\infty); L^2)$, y la función u satisface el problema (2.2.1) para cada $(t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^n$.

La siguiente proposición muestra la existencia, unicidad, regularidad y representación de la solución fuerte del problema (2.2.1), este resultado es basado fuertemente en [28, Teorema 3.1], ver de forma adicional [4, 22, 59]:

Proposición 2.2.2. *Sea $\alpha \in (0,1)$, $s > 0$, $u_0 \in H^s$ fijos. Entonces, existe única solución fuerte al problema (2.2.1) representada como,*

$$u(t,x) = \mathcal{F}^{-1}[E_\alpha((-it)^\alpha|\xi|^s)\hat{u}_0(\xi)](x), \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^n. \tag{2.2.2}$$

Más aún, se satisface la siguiente convergencia,

$$\lim_{t\to\infty} \|u(t,\cdot)\|_{H^s} = \frac{1}{\alpha}\|u_0\|_{H^s}. \tag{2.2.3}$$

Demostración. Fijar $s > 0$, entonces por Observación 1.1.6 y Lema 1.1.15 se conoce que $\overline{\mathcal{D}((-\Delta)^{s/2})}^{\|\cdot\|_2} = \overline{H^s}^{\|\cdot\|_2} = L^2$, y notamos que el operador $(-\Delta)^{s/2}$ es simétrico sobre L^2, es decir, usando el Teorema de Plancherel A.3.2, y considerando $u, v \in H^s$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\langle(-\Delta)^{s/2}u, v\rangle &= \langle\mathcal{F}^{-1}[|\xi|^s\mathcal{F}(u)(\xi)], v\rangle \\
&= \langle|\xi|^s\mathcal{F}(u)(\xi), \mathcal{F}(v)(\xi)\rangle \\
&= \langle\mathcal{F}(u)(\xi), |\xi|^s\mathcal{F}(v)(\xi)\rangle \\
&= \langle u, \mathcal{F}^{-1}[|\xi|^s\mathcal{F}(v)(\xi)]\rangle \\
&= \langle u, (-\Delta)^{s/2}v\rangle.
\end{aligned} \tag{2.2.4}$$

Más aún, notamos que el dominio maximal del operador adjunto $((-\Delta)^{s/2})^*$ coincide con el subespacio $\mathcal{D}((-\Delta)^{s/2}) = H^s$, es decir,

$$\mathcal{D}(((-\Delta)^{s/2})^*) := \{v \in L^2 : \text{ existe } \eta \in L^2, \langle(-\Delta)^{s/2}u, v\rangle = \langle u, \eta\rangle,\ u \in H^s\},$$

para $v \in \mathcal{D}(((-\Delta)^{s/2})^*)$ se define $((-\Delta)^{s/2})^*v := \eta$, luego por (2.2.4) se concluye que $((-\Delta)^{s/2})^*v = (-\Delta)^{s/2}v$, para $v \in H^s$. En consecuencia, se tiene que el operador lineal $(-\Delta)^{s/2}$ es autoadjunto sobre L^2. En una segunda parte, es directo que $(-\Delta)^{s/2}$ es positivo, es decir,

$$\langle(-\Delta)^{s/2}u, u\rangle = \langle|\xi|^s\mathcal{F}(u)(\xi), \mathcal{F}(u)(\xi)\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^s|\mathcal{F}(u)(\xi)|^2 d\xi = \|u\|_{H^s}^2 \geq 0,$$

para cada $u \in H^s$. Luego por Teorema 3.1 de [28], se concluye que existe una única solución fuerte al problema (2.2.1) representada como

$$u(t,x) = \mathcal{F}^{-1}\left[E_\alpha((-it)^\alpha|\xi|^s)\hat{u}_0(\xi)\right](x), \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^n.$$

En una segunda etapa, notamos que debido a la identidad (A.2.6) se tiene que

$$\frac{1}{\alpha} - \frac{|\xi|^s}{\pi}|\sin(\pi\alpha)|\left|\int_0^\infty K_\alpha(\tau,\rho,t)d\tau\right| \leq |E_\alpha((-it)^\alpha|\xi|^s)| \leq \frac{1}{\alpha} + \frac{|\xi|^s}{\pi}\left|\int_0^\infty K_\alpha(\tau,\rho,t)d\tau\right|, \tag{2.2.5}$$

donde $K_\alpha(\tau,\rho,t) = \dfrac{e^{-\tau t}\tau^{\alpha-1}}{\tau^{2\alpha} - 2\rho\tau^\alpha\cos(\pi\alpha) + \rho^2}$, para $\rho := |\xi|^s(-i)^\alpha$. Luego, tomando en la estimación (2.2.5) t tiende a infinito, se concluye que $\lim_{t\to\infty} |E_\alpha((-it)^\alpha|\xi|^s)| = \dfrac{1}{\alpha}$. Ahora, se define

$$g_t(\xi) = (1 + |\xi|^2)^s|E_\alpha((-it)^\alpha|\xi|^s)|^2|\hat{u}_0(\xi)|^2,$$

entonces es directo que $\lim\limits_{t\to\infty} g_t(\xi) = \dfrac{1}{\alpha^2}(1+|\xi|^2)^s|\hat{u}_0(\xi)|^2$. Más aún, se satisface que $|g_t(\xi)| \leq M(1+|\xi|^2)^s|\hat{u}_0(\xi)|^2$, donde $(1+|\cdot|^2)^s|\hat{u}_0(\cdot)|^2 \in L^1$, puesto que $u_0 \in H^s$. Por lo tanto, debido al teorema de convergencia dominada de Lebesgue

$$
\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} \|u(t,\cdot)\|_{H^s}^2 &= \lim_{t\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^s |\hat{u}(t,\xi)|^2 d\xi \\
&= \lim_{t\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^s |E_\alpha((-it)^\alpha|\xi|^s)|^2 |\hat{u}_0(\xi)|^2 d\xi \\
&= \lim_{t\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} g_t(\xi) d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{t\to\infty} g_t(\xi) d\xi \\
&= \frac{1}{\alpha^2}\|u_0\|_{H^s}^2.
\end{aligned}
$$

Así, la demostración de (2.2.3) ahora sigue desde la última igualdad. ■

Observación 2.2.3. Usando el Corolario A.1.12 parte (ii), y asumiendo que es posible aplicar el operador integración de Riemann-Liouville de orden α, J_t^α para cada $\alpha \in (0,1)$, sobre ambos lados de nuestro problema (2.2.1) se obtiene que

$$
u(t,x) = \left(I - (-i)^\alpha J_t^\alpha (-\Delta)^{s/2}\right)^{-1} u_0(x), \quad t>0, x \in \mathbb{R}^n, \tag{2.2.6}
$$

donde notamos que, para $u_0 \in H^s$ se tiene

$$
\begin{aligned}
\|(-\Delta)^{s/2}u\|_{L^2}^2 &= \|\mathcal{F}^{-1}[|\xi|^s \hat{u}(\xi)]\|_{L^2}^2 = \||\xi|^s\hat{u}(\xi)\|_{L^2}^2 \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s}|\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^s |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \\
&= \|u\|_{H^s}^2,
\end{aligned}
$$

por tanto, $\|(-\Delta)^{s/2}\|_{B(H^s,L^2)} \leq 1$, para $s>0$. Luego, debido al Teorema de Neumann para el operador lineal $(-i)^\alpha J_t^\alpha(-\Delta)^{s/2}$, se tiene que (2.2.6) es convergence y u puede ser representado por la serie de Neumann,

$$
u(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-i)^{\alpha k} J_t^{\alpha k} (-\Delta)^{sk/2} u_0(x), \ u_0 \in H^s. \tag{2.2.7}
$$

En consecuencia, por Definición A.1.3 para αk, (A.1.5) para $\beta = \alpha k + 1$, Definición 1.1.13 y expresión

(2.2.7) se tiene que

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \sum_{k=0}^{\infty}(-i)^{\alpha k} g_{\alpha k+1}(t)(-\Delta)^{sk/2}u_0(x) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-it)^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k+1)}(-\Delta)^{sk/2}u_0(x) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-it)^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k+1)}\mathcal{F}^{-1}[|\xi|^{sk}\hat{u}_0(\xi)](x) \\ &= \mathcal{F}^{-1}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-it)^{\alpha k}|\xi|^{sk}}{\Gamma(\alpha k+1)}\hat{u}_0(\xi)\right](x), \ \ u_0 \in H^s. \end{aligned} \tag{2.2.8}$$

Note que, la función $\xi \mapsto \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-it)^{\alpha k}|\xi|^{sk}}{\Gamma(\alpha k+1)}\hat{u}_0(\xi) = E_\alpha((-it)|\xi|^s)\hat{u}_0(\xi)$ es L^2-integrable para $u_0 \in H^s$, puesto que debido a la estimación (A.2.4), teorema de Plancherel sobre L^2, y $H^s \hookrightarrow L^2$ se desprende que

$$\begin{aligned} \|E_\alpha((-it)|\cdot|^s)\hat{u}_0(\cdot)\|_{L^2}^2 &= \int_{\mathbb{R}^n}|E_\alpha((-it)|\xi|^s)|^2|\hat{u}_0(\xi)|^2 d\xi \\ &\leq M\int_{\mathbb{R}^n}|\hat{u}_0(\xi)|^2 d\xi \\ &= M\|u_0\|_{L^2}^2 \\ &\leq M\|u_0\|_{H^s}^2, \quad u_0 \in H^s. \end{aligned} \tag{2.2.9}$$

Luego, el intercambio entre la serie y la transformada inversa $\mathcal{F}^{-1}$ en la cuarta igualdad (2.2.8) viene justificada por (2.2.9) junto con la continuidad de $\mathcal{F}^{-1}$ sobre L^2. En consecuencia, debido a la representación (2.2.8) de u notamos que coincide con la representación descrita en (2.2.2) en la Proposición 2.2.2, según (A.2.2).

Ahora, describimos una solución fuerte explícita u de nuestro problema (2.2.1), para un caso concreto de condición inicial $u_0 \in H^s$, para ciertos rango de $s > 0$. Además, notamos que no es posible considerar $u_0 = \delta_0$, debido a que la distribución $\delta_0 \notin H^s$, para $s > 0$.

Ejemplo 2.2.4. Sea $u_0(x) := e^{-|x|}$, $x \in \mathbb{R}^n$. Entonces, usando la identidad de subordinación[(2)] para $t = |x|$ e integrando con respecto a $e^{-ix\cdot\xi}dx$ se tiene que

$$\hat{u}_0(\xi) = \mathcal{F}(e^{-|x|})(\xi) = c_n\frac{1}{(1+|\xi|^2)^{(n+1)/2}}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

[(2)]La identidad de subordinación, señala que $e^{-t} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{(-y-t^2)/y}\frac{dy}{\sqrt{y}}$, para $t > 0$, se sugiere ver [30, página 118].

donde $c_n := \dfrac{\Gamma((n+1)/2)}{\pi^{(n+1)/2}}$. Luego, $u_0 \in H^s$ para $0 < s < n/2+1$, puesto que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^s |\mathcal{F}(u_0)(\xi)(\xi)|^2 d\xi &= c_n^2 \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(1+|\xi|^2)^s}{(1+|\xi|^2)^{n+1}} d\xi \\ &= c_n^2 \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|\xi|^2)^{n+1-s}} d\xi,\end{aligned}$$

es convergente(3) si y sólo si $n+1-s > n/2$. De este modo, debido a la expresión (2.2.2) de nuestra Proposición 2.2.2 se tiene la siguiente representación de la solución fuerte del problema (2.2.1),

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \mathcal{F}^{-1}\left[E_\alpha((-it)^\alpha|\xi|^s)\mathcal{F}(u_0)(\xi)\right](x) \\ &= c_n \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{E_\alpha((-it)^\alpha|\xi|^s)}{(1+|\xi|^2)^{(n+1)/2}}\right](x) \\ &= \frac{c_n}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{ix\cdot\xi}}{(1+|\xi|^2)^{(n+1)/2}} E_\alpha((-it)^\alpha|\xi|^s) d\xi \\ &= d_n\left(\int_{\mathbb{R}^n}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{ix\cdot\xi}\cos(\pi\alpha k/2)t^{\alpha k}|\xi|^{sk}}{(1+|\xi|^2)^{(n+1)/2}\Gamma(\alpha k+1)} d\xi - i\int_{\mathbb{R}^n}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{ix\cdot\xi}\sin(\pi\alpha k/2)t^{\alpha k}|\xi|^{sk}}{(1+|\xi|^2)^{(n+1)/2}\Gamma(\alpha k+1)} d\xi\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-it)^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k+1)}\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{|\xi|^{sk}}{(1+|\xi|^2)^{n+1/2}}\right](x), \end{aligned} \tag{2.2.10}$$

para $s < n/2+1, d_n := c_n/(2\pi)^n$ y donde la transformada $\mathcal{F}^{-1}$ en (2.2.10) es interpretada en el sentido de las distribuciones temperadas $\mathcal{S}'$.

En una segunda parte de nuestro ejemplo, notamos que si $u_0 := \delta_0$, luego en el sentido de las distribuciones temperadas se tiene que $\hat{u}_0 = 1 \in \mathcal{S}'$. De este modo, $u_0 \in H^s$ si y sólo si

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^s |\mathcal{F}(u_0)(\xi)(\xi)|^2 d\xi &= \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^s d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|\xi|^2)^{-s}} d\xi,\end{aligned}$$

es finito cuando $s \leq -n/2$, por tanto s debe ser negativo. En conclusión, no es posible representar una solución fuerte u descrita en la forma (2.2.2) de la Proposición 2.2.2, en el caso que la condición inicial sea la distribución delta $u_0 = \delta_0$, debido a que $u_0 \notin H^s$, para $s > 0$.

Observación 2.2.5. Sea $u_0 \in L^1 \cap H^s$, para $s > 0$, donde asumiremos que u_0 es continua en el origen de modo que $\hat{u}_0 \geq 0$. Entonces, debido al Lema A.2.3 parte (i), Lema de Fatou y la fórmula de inversión de Fourier sobre L^1, se concluye que la solución fuerte u descrita por la expresión (2.2.2) en la Proposición

(3)La integral sobre $\mathbb{R}^n$, $\int_{\mathbb{R}^n}(1+|x|^2)^{-\eta}dx$ es convergente si y sólo si $\eta > n/2$, ver Lema 1.3 en [57].

2.2.2, satisface que

$$\begin{aligned}
\|u(t,\cdot)\|_{L^\infty} &= \sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left|\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi}E_\alpha((-it)^\alpha|\xi|^s)\hat{u}_0(\xi)d\xi\right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} |E_\alpha((-it)^\alpha|\xi|^s)||\hat{u}_0(\xi)|d\xi \\
&\leq M\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}_0(\xi)|d\xi \\
&= M\int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}_0(\xi)d\xi \\
&\leq M\lim_{t\to 0}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-t|\xi|^2}\hat{u}_0(\xi)d\xi = Mu_0(0),
\end{aligned}$$

lo cual es finito, $t>0$.

En el siguiente resultados se probará que si la condición inicial u_0 en nuestro problema (2.2.1) es una función radial en el espacio de Sobolev H^s, es decir, es invariante bajo rotaciones con respecto a la variable $x\in\mathbb{R}^n$, entonces la solución fuerte descrita por la Proposición 2.2.2 también será de tipo radial.

Proposición 2.2.6. *Sea $\alpha\in(0,1)$, $s>0$, $u_0\in H^s_{rad}$ fijos. Entonces, la solución fuerte u del problema (2.2.1), satisface que*

$$u\in H^s_{rad}.$$

Demostración. Suponer que $u_0\in H^s_{rad}$, es decir, $u_0(Rx)=u_0(x)$, para $x\in\mathbb{R}^n$, $R\in SO(n)$. Primero, probaremos que la transformada de Fourier de u_0 es invariante bajo rotación R. Más precisamente, tenemos que

$$\begin{aligned}
\hat{u}_0(R\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-iR\xi\cdot y}u_0(y)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi\cdot R^{-1}y}u_0(y)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi\cdot z}u_0(Rz)dz \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi\cdot z}u_0(z)dz = \hat{u}_0(\xi),
\end{aligned}$$

donde $z:=Ry$, $|\det(R)|=1$, puesto que $R\in SO(n)$. Además, notamos que la función $\psi(\xi):=E_\alpha((-it)^\alpha|\xi|^s)\mathcal{F}(u_0)(\xi)$, es radial, pues u_0 lo es. En efecto, para cada $R\in SO(n)$, se tiene que

$$\psi(R\xi)=E_\alpha((-it)^\alpha|R\xi|^s)\mathcal{F}(u_0)(R\xi)=E_\alpha((-it)^\alpha|\xi|^s)\mathcal{F}(u_0)(\xi)=\psi(\xi).$$

Finalmente, la solución u de nuestro problema (2.2.1) es radial, ya que para cada matriz $R\in SO(n)$, se tiene que

$$
\begin{aligned}
u(t,Rx) &= \mathcal{F}^{-1}[E_\alpha((-it)^\alpha|\xi|^s)\hat{u}_0(\xi)](Rx) = \mathcal{F}^{-1}[\psi(\xi)](Rx) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{iRx\cdot\xi}\psi(\xi)d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot R^{-1}\xi}\psi(\xi)d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot w}\psi(Rw)dw \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot w}\psi(w)dw = \mathcal{F}^{-1}[\psi(\xi)](x) \\
&= \mathcal{F}^{-1}[E_\alpha((-it)^\alpha|\xi|^s)\mathcal{F}(u_0)(\xi)](x) = u(t,x).
\end{aligned}
$$

En consecuencia, $u(t,\cdot)$ es invariante bajo rotaciones. Además, es directo por la definición que, si $u_0 \in H^s$, entonces $u \in H^s$, para $s > 0$. ■

CAPÍTULO 3

Ecuación lineal de Schrödinger tiempo-espacio fraccionario

En el presente capítulo estudiaremos la solubilidad de la ecuación lineal de Schrödinger tiempo-espacio fraccionario sobre la escala de espacios de Hilbert $H^s \subseteq L^2$, para $s \in (0,1)$. Más precisamente, nuestro interés es investigar la existencia, unicidad, regularidad y la representación explícita de la solución u para el siguiente problema tiempo-espacio fraccionario no local, [6, 19, 40, 66, 67]:

$$\begin{cases} i^\alpha \, \mathbf{D}_t^\alpha \, u(t,x) = (-\Delta)^{s/2} u(t,x) + f(t,x), & (t,x) \in (0,T] \times \mathbb{R}^n \\ \qquad u(0,x) = u_0(x), & \end{cases} \tag{3.0.1}$$

donde $\alpha \in (0,1)$, $i^\alpha = e^{\alpha\pi i/2}$, $s \in (0,1)$, $(-\Delta)^{s/2}$ denota el operador Laplaciano fraccionario definido sobre su dominio maximal H^s, $\mathbf{D}_t^\alpha$ corresponde al operador diferencial fraccionario de orden α en el sentido de Caputo, $f \in L^1([0,T]; L^2)$ denota una función lineal, $u_0 \in L^2$ corresponde al dato inicial del problema.

3.1 Ecuación de Schrödinger tiempo-espacio fraccionario, caso lineal

En esta sección estudiaremos la solubilidad del problema de Schrödinger no homogéneo lineal sobre la escala de espacios de Hilbert $H^s \subseteq L^2$, para $s \in (0,1)$. Más precisamente, investigaremos existencia, unicidad y la representación explícita de soluciones del siguiente caso particular del problema (3.0.1), [19, 66]:

$$\begin{cases} i^{\alpha}\, \mathbf{D}_t^{\alpha}\, u(t,x) = (-\Delta)^{s/2} u(t,x) + f(t,x), & (0,T] \times \mathbb{R}^n. \\ \qquad u(0,x) = 0, \end{cases} \tag{3.1.1}$$

donde $\alpha \in (0,1)$, $s \in (0,1)$, $i^{\alpha} = e^{i\alpha\pi/2}$, $\mathbf{D}_t^{\alpha}$ denota el operador fraccionario en el sentido de Caputo de orden α, $(-\Delta)^{s/2}$ corresponde al operador Laplaciano de orden s, y consideramos la función lineal $f \in L^1([0,T]; L^2)$.

Comenzamos introduciendo la siguiente definición de solución fuerte asociado a nuestro problema (3.1.1).

Definición 3.1.1. Una función $u \in C([0,T]; H^s)$ se denomina solución fuerte de (3.1.1) si $g_{1-\alpha} * u \in C^1((0,T]; L^2)$, y se satisface la ecuación

$$i^{\alpha}\, \mathbf{D}_t^{\alpha}\, u(t,x) = (-\Delta)^{s/2} u(t,x) + f(t,x), \quad (0,T] \times \mathbb{R}^n, \tag{3.1.2}$$

donde $u(0,x) = 0$, $f \in C([0,T]; L^2)$.

Es necesario señalar, que en muchos caso no es posible determinar una solución fuerte de nuestra problema (3.1.1), por esto será útil determinar una noción débil de solución de (3.1.1). Para conseguir la definición de solución débil de nuestro problema, aplicamos de manera formal el operador integración J_t^{α} sobre (3.1.1), es decir, asumiendo que existe u solución fuerte de (3.1.1), y aplicando formalmente el operador integración J_t^{α} sobre ambos lados del problema (3.1.1), y empleando el Corolario A.1.12 parte (ii), nos permite obtener la siguiente ecuación integral asociada a (3.1.1),

$$u(t,x) = (-i)^{\alpha} (-\Delta)^{s/2} J_t^{\alpha} u(t,x) + (-i)^{\alpha} J_t^{\alpha} f(t,x), \quad (0,T] \times \mathbb{R}^n, \tag{3.1.3}$$

donde $(-i)^{\alpha} = e^{-i\alpha\pi/2}$, $f \in L^1([0,T]; L^2)$.
Luego, en términos de la ecuación integral (3.1.3) adoptaremos la siguiente definición de solución débil asociada a nuestro problema lineal (3.1.1), se sugiere ver [1].

Definición 3.1.2. Una función $u \in C([0,T]; L^2)$ se denomina solución débil de (3.1.1) si $g_{\alpha} * u \in H^s$, y se satisface la ecuación

$$u(t,x) = (-i)^{\alpha} (-\Delta)^{s/2} J_t^{\alpha} u(t,x) + (-i)^{\alpha} J_t^{\alpha} f(t,x), \quad (0,T] \times \mathbb{R}^n,$$

donde $f \in L^1([0,T]; L^2)$.

A continuación, describiremos una representación integral de la solución de nuestro problema (3.1.1). Más precisamente, usando la transformada de Laplace y Fourier sobre la variable temporal t y variable espacial x respectivamente en (3.1.1) junto con el Lema A.2.2 y expresión (A.1.16) derivamos una representación integral explícita de nuestra solución u. Para conseguir esto, asumir que $\alpha \in (0,1)$, $s > 0$. Luego, aplicando la transformada de Fourier sobre ambos lados de (3.1.1), permite obtener que

$$i^{\alpha}\,\mathbf{D}_t^{\alpha}\,\hat{u}(t,\xi)=|\xi|^s\hat{u}(t,\xi)+\hat{f}(t,\xi),\quad t\geq 0,\xi\in\mathbb{R}^n. \tag{3.1.4}$$

Más aún, aplicando la transformada de Laplace sobre ambos lados de (3.1.4) y usando la identidad (A.1.19) se concluye que $i^{\alpha}(z^{\alpha}\mathcal{L}\hat{u}(z,\xi)-z^{\alpha-1}\hat{u}(0,\xi))=|\xi|^s\mathcal{L}\hat{u}(z,\xi)+\mathcal{L}\hat{f}(z,\xi)$. Luego, despejando la cantidad $\mathcal{L}\hat{u}(z,\xi)$ de la ecuación anterior junto con el hecho que $u(0,x)=0$, Lema A.2.2 para $w:=(-i)^{\alpha}|\xi|^s$ con la condición que $|z|>|\xi|^{s/\alpha}$, identidad (A.1.19) para $u=\mathcal{F}(f)$ y la identidad diferencial descrita por (A.1.16) para u suficientemente regular, nos permite concluir que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\hat{u}(z,\xi)&=\frac{(-i)^{\alpha}\mathcal{L}\hat{f}(z,\xi)}{z^{\alpha}-(-i)^{\alpha}|\xi|^s}\\
&=\frac{z^{\alpha-1}}{z^{\alpha}-(-i)^{\alpha}|\xi|^s}\cdot(-i)^{\alpha}z^{1-\alpha}\mathcal{L}\hat{f}(z,\xi)\\
&=\mathcal{L}\{E_{\alpha}((-i)^{\alpha}|\xi|^s t^{\alpha})\}(z)\cdot(-i)^{\alpha}\left[\mathcal{L}\{\,\mathbf{D}_t^{1-\alpha}\,\hat{f}(t,\xi)\}(z)+\hat{f}(0,\xi)\tilde{g}_{\alpha}(z)\right]\\
&=\mathcal{L}\{E_{\alpha}((-i)^{\alpha}|\xi|^s t^{\alpha})\}(z)\cdot(-i)^{\alpha}\mathcal{L}\{\,\mathbf{D}_t^{1-\alpha}\,\hat{f}(t,\xi)+\hat{f}(0,\xi)g_{\alpha}\}(z)\\
&=\mathcal{L}\{E_{\alpha}((-it)^{\alpha}|\xi|^s)\}(z)\cdot(-i)^{\alpha}\mathcal{L}\{\,\mathrm{D}_t^{1-\alpha}\,\hat{f}(f)(t,\xi)\}(z)\\
&=(-i)^{\alpha}\mathcal{L}\left\{E_{\alpha}((-i\cdot)^{\alpha}|\xi|^s)*\mathrm{D}_t^{1-\alpha}\,\hat{f}(\cdot,\xi)\right\}(z),
\end{aligned}\tag{3.1.5}$$

donde $\mathcal{L}(g_{\alpha})(z)=z^{-\alpha}$, para $\Re(z)>0$. De este modo, debido (3.1.5) y unicidad de la transformada de Laplace se concluye que $\hat{u}$ es descrito como

$$\begin{aligned}
\hat{u}(t,\xi)&=(-i)^{\alpha}\left[E_{\alpha}((-i\cdot)^{\alpha}|\xi|^s)*\mathrm{D}_t^{1-\alpha}\,\hat{f}(\cdot,\xi)\right](t)\\
&=(-i)^{\alpha}\int_0^t E_{\alpha}((-i(t-\tau))^{\alpha}|\xi|^s)\,\mathrm{D}_{\tau}^{1-\alpha}\,\hat{f}(\tau,\xi)d\tau,
\end{aligned}\tag{3.1.6}$$

Finalmente, despejando u desde la expresión (3.1.6), se tiene la siguiente representación integral de nuestro candidato a solución,

$$u(t,x)=(-i)^{\alpha}\int_0^t\mathcal{F}^{-1}\left[E_{\alpha}((-i(t-\tau))^{\alpha}|\xi|^s)\,\mathrm{D}_{\tau}^{1-\alpha}\,\mathcal{F}(f)(\tau,\xi)\right](x)d\tau,\ t>0,x\in\mathbb{R}^n, \tag{3.1.7}$$

donde $\alpha\in(0,1)$, $\mathrm{D}_{\tau}^{1-\alpha}$ denota la derivada de Riemann-Liouville de orden $1-\alpha$, $E_{\alpha}(\cdot)$ denota la función de Mittag-Leffler de orden α. La expresión (3.1.7) nos señala que si existe solución u del problema (3.1.1), aquella solución u debe tener esta representación integral.

En la siguiente observación, deseamos representar u de la expresión (3.1.7) en una forma equivalente, la cual será de utilidad en nuestros resultados posteriores.

Observación 3.1.3. (i) Notamos que, desde la representación (3.1.6) es directo que

$$\hat{u}(t,\xi) = (-i)^\alpha(\phi * \mathrm{D}_\tau^{1-\alpha}\,\mathcal{F}(f)(\cdot,\xi))(t),$$

donde definimos $\phi(t) := E_\alpha(t^\alpha a(\xi))$, para $a(\xi) := (-i)^\alpha|\xi|^s$. Luego, la derivada de Riemann-Liouville de orden $1-\alpha$ satisface que

$$\begin{aligned}\mathrm{D}_t^{1-\alpha}\,\hat{f}(t,\xi) &:= \frac{d}{dt}(g_\alpha * \hat{f})(\cdot,\xi))(t)\\ &= g_\alpha(0)\hat{f}(t,\xi) + (g'_\alpha * \hat{f}(\cdot,\xi))(t)\\ &= (g'_\alpha * \hat{f}(\cdot,\xi))(t),\end{aligned}$$

puesto que $g_\alpha(0) = 0$, $\alpha > 0$. De esta manera, $\hat{u}$ viene expresado como una doble convolución (finita en la variable temporal),

$$\hat{u}(t,\xi) = (-i)^\alpha(\phi * \mathrm{D}_t^{1-\alpha}\,\mathcal{F}(f)(\cdot,\xi))(t) = (-i)^\alpha(\phi * g'_\alpha * \mathcal{F}(f)(\cdot,\xi))(t). \tag{3.1.8}$$

En consecuencia, por (3.1.8) la representación integral (3.1.7) es equivalente a escribir

$$u(t,x) = (-i)^\alpha\mathcal{F}^{-1}[(\phi * g'_\alpha * \mathcal{F}(f)(\cdot,\xi))(t)](x), \quad t>0, x\in\mathbb{R}^n. \tag{3.1.9}$$

(ii) Note que, aunque en el problema (3.1.1) aparece involucrada la derivada fraccionaria en el sentido de Caputo $\mathbf{D}_t^\alpha$, sin embargo la representación integral de u en (3.1.7) aparece la derivada fraccionaria en el sentido de Riemann-Liouville $\mathrm{D}_\tau^{1-\alpha}$, para $\alpha\in(0,1)$.

El siguiente resultado, es un lema que será de utilidad en la demostración de nuestra Proposición 3.1.5.

Lema 3.1.4. *Sea* $\alpha\in(0,1), s>0$. *Considere* $\phi(t) = E_\alpha(t^\alpha a(\xi))$, *entonces se satisface que*

$$J_t^1(\phi' * g'_\alpha)(t) = (\phi * g'_\alpha)(t) - g_\alpha(t) \quad t>0,$$

donde $a(\xi) := (-i)^\alpha|\xi|^s$.

Demostración. Note que $(1*\phi')(t) = \phi(t) - 1$, para $t>0$. Luego, para $\alpha\in(0,1)$, $s>0$ resulta que

$$\begin{aligned}J_t^1(\phi' * g'_\alpha)(t) &:= (1*\phi' * g'_\alpha)(t)\\ &= (\phi * g'_\alpha - 1 * g'_\alpha)(t)\\ &= (\phi * g'_\alpha)(t) - J_t^1 g'_\alpha(t)\\ &= (\phi * g'_\alpha)(t) - g_\alpha(t), \quad t>0,\end{aligned}$$

donde J_t^1 denota el operador integración de orden uno. ∎

El siguiente resultado, corresponde a una proposición que asegura la existencia de una única solución débil asociada a nuestro problema inicial (3.1.1). Dicho resultado será de utilidad en el Corolario 3.1.6 y Proposición 3.1.8.

Proposición 3.1.5. *Sea* $\alpha \in (0,1)$*,* $s \in (0,1)$*,* $f \in L^1([0,T];L^2)$*,* $\mathrm{D}_\tau^{1-\alpha} f \in C([0,T];L^2)$*,* $g_\alpha * f \in AC([0,T];L^2)$*. Entonces, existe única solución débil de (3.1.1) cuya representación integral es descrita como*

$$u(t,x) = (-i)^\alpha \int_0^t \mathcal{F}^{-1}\left[E_\alpha((-i(t-\tau))^\alpha|\xi|^s)\, \mathrm{D}_\tau^{1-\alpha}\, \mathcal{F}(f)(\tau,\xi)\right](x)d\tau, \quad [0,T]\times\mathbb{R}^n. \tag{3.1.10}$$

Demostración. Primero, demostramos que la representación descrita en (3.1.10) satisface la ecuación integral asociada a nuestro problema (3.1.1), es decir,

$$i^\alpha u(t,x) = (-\Delta)^{s/2} J_t^\alpha u(t,x) + J_t^\alpha f(t,x), \quad [0,T]\times\mathbb{R}^n, \tag{3.1.11}$$

donde $g_\alpha * u \in H^s$. Para conseguir (3.1.11), notamos que a partir de la Observación 3.1.3 parte (i), ecuación (3.1.9), se tiene que

$$\begin{aligned}(-\Delta)^{s/2} J_t^\alpha u(t,x) &= J_t^\alpha (-\Delta)^{s/2} u(t,x)\\ &= J_t^\alpha \mathcal{F}^{-1}[|\xi|^s \hat{u}(t,\xi)](x)\\ &= J_t^\alpha \mathcal{F}^{-1}[(-i)^\alpha|\xi|^s(\phi * g'_\alpha * \hat{f}(\xi))(t)](x)\\ &= J_t^\alpha \mathcal{F}^{-1}[(a(\xi)\phi * g'_\alpha * \hat{f}(\xi))(t)](x),\end{aligned} \tag{3.1.12}$$

donde $\phi(t) := E_\alpha(t^\alpha a(\xi))$, para $a(\xi) = (-i)^\alpha|\xi|^s$.

Ahora bien, en virtud de la identidad (A.2.3) para $\alpha \in (0,1)$, $w := a(\xi)$, Definición A.1.9 para $u(t) = E_\alpha(t^\alpha a(\xi))$ junto con la Definición A.1.3 para $u(t) = E'_\alpha(t^\alpha a(\xi))$, resulta que $a(\xi)\phi(t)$ es descrito como

$$\begin{aligned}a(\xi)\phi(t) = a(\xi)E_\alpha(t^\alpha a(\xi)) &= \mathbf{D}_t^\alpha\, E_\alpha(t^\alpha a(\xi))\\ &:= J^{1-\alpha} E'_\alpha(t^\alpha a(\xi)) = (g_{1-\alpha} * E'_\alpha((\cdot)^\alpha a(\xi)))(t)\\ &= (g_{1-\alpha} * \phi')(t).\end{aligned} \tag{3.1.13}$$

Luego, se desprende desde (3.1.12)-(3.1.13), Definición A.1.3 para $u(t) = (g_{1-\alpha} * \phi' * g'_\alpha * \mathcal{F}(f)(\xi))(t)$, junto con la propiedad de semigrupo (A.1.6) de $\{g_\alpha(t)\}_{t\geq 0}$, para $\alpha \in (0,1), \beta := 1-\alpha$ que

$$\begin{aligned}(-\Delta)^{s/2} J_t^\alpha u(t,x) &= J_t^\alpha \mathcal{F}^{-1}[(a(\xi)\phi * g'_\alpha * \mathcal{F}(f)(\xi))(t)](x)\\ &= J_t^\alpha \mathcal{F}^{-1}[(g_{1-\alpha} * \phi' * g'_\alpha * \mathcal{F}(f)(\xi))(t)](x)\\ &= \mathcal{F}^{-1}[(g_\alpha * g_{1-\alpha} * \phi' * g'_\alpha * \mathcal{F}(f)(\xi))(t)](x)\\ &= \mathcal{F}^{-1}[(g_1 * \phi' * g'_\alpha * \mathcal{F}(f)(\cdot,\xi))(t)](x).\end{aligned} \tag{3.1.14}$$

De este modo, debido a la expresión (3.1.14), Lema 3.1.4 y Observación 3.1.3 parte (i) concluimos que

$$\begin{aligned}
(-\Delta)^{s/2} J_t^\alpha u(t,x) + J_t^\alpha f(t,x) &= \mathcal{F}^{-1}[(g_1 * \phi' * g_\alpha' * \mathcal{F}(f)(\cdot,\xi))(t)](x) + \mathcal{F}^{-1}[g_\alpha * \mathcal{F}(f)(\cdot,\xi)](x) \\
&= \mathcal{F}^{-1}[(J^1(\phi' * g_\alpha') * \mathcal{F}(f)(\cdot,\xi)) + g_\alpha * \mathcal{F}(f)(\cdot,\xi)](x) \\
&= \mathcal{F}^{-1}[(J^1(\phi' * g_\alpha') + g_\alpha) * \mathcal{F}(f)(\cdot,\xi)](x) \\
&= \mathcal{F}^{-1}[\phi * g_\alpha' * \mathcal{F}(f)(\cdot,\xi)](x) = i^\alpha u(t,x), \quad [0,T]\times\mathbb{R}^n.
\end{aligned}$$

En consecuencia, u satisface la ecuación integral deseada. En una segunda etapa, mostramos que $u \in C([0,T];L^2)$. A partir, del Teorema de Plancherel, desigualdad de Hölder e hipótesis, se tiene que

$$\begin{aligned}
\|u(t,\cdot)\|_{L^2}^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} \left| (-i)^\alpha \int_0^t E_\alpha((-i(t-\tau))^\alpha |\xi|^s)\, \mathrm{D}_\tau^{1-\alpha} \mathcal{F}(f)(\tau,\xi) d\tau \right|^2 d\xi \\
&\leq M_T \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} |\, \mathrm{D}_\tau^{1-\alpha} \mathcal{F}(f)(\tau,\xi)|^2 d\xi d\tau \\
&= M_T \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} |\, \mathrm{D}_\tau^{1-\alpha} f(\tau,x)|^2 dx d\tau \\
&\leq M_T \|\, \mathrm{D}_\tau^{1-\alpha} f\|_{L^2}^2,
\end{aligned} \tag{3.1.15}$$

es finito, ya que $\mathrm{D}_\tau^{1-\alpha} f \in L^2$, para $t \in [0,T]$. Finalmente, estamos interesados en verificar que $J_t^\alpha u(t,\cdot) \in H^s$, para $s \in (0,1)$. Entonces, debido a la Proposición 1.1.14 aplicado a $J_t^\alpha u(t)$, se tiene que existe una constante no negativa C de modo que,

$$\|J_t^\alpha u(t)\|_{H^s} \leq C \left(\|J_t^\alpha u(t)\|_{L^2} + \|(-\Delta)^{s/2} J_t^\alpha u(t)\|_{L^2} \right), \tag{3.1.16}$$

para $s \in (0,1)$. De este modo, basta con estimar ambas cantidades del lado derecho de la desigualdad (3.1.16), para esto notamos que

$$\begin{aligned}
\|J_t^\alpha u(t)\|_{L^2}^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} |J_t^\alpha u(t,x)|^2 dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_0^t g_\alpha(t-\tau) u(\tau,x) d\tau \right|^2 dx \\
&\leq C_{\alpha,T} \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^t |u(\tau,x)|^2 d\tau dx \\
&= C_{\alpha,T} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} |u(\tau,x)|^2 dx d\tau \leq C_{\alpha,T} \left(\sup_\tau \|u(\tau)\|_{L^2} \right)^2.
\end{aligned} \tag{3.1.17}$$

Por tanto, $\|J_t^\alpha u(t)\|_{L^2} \leq C_{\alpha,T} \sup_\tau \|u(\tau)\|_{L^2}$ es finito debido a nuestra estimación (3.1.15). Ahora, deseamos estimar $\|(-\Delta)^{s/2} J_t^\alpha u(t)\|_{L^2}$, para esto considere $f \in L^1([0,T];L^2)$ junto con la ecuación (3.1.11), se deduce que

$$\begin{aligned}
\|(-\Delta)^{s/2} J_t^\alpha u(t)\|_{L^2} &= \|i^\alpha u(t) - J_t^\alpha f(t)\|_{L^2} \\
&\leq \|u(t)\|_{L^2} + \|J_t^\alpha f(t)\|_{L^2} \\
&\leq \|u(t)\|_{L^2} + C_{\alpha,T} \|f\|_{L^1([0,T];L^2)}, \quad [0,T],
\end{aligned} \tag{3.1.18}$$

es finito para $u \in C([0,T];L^2), f \in L^1([0,T];L^2)$. De este modo, a partir de (3.1.16) junto con (3.1.17)-(3.1.18), se concluye que $J_t^\alpha u(t,\cdot) \in H^s$, para $s \in (0,1)$. ∎

Deseamos notar, que en el caso particular que nuestra función lineal f del problema (3.1.1) satisface que $f(0,x) = 0$, para $x \in \mathbb{R}^n$. Entonces, se tiene que la solución débil descrita por la Proposición 3.1.5 queda en términos de la derivada en sentido de Caputo de orden $1-\alpha$, para $\alpha \in (0,1)$.

Corolario 3.1.6. *Sea* $\alpha \in (0,1), s \in (0,1)$, $f \in L^1([0,T];L^2)$, $\boldsymbol{D}_\tau^{1-\alpha} f \in C([0,T];L^2)$, $g_\alpha * f \in AC([0,T];L^2)$, $f(0,x)=0$. *Entonces, existe única solución débil de (3.1.1), cuya representación integral es descrita como*

$$u(t,x) = (-i)^\alpha \int_0^t \mathcal{F}^{-1}\left[E_\alpha((-i(t-\tau))^\alpha |\xi|^s)\, \boldsymbol{D}_\tau^{1-\alpha} \mathcal{F}(f)(\tau,\xi)\right](x)d\tau, \quad [0,T]\times\mathbb{R}^n. \tag{3.1.19}$$

Demostración. Usando la identidad (A.1.14) para $1-\alpha, \beta = 1$, se tiene que $\mathrm{D}_t^{1-\alpha} 1 = g_\alpha(t)$, para $\alpha \in (0,1)$. Entonces, debido a la expresión (A.1.16) para orden $1-\alpha$, $u(t) = \hat{f}(t,\xi)$ se desprende la siguiente igualdad diferencial

$$\begin{aligned}\mathbf{D}_t^{1-\alpha} \hat{f}(t,\xi) &= \mathrm{D}_t^{1-\alpha}\left[\hat{f}(t,\xi) - \hat{f}(0,\xi)\right] \\ &= \mathrm{D}_t^{1-\alpha} \hat{f}(t,\xi) - \hat{f}(0,\xi) g_\alpha(t) \\ &= \mathrm{D}_t^{1-\alpha} \hat{f}(t,\xi), \quad \alpha \in (0,1),\end{aligned} \tag{3.1.20}$$

donde $f(0,x) = 0$, $f(\cdot,x) \in L^1([0,T])$, $g_\alpha * f \in AC([0,T])$. Luego, a partir de la Proposición 3.1.5 y expresión (3.1.20) se tiene que la solución débil u se describe como

$$\begin{aligned}u(t,x) &= (-i)^\alpha \int_0^t \mathcal{F}^{-1}\left[E_\alpha((-i(t-\tau))^\alpha|\xi|^s)\, \mathrm{D}_\tau^{1-\alpha} \mathcal{F}(f)(\tau,\xi)\right](x)d\tau \\ &= (-i)^\alpha \int_0^t \mathcal{F}^{-1}\left[E_\alpha((-i(t-\tau))^\alpha|\xi|^s)\cdot \mathbf{D}_\tau^{1-\alpha} \mathcal{F}(f)(\tau,\xi)\right](x)d\tau.\end{aligned} \tag{3.1.21}$$

∎

El siguiente resultado, corresponde a un lema técnico requerido en la demostración de la Proposición 3.1.8.

Lema 3.1.7. *Sea* $\alpha \in (0,1)$, $f(t,\cdot) \in L^2$. *Entonces, se satisface que*

$$(g_{1-\alpha} * \mathcal{F}^{-1}[g'_\alpha * \hat{f}(\cdot,\xi)])(t) = f(t,x), \quad [0,T]\times\mathbb{R}^n.$$

Demostración. Para $\alpha \in (0,1)$, se satisface la siguiente identidad,

$$\begin{aligned}g_{1-\alpha} * g'_\alpha &= (g_{1-\alpha} * g_\alpha)' - g_{1-\alpha}(0) g_\alpha \\ &= D^1 1 = g_0 = \delta,\end{aligned}$$

donde δ denota la distribución delta. Luego, operando por la convolución (finita) de $\mathcal{F}(f)$, se desprende que

$$g_{1-\alpha} * g'_\alpha * \mathcal{F}(f)(\xi) = \delta * \mathcal{F}(f)(\xi) = \mathcal{F}(f)(\xi).$$

■

El siguiente resultado, es una proposición que asegura la existencia y unicidad de solución fuerte de nuestro problema (3.1.1).

Proposición 3.1.8. *Sea* $\alpha \in (0,1)$, $s > 0$, $g_\alpha * f \in AC([0,T]; L^2)$, $\mathrm{D}_t^{1-\alpha} f \in C([0,T], H^s)$. *Entonces, existe única solución fuerte de (3.1.1). Más aún, esta solución posee la siguiente representación integral*

$$u(t,x) = (-i)^\alpha \int_0^t \mathcal{F}^{-1}\left[E_\alpha((-i(t-\tau))^\alpha |\xi|^s)\, \mathrm{D}_\tau^{1-\alpha} \mathcal{F}(f)(\tau,\xi)\right](x) d\tau, \quad [0,T] \times \mathbb{R}^n. \tag{3.1.22}$$

Demostración. Primero, demostraremos que $u \in C([0,T]; H^s)$. Para esto, notamos desde la representación (3.1.6), desigualdad de Hölder aplicado a la variable temporal junto con estimaciones previas resulta que

$$\begin{aligned} \|u(t,\cdot)\|_{H^s}^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^s |\mathcal{F}(u)(t,\xi)|^2 d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^s \left|(-i)^\alpha \int_0^t E_\alpha((t-\tau)^\alpha a(\xi))\, \mathrm{D}_\tau^{1-\alpha} \mathcal{F}(f)(\tau,\xi) d\tau\right|^2 d\xi \\ &\le \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^s \int_0^t |E_\alpha((t-\tau)^\alpha a(\xi))|^2 d\tau \cdot \int_0^t |\,\mathrm{D}_\tau^{1-\alpha} \mathcal{F}(f)(\tau,\xi)|^2 d\tau d\xi. \end{aligned} \tag{3.1.23}$$

Luego, debido al Lema A.2.3 parte (i) para $z = (t-\tau)^\alpha a(\xi) = (-i(t-\tau))^\alpha |\xi|^s$, se deduce que existe una constante no negativa M tal que

$$\int_0^t |E_\alpha((t-\tau)^\alpha a(\xi))|^2 d\tau \le MT =: M_T, \quad \text{para } T > 0.$$

De este modo, usando (3.1.23), teorema de Fubini junto a la hipótesis que $\mathrm{D}_t^{1-\alpha} f \in C([0,T], H^s)$, obtenemos que

$$\begin{aligned} \|u(t,\cdot)\|_{H^s}^2 &\le M_T \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^s \int_0^t |\,\mathrm{D}_\tau^{1-\alpha} \mathcal{F}(f)(\tau,\xi)|^2 d\tau d\xi \\ &= M_T \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^s |\,\mathrm{D}_\tau^{1-\alpha} \mathcal{F}(f)(\tau,\xi)|^2 d\xi d\tau \\ &= M_T \int_0^t \|\,\mathrm{D}_\tau^{1-\alpha} f(\tau,\cdot)\|_{H^s}^2 d\tau \\ &\le M_T \int_0^t \sup_\tau \|\,\mathrm{D}_\tau^{1-\alpha} f(\tau,\cdot)\|_{H^s}^2 d\tau \\ &\le M_T \left(\sup_\tau \|\,\mathrm{D}_\tau^{1-\alpha} f(\tau,\cdot)\|_{H^s}\right)^2. \end{aligned}$$

Luego, se concluye que

$$\|u(t,\cdot)\|_{H^s} \leq M_T \cdot \sup_{\tau} \| \mathrm{D}_{\tau}^{1-\alpha} f(\tau,\cdot)\|_{H^s},$$

es finito, debido a que $\mathrm{D}_t^{1-\alpha} f(t,\cdot) \in H^s$.

En una segunda etapa, deseamos verificar que $g_{1-\alpha} * u \in C^1((0,T];L^2)$. Para estudiar esto, empleamos la representación de u dada en (3.1.9) de la Observación 3.1.3, propiedad de semigrupo (A.1.6) junto a la Definición A.1.3 para $u(t) = \mathcal{F}^{-1}[\phi * \mathcal{F}(f')(\cdot,\xi)(t)]$, $\alpha = 1$, para obtener que

$$\begin{aligned}(g_{1-\alpha} * u)(t) &= (-i)^{\alpha}(g_{1-\alpha} * \mathcal{F}^{-1}[\phi * g_{\alpha} * \mathcal{F}(f')(\cdot,\xi)])(t)\\ &= (-i)^{\alpha}(g_{1-\alpha} * g_{\alpha} * \mathcal{F}^{-1}[\phi * \mathcal{F}(f')(\cdot,\xi)])(t)\\ &= (-i)^{\alpha}(g_1 * \mathcal{F}^{-1}[\phi * \mathcal{F}(f')(\cdot,\xi)])(t)\\ &= (-i)^{\alpha} J_t^1 \mathcal{F}^{-1}[\phi * \mathcal{F}(f')(\cdot,\xi)(t)],\end{aligned} \tag{3.1.24}$$

donde $\phi(t) := E_{\alpha}(t^{\alpha}a(\xi))$, para $a(\xi) = (-i)^{\alpha}|\xi|^s$. Luego, derivando con respecto a la variable temporal ambos ambos lados en la expresión (3.1.24), y teniendo en consideración la definición de ϕ resulta que

$$(g_{1-\alpha} * u)'(t) = (-i)^{\alpha} D_t^1 J_t^1 \mathcal{F}^{-1}[\phi * \mathcal{F}(f')(\cdot,\xi)](t) = (-i)^{\alpha}\mathcal{F}^{-1}[\phi * \mathcal{F}(f')(\cdot,\xi)](x) \tag{3.1.25}$$

De este modo, por expresión (3.1.25), desigualdad de Hölder e hipótesis concluimos que

$$\begin{aligned}\|(g_{1-\alpha} * u)'(t)\|_{L^2}^2 &= \|(-i)^{\alpha}\mathcal{F}^{-1}[\phi * \mathcal{F}(f')(\cdot,\xi)](x)\|_{L^2}^2\\ &= \|\phi * \mathcal{F}(f')(\cdot,\xi)\|_{L^2}^2\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_0^t \phi(t-\tau)\mathcal{F}(f')(\tau,\xi)d\tau \right|^2 d\xi\\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_0^t |E_{\alpha}((-i(t-\tau))^{\alpha}|\xi|^s)|^2 d\tau \cdot \int_0^t |\mathcal{F}(f')(\tau,\xi)|^2 d\tau d\xi\\ &\leq M_T \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{F}(f')(\tau,\xi)|^2 d\xi d\tau\\ &\leq M_T \sup_{\tau} \|f'(\tau,\cdot)\|_{L^2}^2,\end{aligned}$$

es finito, ya que $f'(\tau,\cdot) \in L^2$. Finalmente, en una tercera etapa deseamos demostrar que u satisface la ecuación (3.1.2). Para conseguir esto, debemos tener en consideración la expresión (3.1.9) de la Observación 3.1.3, (3.1.13), Lema 3.1.7 lo cual permite asegurar que

$$\begin{aligned}(-\Delta)^{s/2}u(t,x) &= \mathcal{F}^{-1}[|\xi|^s \mathcal{F}(u)(t,\xi)](x)\\ &= \mathcal{F}^{-1}[a(\xi)(\phi * g'_{\alpha} * \mathcal{F}(f)(\cdot,\xi))(t)](x)\\ &= \mathcal{F}^{-1}[g_{1-\alpha} * \phi' * g'_{\alpha} * \mathcal{F}(f)(\cdot,\xi)](x)\\ &= g_{1-\alpha} * \mathcal{F}^{-1}[\phi' * g'_{\alpha} * \mathcal{F}(f)(\cdot,\xi)](x) + (g_{1-\alpha} * \mathcal{F}^{-1}[g'_{\alpha} * \mathcal{F}(f)(\cdot,\xi)])(t) - f(t,x)\\ &= \left(g_{1-\alpha} * \mathcal{F}^{-1}[g'_{\alpha} * \mathcal{F}(f)(\cdot,\xi) + (\phi' * g'_{\alpha} * \mathcal{F}(f)(\cdot,\xi))]\right)(t) - f(t,x),\end{aligned} \tag{3.1.26}$$

donde, como es usual $\phi(t) := E_\alpha(t^\alpha a(\xi))$, para $a(\xi) = (-i)^\alpha |\xi|^s$. Más aún, notamos que

$$\begin{aligned} g'_\alpha * \mathcal{F}(f)(\cdot,\xi) + (\phi' * g'_\alpha * \mathcal{F}(f)(\cdot,\xi)) =& \phi(0)(g'_\alpha * \mathcal{F}(f)(\cdot,\xi)) + (\phi' * g'_\alpha * \mathcal{F}(f)(\cdot,\xi)) \\ =& (\phi * g'_\alpha * \mathcal{F}(f)(\cdot,\xi))'. \end{aligned} \tag{3.1.27}$$

Luego, a partir de las expresiones (3.1.26)-(3.1.27), y la representación descrita de u en (3.1.9). Permite obtener que nuestra función u satisface la ecuación diferencial deseada,

$$\begin{aligned} (-\Delta)^{s/2} u(t,x) &= \left(g_{1-\alpha} * \mathcal{F}^{-1}[g'_\alpha * \mathcal{F}(f)(\cdot,\xi) + (\phi' * g'_\alpha * \mathcal{F}(f)(\cdot,\xi))]\right)(t) - f(t,x) \\ &= \left(g_{1-\alpha} * \mathcal{F}^{-1}[(\phi * g'_\alpha * \mathcal{F}(f)(\cdot,\xi))'](x)\right)(t) - f(t,x) \\ &= i^\alpha (g_{1-\alpha} * u'(\cdot,x))(t) - f(t,x) \\ &= i^\alpha J_t^{1-\alpha} u'(t,x) - f(t,x) = i^\alpha\, \mathbf{D}_t^\alpha\, u(t,x) - f(t,x), \quad [0,T] \times \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

donde $u(t,x) = (-i)^\alpha \mathcal{F}^{-1}[(\phi * g'_\alpha * \hat{f}(\cdot,\xi))(t)](x)$, esto es, u satisface $i^\alpha\, \mathbf{D}_t^\alpha\, u(t,x) = (-\Delta)^{s/2} u(t,x) + f(t,x)$, para cada $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$. En la última parte de la demostración, estamos interesados en conseguir que la representación de u en (3.1.22), satisface efectivamente que $u(0,x) = 0$, $x \in \mathbb{R}^n$. Para esto, notamos que

$$\begin{aligned} \hat{u}(0,\xi) &= \lim_{t\to 0} \hat{u}(t,\xi) \\ &= (-i)^\alpha \lim_{t\to 0} (\phi * g'_\alpha * \hat{f}(\xi))(t) \\ &= (-i)^\alpha \lim_{t\to 0} \int_0^t \phi(t-\tau)(g'_\alpha * \hat{f}(\xi))(\tau) d\tau \\ &= (-i)^\alpha \lim_{t\to 0} \int_0^T \chi_{[0,t]}(\tau)\phi(t-\tau)(g'_\alpha * \hat{f}(\xi))(\tau) d\tau. \end{aligned} \tag{3.1.28}$$

Ahora, definimos la función $K(t,\tau) := \chi_{[0,t]}(\tau)\phi(t-\tau)(g'_\alpha * \mathcal{F}(f)(\xi))(\tau)$, luego para $t \in [0,T]$ se sigue que

$$\begin{aligned} |K(t,\tau)| &= |\chi_{[0,t]}(\tau)\phi(t-\tau)(g'_\alpha * \mathcal{F}(f)(\xi))(\tau)| \\ &\leq M_T |(g'_\alpha * \mathcal{F}(f)(\xi))(\tau)|, \end{aligned}$$

donde $g'_\alpha * \hat{f}(\xi) \in L^1([0,T])$. Además, tenemos que para cada $\tau \in [0,T]$,

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0} K(t,\tau) &= \lim_{t\to 0} \chi_{[0,t]}(\tau)\phi(t-\tau)(g'_\alpha * \mathcal{F}(f)(\xi))(\tau) \\ &= \chi_{\{0\}}(\tau)\phi(-\tau)(g'_\alpha * \mathcal{F}(f)(\xi))(\tau), \end{aligned}$$

esta cantidad es finita. En consecuencia, debido al teorema de convergencia dominada junto con (3.1.28) se tiene que

$$\lim_{t\to 0} \int_0^T \chi_{[0,t]}(\tau)\phi(t-\tau)(g'_\alpha * \mathcal{F}(f)(\xi))(\tau) d\tau = \int_0^T \lim_{t\to 0} \chi_{[0,t]}(\tau)\phi(t-\tau)(g'_\alpha * \mathcal{F}(f)(\xi))(\tau) d\tau = 0,$$

es decir, $\hat{u}(0,\xi)=0$. Por tanto, es directo que $u(0,x)=0, x\in\mathbb{R}^n$. ∎

Note que, de forma análoga al Corolario 3.1.6 obtenemos en el caso particular que la función lineal f de la Proposición 3.1.8 sea nula. Entonces, se tiene el siguiente directo de la Proposición 3.1.8.

Corolario 3.1.9. *Sea $\alpha\in(0,1]$, $s>0$, $f\in AC([0,T];L^2)$, $\boldsymbol{D}_t^{1-\alpha} f\in C([0,T],H^s)$, y $f(0,x)=0, x\in\mathbb{R}^n$. Entonces, el problema de Schrödinger lineal (3.1.1) tiene única solución fuerte. Más aún esta solución posee la siguiente representación integral*

$$u(t,x)=(-i)^{\alpha}\int_0^t \mathcal{F}^{-1}\left[E_{\alpha}((-i(t-\tau))^{\alpha}|\xi|^s)\,\boldsymbol{D}_{\tau}^{1-\alpha}\hat{f}(\tau,\xi)\right](x)d\tau. \tag{3.1.29}$$

Demostración. Argumentos análogos a los empleados en el Corolario 3.1.6, permiten demostrar este resultado. ∎

El siguiente teorema, corresponde al resultado principal de este capítulo. Este resultado estudia la solubilidad de la ecuación lineal de Schrödinger tiempo-espacio fraccionario (3.0.1), donde la condición inicial u_0 no necesariamente es nula, en contraste con el problema estudiado inicialmente en (3.1.1). Más precisamente, estamos interesados en determinar condiciones suficientes que aseguren existencia, unicidad y la representación de la solución fuerte del siguiente problema lineal, [4, Teorema 3.1]:

$$\begin{cases} i^{\alpha}\,\mathbf{D}_t^{\alpha}\,u(t,x)=(-\Delta)^{s/2}u(t,x)+f(t,x), & (0,T]\times\mathbb{R}^n \\ \qquad u(0,x)=u_0(x), \end{cases} \tag{3.1.30}$$

donde $f\in L^1([0,T];L^2), u_0\in L^2$.

De forma análoga a la Definición 3.1.1, consideramos la siguiente definición de solución fuerte asociado al problema (3.1.30).

Definición 3.1.10. Una función $u\in C([0,T];H^s)$ se denomina solución fuerte de (3.1.30) si $g_{1-\alpha}*u\in C^1((0,T];L^2)$, y u satisface la ecuación

$$i^{\alpha}\,\mathbf{D}_t^{\alpha}\,u(t,x)=(-\Delta)^{s/2}u(t,x)+f(t,x),\quad t\in(0,T],\ x\in\mathbb{R}^n, \tag{3.1.31}$$

donde $u(0,x):=u_0(x)$, para $f\in C([0,T];L^2)$.

Ahora, estamos en condiciones de enunciar y demostrar el resultado principal del presente capítulo.

Teorema 3.1.11. *Sea $\alpha\in(0,1)$, $s\in(0,1)$, $f\in AC([0,T];H^s)$, $\mathrm{D}_t^{1-\alpha} f\in C([0,T],H^s)$, $u_0\in H^s$, fijo. Entonces, existe única solución fuerte u al problema (3.1.30), cuya representación integral es descrita* *como*

$$u(t,x) = \mathcal{F}^{-1}[E_\alpha(t^\alpha a(\xi))\hat{u}_0(\xi)](x) + (-i)^\alpha \int_0^t \mathcal{F}^{-1}[E_\alpha((t-\tau)^\alpha a(\xi))\, \mathrm{D}_\tau^{1-\alpha} \hat{f}(\tau,\xi)](x)d\tau, \tag{3.1.32}$$

donde $a(\xi) = (-i)^\alpha |\xi|^s$. *Más aún, existe una constante no negativa* M_T *de modo que,*

$$\|u\|_{C([0,T];H^s)} \leq M_T \left(\|u_0\|_{H^s} + \|\, \mathrm{D}_\tau^{1-\alpha} f\|_{L^1([0,T];H^s)} \right) \tag{3.1.33}$$

Demostración. Nuestra representación de u descrita en (3.1.32), se consigue con argumentos análogos a los empleados en (3.1.5)-(3.1.7). Luego de esto, primero deseamos demostraremos la unicidad de la solución u, para esto considere $u_1, u_2 \in C([0,T];H^s)$ dos soluciones fuertes de nuestro problema (3.1.30), es decir, debido a la definición se satisface para u_1 que

$$g_{1-\alpha} * u_1 \in C^1((0,T];L^2), \quad i^\alpha\, \mathbf{D}_t^\alpha\, u_1(t,x) = (-\Delta)^{s/2} u_1(t,x) + f(t,x), \tag{3.1.34}$$

donde $u_1(0) = u_0$, $f \in C([0,T];L^2)$; y de forma análoga para u_2 se tiene que

$$g_{1-\alpha} * u_2 \in C^1((0,T];L^2), \quad i^\alpha\, \mathbf{D}_t^\alpha\, u_2(t,x) = (-\Delta)^{s/2} u_2(t,x) + f(t,x), \tag{3.1.35}$$

$u_2(0) = u_0$, $f \in C([0,T];L^2)$. Luego, definimos la función $w := u_1 - u_2 \in C([0,T];H^s)$, donde $g_{1-\alpha} * w \in C^1((0,T];L^2)$, y además por expresiones (3.1.34)-(3.1.35) la función w satisface la ecuación de Schrödinger homogénea con condición inicial nula,

$$\begin{cases} \mathbf{D}_t^\alpha\, w(t,x) = (-i)^\alpha (-\Delta)^{s/2} w(t,x), & (0,T] \times \mathbb{R}^n, \\ \quad w(0,x) = 0. \end{cases} \tag{3.1.36}$$

En consecuencia, debido a nuestra Proposición 2.2.2 aplicada a la función w se desprende que el problema (3.1.36) tiene única solución fuerte w nula, esto es

$$w(t,x) = \mathcal{F}^{-1}[E_\alpha((-it)^\alpha |\xi|^s)\hat{w}_0(\xi)](x) = 0,$$

es decir, $u_1(t,x) = u_2(t,x)$, para $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$.

En una segunda etapa, estamos interesados en demostrar existencia de una solución fuerte de nuestro problema lineal (3.1.30). Para conseguir esto, notamos desde la Proposición 2.2.2 que la función $u_a(t,x) := \mathcal{F}^{-1}[E_\alpha((-it)^\alpha |\xi|^s)\hat{u}_0(\xi)](x)$ representa la única solución fuerte de la ecuación de Schrödinger homogénea,

$$\begin{cases} \mathbf{D}_t^\alpha\, u(t,x) = (-i)^\alpha (-\Delta)^{s/2} u(t,x), & (0,T] \times \mathbb{R}^n, \\ \quad u(0,x) = u_0(x), \end{cases} \tag{3.1.37}$$

con $u_0 \in H^s$. Además, notamos a partir de la Proposición 3.1.8 que

$$u_b(t,x) := (-i)^\alpha \int_0^t \mathcal{F}^{-1}[E_\alpha((t-\tau)^\alpha a(\xi))\,\mathrm{D}_\tau^{1-\alpha}\,\hat{f}(\tau,\xi)](x)d\tau,$$

representa la única solución fuerte de la ecuación lineal de Schrödinger con condición inicial u_0 nula,

$$\begin{cases} i^\alpha\,\mathbf{D}_t^\alpha\,u(t,x) = (-\Delta)^{s/2}u(t,x) + f(t,x), \quad (0,T]\times\mathbb{R}^n, \\ \qquad u(0,x) = 0, \end{cases} \tag{3.1.38}$$

En consecuencia, a partir de los sistemas (3.1.37)-(3.1.38) con sus respectivas soluciones u_a, u_b, se concluye que $u(t,x) := u_a(t,x) + u_b(t,x)$ satisface el problema (3.1.30), esto es

$$\begin{aligned} i^\alpha\,\mathbf{D}_t^\alpha\,u(t,x) &= i^\alpha\,\mathbf{D}_t^\alpha(u_a(t,x)+u_b(t,x)) = i^\alpha\,\mathbf{D}_t^\alpha\,u_a(t,x) + i^\alpha\,\mathbf{D}_t^\alpha\,u_b(t,x) \\ &= (-\Delta)^{s/2}u_a(t,x) + (-\Delta)^{s/2}u_b(t,x) + f(t,x) \\ &= (-\Delta)^{s/2}(u_a(t,x)+u_b(t,x)) + f(t,x) \\ &= (-\Delta)^{s/2}u(t,x) + f(t,x), \quad [0,T]\times\mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Además, es directo que $u(0) = u_a(0)+u_b(0) = u_0$. Finalmente, deseamos verificar la estimación enunciada en (3.1.33), para conseguir esto notamos desde la representación (3.1.32) que

$$\hat{u}(t,\xi) = E_\alpha(t^\alpha a(\xi))\hat{u}_0(\xi) + (-i)^\alpha \int_0^t E_\alpha((t-\tau)^\alpha a(\xi))\,\mathrm{D}_\tau^{1-\alpha}\,\hat{f}(\tau,\xi)d\tau, \tag{3.1.39}$$

donde $a(\xi) := (-i)^\alpha|\xi|^s$. De este modo, empleando la igualdad (3.1.39) tenemos que

$$\begin{aligned} \|u(t,\cdot)\|_{H^s}^2 &:= \int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|^2)^s|\hat{u}(t,\xi)|^2d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|^2)^s\left|E_\alpha(t^\alpha a(\xi))\hat{u}_0(\xi) + (-i)^\alpha\int_0^t E_\alpha((t-\tau)^\alpha a(\xi))\,\mathrm{D}_\tau^{1-\alpha}\,\hat{f}(\tau,\xi)d\tau\right|^2 d\xi \\ &\le 2\int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|^2)^s\left(|E_\alpha(t^\alpha a(\xi))\hat{u}_0(\xi)|^2 + \left|\int_0^t E_\alpha((t-\tau)^\alpha a(\xi))\,\mathrm{D}_\tau^{1-\alpha}\,\hat{f}(\tau,\xi)d\tau\right|^2\right)d\xi. \end{aligned} \tag{3.1.40}$$

Luego, debido a la desigualdad de Hölder junto con el Lema A.2.3 parte (i) para $z = (-i(t-\tau))^\alpha|\xi|^s$, se deduce que existe una constante no negativa M_T de modo que,

$$\begin{aligned} \left|\int_0^t E_\alpha((t-\tau)^\alpha a(\xi))\,\mathrm{D}_\tau^{1-\alpha}\,\hat{f}(\tau,\xi)d\tau\right|^2 &\le \int_0^t |E_\alpha((t-\tau)^\alpha a(\xi))|^2d\tau\cdot\int_0^t|\,\mathrm{D}_\tau^{1-\alpha}\,\hat{f}(\tau,\xi)|^2d\tau \\ &\le M_T\cdot\int_0^t|\,\mathrm{D}_\tau^{1-\alpha}\,\hat{f}(\tau,\xi)|^2d\tau. \end{aligned} \tag{3.1.41}$$

Por lo tanto, a partir de las estimaciones (3.1.40)-(3.1.41), Lema A.2.3 parte (i) para $z = (-it)^\alpha|\xi|^s$ y teorema de Fubini se tiene que,

$$\begin{aligned}\|u(t,\cdot)\|_{H^s}^2 &\leq 2\int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|^2)^s\left(|E_\alpha(t^\alpha a(\xi))\hat{u}_0(\xi)|^2 + M_T\cdot\int_0^t |\,\mathrm{D}_\tau^{1-\alpha}\,\hat{f}(\tau,\xi)|^2 d\tau\right)d\xi\\ &\leq 2M_T\left(\int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|^2)^s|\hat{u}_0(\xi)|^2 d\xi + \int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|^2)^s\int_0^t |\,\mathrm{D}_\tau^{1-\alpha}\,\hat{f}(\tau,\xi)|^2 d\tau d\xi\right)\\ &= 2M_T\left(\|u_0\|_{H^s}^2 + \int_0^t \|\,\mathrm{D}_\tau^{1-\alpha}\,f(\tau,\cdot)\|_{H^s}^2 d\tau\right).\end{aligned}$$

Finalmente, concluimos que

$$\begin{aligned}\|u(t,\cdot)\|_{H^s} &\leq \sqrt{2}M_T^{1/2}\left(\|u_0\|_{H^s}^2 + \int_0^t \|\,\mathrm{D}_\tau^{1-\alpha}\,f(\tau,\cdot)\|_{H^s}^2 d\tau\right)^{1/2}\\ &\leq \sqrt{2}M_T^{1/2}\left(\|u_0\|_{H^s} + \left[\int_0^t \|\,\mathrm{D}_\tau^{1-\alpha}\,f(\tau,\cdot)\|_{H^s}^2 d\tau\right]^{1/2}\right)\\ &\leq \sqrt{2}M_T^{1/2}\left(\|u_0\|_{H^s} + T\int_0^T \|\,\mathrm{D}_\tau^{1-\alpha}\,f(\tau,\cdot)\|_{H^s} d\tau\right)\\ &= \sqrt{2}M_T^{1/2}\left(\|u_0\|_{H^s} + T\cdot\|\,\mathrm{D}_\tau^{1-\alpha}\,f\|_{L^1([0,T];H^s)}\right),\ T>0.\end{aligned} \tag{3.1.42}$$

Luego, tomando supremo sobre el intervalo $[0,T]$ en la estimación (3.1.42) nos permite deducir la siguiente estimación

$$\|u\|_{C([0,T];H^s)} \leq \sqrt{2}M_T^{1/2}\left(\|u_0\|_{H^s} + T\cdot\|\,\mathrm{D}_\tau^{1-\alpha}\,f\|_{L^1([0,T];H^s)}\right),$$

para $T>0$. ■

CAPÍTULO 4

Ecuación no lineal de Schrödinger tiempo-espacio fraccionario

En el presente capítulo nuestro objetivo es demostrar existencia, unicidad y regularidad de solución débil local para una clase de ecuaciones de Schrödinger no lineal no local definida por un operador Laplaciano fraccionario $(-\Delta)^{s/2}$ sobre $\mathbb{R}^n$, para $s \in (0,1)$, [13–15, 20, 31, 35, 73]:

$$\begin{cases} i^\alpha\, \mathbf{D}_t^\alpha\, u(t,x) = (-\Delta)^{s/2} u(t,x) + \lambda J_t^{1-\alpha} K_\gamma(|u|^2)(x) u(t,x), & (0,T] \times \mathbb{R}^n, \\ \qquad u(0,x) = u_0(x),\ u_0 \in H^s, \end{cases} \tag{4.0.1}$$

donde $u : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in (0,1)$, $T > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. El operador Laplaciano fraccionario $(-\Delta)^{s/2}$ se define como un operador pseudo-diferencial vía transformada de Fourier sobre $\mathbb{R}^n$ (ampliamente conocido en la literatura como operador fraccionario de Riesz cuántico de orden $s/2$, derivada fraccionaria de Riesz de orden $s/2$, se sugiere ver e.g., [19, 44, 46]), $\mathbf{D}_t^\alpha$ corresponde al operador diferencial fraccionario de orden α en el sentido de Caputo, $J_t^{1-\alpha}$ denota el operador integral en el sentido de Riemann-Liouville de orden $1-\alpha$, y el funcional no lineal tipo Hartree $u \mapsto G(u) := K_\gamma(|u|^2)u$ descrito en nuestro problema (4.0.1) se define como

$$G(u)(x) := \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\psi(x-y)}{|x-y|^\gamma} |u|^2(y) dy \right) u(x), \quad \gamma \in (0,n), \tag{4.0.2}$$

donde ψ corresponde a una función no negativa y esencialmente acotada sobre $\mathbb{R}^n$. En lo que sigue, denotaremos por $\psi_\gamma = \dfrac{\psi}{|\cdot|^\gamma}$, de este modo (4.0.2) puede ser reescrito como

$$G(u) = K_\gamma(|u|^2)u = (\psi_\gamma * |u|^2)u, \quad \gamma \in (0,n). \tag{4.0.3}$$

Notamos que, usando estimaciones obtenidas sobre el operador $K_\gamma(|u|^2)(\cdot)$ en el espacio L^∞, $L^{2n/\gamma}$,

$H^{s,2n/\gamma}$ y empleando el clásico teorema de punto fijo de Banach, se demuestra existencia y unicidad de soluciones de nuestra clase de ecuaciones (4.0.1) sobre la escala de espacios de Sobolev de orden fraccionario H^s, para $s > 0$. Por brevedad, como es usual denotaremos por C una constante no negativa que posiblemente depende de los parámetros n, α, s, λ entre otras constantes, la cual puede variar entre cada desigualdad.

Como una consecuencia del Teorema A.3.9 parte (A.3.10) para $s = \sigma$, el cual es válido sobre el espacio de Schwartz $\mathcal{S}$, tenemos la siguiente proposición válida en espacios intersección más generales, se sugiere al lector ver e.g., [16].

Proposición 4.0.12. *Sea $\sigma > 0$, $1 < r < \infty$, $1 < p_1, p_2, q_1, q_2 \leq \infty$ y considere que $\frac{1}{r} = \frac{1}{p_i} + \frac{1}{q_i}$, para $i = 1, 2$. Suponer que $u \in H^{\sigma,p_1} \cap L^{p_2}, v \in H^{\sigma,q_2} \cap L^{q_1}$. Entonces, $uv \in \dot{H}^{\sigma,r}$ y se satisface la estimación*

$$\|(-\Delta)^{\sigma/2}(uv)\|_{L^r} \leq C \left(\|u\|_{H^{\sigma,p_1}} \|v\|_{L^{q_1}} + \|u\|_{L^{p_2}} \|v\|_{H^{\sigma,q_2}}\right), \tag{4.0.4}$$

donde $C = C_{n,\sigma,p_i,q_i} > 0$.

Demostración. Considerar la aplicación bilineal $(-\Delta)^{\sigma/2} : \mathcal{S} \times \mathcal{S} \to L^r$ como $(u, v) \mapsto (-\Delta)^{\sigma/2}(u, v) = (-\Delta)^{\sigma/2}(uv)$. Afirmamos que $(-\Delta)^{\sigma/2}$ es continuo cuando consideramos al espacio $\mathcal{S}$ con la norma del espacio intersección $H^{\sigma,p_1} \cap L^{p_2}$ (o bien sobre el espacio $H^{\sigma,q_2} \cap L^{q_1}$). En efecto, asumir que la sucesión que $(u_n, v_n) \in \mathcal{S} \times \mathcal{S}$ de modo que $u_n \to 0$ en $H^{\sigma,p_1} \cap L^{p_2}$, $v_n \to 0$ en $H^{\sigma,q_2}(\mathbb{R}^n) \cap L^{q_1}(\mathbb{R}^n)$, es decir

$$\begin{aligned} \|u_n\|_{H^{\sigma,p_1} \cap L^{p_2}} &= \|u_n\|_{H^{\sigma,p_1}} + \|u_n\|_{L^{p_2}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \\ \|v_n\|_{H^{\sigma,q_2} \cap L^{q_1}} &= \|v_n\|_{H^{\sigma,q_2}} + \|v_n\|_{L^{q_1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, debido al Teorema A.3.9 parte (A.3.10) para $s = \sigma$, y Teorema 1.1.12 para $u = u_n, p = p_1$; $u = v_n, p = q_1$, luego existe una constante no negativa C, de modo que

$$\|(-\Delta)^{\sigma/2}(u_n, v_n)\|_{L^r} \leq C(\|u_n\|_{H^{\sigma,p_1}} \|v_n\|_{L^{q_1}} + \|u_n\|_{L^{p_2}} \|v_n\|_{H^{\sigma,q_2}}) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

luego $(-\Delta)^{s/2}$ es una aplicación bilineal continua sobre $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$. En una segunda etapa, notamos que debido al Teorema 1.1.5, $\overline{\mathcal{S}} = L^{p_2}$ se tiene que $\overline{\mathcal{S}}^{\|\cdot\|_{H^{\sigma,p_1} \cap L^{p_2}}} = H^{\sigma,p_1} \cap L^{p_2}$, y de forma análoga se tiene que $\overline{\mathcal{S}}^{\|\cdot\|_{H^{\sigma,q_2} \cap L^{q_1}}} = H^{\sigma,q_2} \cap L^{q_1}$, donde se define $\|\cdot\|_{H^{\sigma,p_1} \cap L^{p_2}} = \|\cdot\|_{H^{\sigma,p_1}} + \|\cdot\|_{L^{p_2}}$, $\|\cdot\|_{H^{\sigma,q_2} \cap L^{q_1}} = \|\cdot\|_{H^{\sigma,q_2}} + \|\cdot\|_{L^{q_1}}$, se sugiere ver e.g., [11]. Luego, por densidad existe una única extensión continua de nuestro operador $(-\Delta)^{s/2}$ hacia el espacio $H^{\sigma,p_1} \cap L^{p_2} \times H^{\sigma,q_2} \cap L^{q_1} \to L^r$, la cual también denotaremos por $(-\Delta)^{s/2}$. Más aún, debido a la densidad del espacio de Schwartz se concluye que la única extensión satisface (4.0.4), i.e,

$$\|(-\Delta)^{\sigma/2}(uv)\|_{L^r} \leq C \left(\|u\|_{H^{\sigma,p_1}} \|v\|_{L^{q_1}} + \|u\|_{L^{p_2}} \|v\|_{H^{\sigma,q_2}}\right),$$

para cada $u \in H^{\sigma,p_1} \cap L^{p_2}, v \in H^{\sigma,q_2} \cap L^{q_1}$. ■

De forma análoga a nuestra Proposición 4.0.12, y como una consecuencia del Teorema A.3.9 parte (A.3.11) válido sobre el espacio de Schwartz $\mathcal{S}$, se desprende el siguiente resultado.

Proposición 4.0.13. *Sea* $\sigma > 0$, $1 < r < \infty$, $1 < p_1, p_2, q_1, q_2 \leq \infty$ *y considere* $\frac{1}{r} = \frac{1}{p_i} + \frac{1}{q_i}$, *para* $i = 1, 2$. *Suponer que* $u \in H^{\sigma,p_1} \cap L^{p_2}, v \in H^{\sigma,q_2} \cap L^{q_1}$. *Entonces* $uv \in H^{\sigma,r}$ *y se satisface la estimación*

$$\|(I-\Delta)^{\sigma/2}(uv)\|_{L^r} \leq C\left(\|(I-\Delta)^{\sigma/2}u\|_{L^{p_1}}\|v\|_{L^{q_1}} + \|u\|_{L^{p_2}}\|(I-\Delta)^{\sigma/2}v\|_{L^{q_2}}\right), \tag{4.0.5}$$

donde $C = C_{n,\sigma,p_i,q_i} > 0$.

Demostración. La demostración es una consecuencia directa del Teorema A.3.9 parte (A.3.11) y argumentos análogos a los empleados en la demostración de la Proposición 4.0.12. ■

El siguiente resultado, es un lema que será de utilidad en la demostración de nuestro Lema 4.0.19 y será clave en el Teorema principal de este capítulo.

Lema 4.0.14. *Sea* $\gamma \in (0, n)$, $u \in \dot{H}^{\gamma/2}$. *Entonces, existe una constante no negativa* $C = C_{n,\gamma}$ *tal que*

$$\|K_\gamma(|u|^2)\|_{L^\infty} \leq C\|u\|^2_{\dot{H}^{\gamma/2}},$$

donde $K_\gamma(|u|^2) = (\psi_\gamma * |u|^2)$, *para* $\psi \in L^\infty$.

Demostración. Considere el parámetro $\gamma \in (0, n)$, $u \in \dot{H}^{\gamma/2}$. Entonces, por Lema 1.1.16 existe una constante no negativa $C = C_{n,\gamma}$ de modo que

$$\begin{aligned}\|K_\gamma(|u|^2)\|_{L^\infty} &:= \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |(\psi_\gamma * |u|^2)(x)| \\ &\leq \|\psi\|_{L^\infty} \cdot \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(y)|^2}{|y-x|^\gamma} dy \\ &\leq C\|u\|^2_{\dot{H}^{\gamma/2}}.\end{aligned} \tag{4.0.6}$$

■

El siguiente resultado, es un lema técnico que será de utilidad en el Lema 4.0.18 y el Teorema principal 4.1.2.

Lema 4.0.15. *Sea* $\gamma \in (0, n)$, $s \geq \gamma/2$,$u \in H^s$. *Entonces, existe una constante no negativa* $C = C_{q,p,n,\gamma}$, *de modo que*

$$\|K_\gamma(|u|^2)\|_{L^{2n/\gamma}} \leq C\|u\|_{L^{2n/n-\gamma}}\|u\|_{H^s}, \tag{4.0.7}$$

donde $K_\gamma(|u|^2) = (\psi_\gamma * |u|^2)$, *para* $\psi \in L^\infty$.

Demostración. Por hipótesis, y debido a la cadena de inclusiones continuas (1.1.10) se desprende que $u \in L^{2n/n-\gamma}$, para $s \geq \gamma/2$. Luego, por desigualdad de Hölder A.3.10 para $r = 2n/2n-\gamma, p = 2n/n-\gamma, q = 2$, y debido a que $|u| \in L^{2n/n-\gamma} \cap L^2$, entonces se tiene que $|u|^2 \in L^{2n/2n-\gamma}$ y se satisface la estimación

$$\||u|^2\|_{L^{2n/2n-\gamma}} \leq \|u\|_{L^{2n/n-\gamma}} \|u\|_{L^2}, \tag{4.0.8}$$

es finito para $u \in H^s$. Luego, a partir de la aplicación $u \mapsto K_\gamma(u) = (\psi_\gamma * u)$ se deduce que

$$\left|K_\gamma(|u|^2)(x)\right| \leq \|\psi\|_\infty \left(|u|^2 * \frac{1}{|\cdot|^\gamma}\right)(x), \quad \psi \in L^\infty. \tag{4.0.9}$$

De esta forma, por (4.0.8), (4.0.9) y una aplicación directa del Corolario A.3.8 para la función $|u|^2 \in L^{2n/2n-\gamma}$ y parámetros $q = 2n/\gamma$, $p = 2n/2n-\gamma$, permite concluir que existe una constante no negativa $C = C_{q,p,n,\gamma}$ de modo que,

$$\begin{aligned}
\|K_\gamma(|u|^2)\|_{L^{2n/\gamma}} &\leq \|\psi\|_\infty \left\||u|^2 * \frac{1}{|\cdot|^\gamma}\right\|_{L^{2n/\gamma}} \\
&\leq C\|\psi\|_\infty \||u|^2\|_{L^{2n/2n-\gamma}} \\
&\leq C\|u\|_{L^{2n/n-\gamma}} \|u\|_{L^2} \\
&\leq C\|u\|_{L^{2n/n-\gamma}} \|u\|_{H^s}.
\end{aligned} \tag{4.0.10}$$

■

El siguiente resultado, es un lema que continua estudiante estimaciones de la aplicación $u \mapsto (\psi_\gamma * u)$. Note que, este resultado será de utilidad en el Teorema 4.1.2.

Lema 4.0.16. *Sea $\gamma \in (0, n)$, $s > 0$, $u \in H^s$. Entonces, existe una constante no negativa C, tal que*

$$\|K_\gamma(|u|^2)\|_{H^{s,2n/\gamma}} \leq C\|u\|_{L^{2n/n-\gamma}} \|u\|_{H^s}, \tag{4.0.11}$$

donde $K_\gamma(|u|^2) = (\psi_\gamma * |u|^2)$, para $\psi \in L^\infty$ de modo que $|\psi(x)| \leq Me^{-\mu|x|}$, para algún $M, \mu \geq 0$.

Demostración. Primero, recordamos nuestro operador pseudo-diferencial $(I-\Delta)^{s/2}u := \mathcal{F}^{-1}[(1+|\xi|^2)^{s/2}\widehat{u}]$, el cual pertenece a $\mathcal{S}$, para $u \in \mathcal{S}$. Luego, afirmamos que los operadores $(I - \Delta)^{s/2}, K_\gamma$ conmutan con argumento del tipo $|u|^2$, esto es

$$((I - \Delta)^{s/2} K_\gamma)(|u|^2) = (K_\gamma (I - \Delta)^{s/2})(|u|^2), \quad u \in \mathcal{S} \subset H^s. \tag{4.0.12}$$

Note que, por hipótesis de crecimiento sobre ψ la aplicación $\psi_\gamma = \dfrac{\psi(\cdot)}{|\cdot|^\gamma}$ es una función rápidamente decreciente en infinito, puesto que para cada entero $k \geq 0$, $\mu > 0$ se satisface que,

$$\lim_{|x|\to\infty} |x|^k |\psi_\gamma(x)| = \lim_{|x|\to\infty} \frac{|\psi(x)|}{|x|^{\gamma-k}} \leq M \lim_{|x|\to\infty} \frac{|x|^{k-\gamma}}{e^{\mu|x|}} = 0,$$

de este modo $\psi_\gamma \in \mathcal{O}'_C \subset \mathcal{S}'$, para detalles y propiedades acerca del subespacio de distribuciones $\mathcal{O}'_C$, se sugiere ver [68]. Además, debido a que la función $u \in \mathcal{S}$ entonces $|u|^2 = u\overline{u}$ también define un elemento de el espacio de Schwartz $\mathcal{S}$. De este modo, se concluye que nuestro producto convolución

$$K_\gamma(|u|^2) = (\psi_\gamma * |u|^2) \tag{4.0.13}$$

existe como una distribución temperada $\mathcal{S}'$. En consecuencia, es válido emplear el teorema de convolución en (4.0.13), ver e.g., [68, Teorema 30.4],

$$\mathcal{F}(K_\gamma(|u|^2)) = \mathcal{F}(\psi_\gamma * |u|^2) = \mathcal{F}(\psi_\gamma)\mathcal{F}(|u|^2). \tag{4.0.14}$$

Más aún, $(1+|\xi|^2)^{s/2}\mathcal{F}(|u|^2) \in \mathcal{S}$. Luego, por (4.0.14) se concluye que

$$\begin{aligned}
((I-\Delta)^{s/2}K_\gamma)(|u|^2) &:= \mathcal{F}^{-1}[(1+|\xi|^2)^{s/2}\mathcal{F}(K_\gamma(|u|^2))] \\
&= \mathcal{F}^{-1}\left[\mathcal{F}(\psi_\gamma)(1+|\xi|^2)^{s/2}\mathcal{F}(|u|^2)\right] \\
&= \left(\psi_\gamma * \mathcal{F}^{-1}[(1+|\xi|^2)^{s/2}\mathcal{F}(|u|^2)]\right) \\
&= K_\gamma(\mathcal{F}^{-1}[(1+|\xi|^2)^{s/2}\mathcal{F}(|u|^2)]) \\
&= (K_\gamma(I-\Delta)^{s/2})(|u|^2), \quad u \in \mathcal{S}.
\end{aligned} \tag{4.0.15}$$

Luego, debido a la densidad de $\overline{\mathcal{S}}^{\|\cdot\|_s} = H^s$, para cada $s > 0$, la igualdad (4.0.15) es válida sobre el espacio H^s. De este modo, como una consecuencia de (4.0.15) y la desigualdad (A.3.9) para $q = 2n/\gamma$, $p = 2n/2n-\gamma$ permiten asegurar que,

$$\begin{aligned}
\|K_\gamma(|u|^2)\|_{H^{s,2n/\gamma}} &:= \|(I-\Delta)^{s/2}K_\gamma(|u|^2))\|_{L^{2n/\gamma}} \\
&= \|K_\gamma(I-\Delta)^{s/2}(|u|^2))\|_{L^{2n/\gamma}} \\
&\leq C\|\psi\|_\infty \|(I-\Delta)^{s/2}(|u|^2)\|_{L^{2n/2n-\gamma}}, \quad u \in H^s.
\end{aligned} \tag{4.0.16}$$

Ahora, estimando el lado derecho de (4.0.16) por una aplicación directa de la Proposición 4.0.13, donde escogemos los parámetros del siguiente modo: $\sigma = s$, $r = 2n/2n-\gamma$, $p_1 = q_2 = 2$, $q_1 = p_2 = 2n/n-\gamma$, y consideramos a u, v siendo $|u|$, donde conocemos que $|u| \in H^s \cap L^{2n/n-\gamma} \subseteq H^s$, debido a la cadena de incrustaciones de Sobolev descritas en (1.1.10). Finalmente por Proposición 4.0.13, $|u|^2 \in H^{s,2n/2n-\gamma}$ y se satisfacе que

$$\begin{aligned}
\|(I-\Delta)^{s/2}(|u|^2)\|_{L^{2n/2n-\gamma}} &\leq C\big(\|(I-\Delta)^{s/2}|u|\|_{L^2}\|u\|_{L^{2n/n-\gamma}} \\
&\quad + \|u\|_{L^{2n/n-\gamma}}\|(I-\Delta)^{s/2}|u|\|_{L^2}\big) \\
&= C(\|u\|_{L^{2n/n-\gamma}}\|(I-\Delta)^{s/2}|u|\|_{L^2}) \\
&= C(\|u\|_{L^{2n/n-\gamma}}\|u\|_{H^s}),
\end{aligned} \tag{4.0.17}$$

para $C > 0$. En consecuencia, debido (4.0.16) y (4.0.17) se concluye la estimación deseada. ■

El siguiente resultado, es un lema que será de gran utilidad en el siguiente Lema 4.0.18.

Lema 4.0.17. *Sea $\gamma \in (0, n)$, $s \geq \gamma/2$,$u, v \in H^s$. Entonces, existe una constante no negativa C, tal que*

$$\||u|^2 - |v|^2\|_{L^{2n/2n-\gamma}} \leq C(\|u\|_{H^s} + \|v\|_{H^s})\|u - v\|_{L^2} \tag{4.0.18}$$

Demostración. Por la desigualdad triangular y debido a la cadena de inclusiones continuas descritas en (1.1.10) para $s \geq \gamma/2$, $H^s \hookrightarrow L^{2n/n-\gamma}$ es directo que

$$\begin{aligned} \||u| + |v|\|_{L^{2n/n-\gamma}} &\leq C(\|u\|_{H^s} + \|v\|_{H^s}), \\ \||u + v|\|_{L^2} &\leq C(\|u\|_{H^s} + \|v\|_{H^s}), \end{aligned}$$

donde $C > 0$. De este modo, $|u|+|v| \in L^{2n/n-\gamma}$, $|u-v| \in L^2$, para cada $u, v \in H^s$. Luego, por desigualdad de Hölder A.3.10 para $r = 2n/2n-\gamma$, $p = 2n/n-\gamma$, $q = 2$, y debido a que $|u|+|v| \in L^{2n/n-\gamma}$, $|u-v| \in L^2$, entonces se tiene que $(|u| + |v|)|u - v| \in L^{2n/2n-\gamma}$ y se satisface la siguiente estimación

$$\begin{aligned} \||u|^2 - |v|^2\|_{L^{2n/2n-\gamma}} &\leq \|(|u| + |v|)|u - v|\|_{L^{2n/2n-\gamma}} \\ &\leq \||u| + |v|\|_{L^{2n/n-\gamma}} \|u - v\|_{L^2} \\ &\leq (\|u\|_{L^{2n/n-\gamma}} + \|v\|_{L^{2n/n-\gamma}})\|u - v\|_{L^2} \\ &\leq C(\|u\|_{H^s} + \|v\|_{H^s})\|u - v\|_{L^2}, \end{aligned}$$

donde $C > 0$, $u, v \in H^s$. ■

En el siguiente resultado, demostraremos que la aplicación $u \mapsto G(u) = K_\gamma(|u|^2)u$ es Lipschitz continua sobre L^2. Note además, que este resultado será de utilidad en el Lema 4.0.19.

Lema 4.0.18. *Sea $\gamma \in (0, n)$, $s \geq \gamma/2$, $u, v \in H^s$. Entonces, existe una constante no negativa C, de modo que se satisface la siguiente estimación*

$$\|G(u) - G(v)\|_{L^2} \leq C(\|u\|_{H^s}^2 + \|v\|_{H^s}^2 + \|u\|_{H^s}\|v\|_{H^s})\|u - v\|_{L^2},$$

donde $G(u) = K_\gamma(|u|^2)u$, para $K_\gamma(|u|^2) = (\psi_\gamma * |u|^2)$, $\psi \in L^\infty$.

Demostración. Por la definición del funcional no lineal $G(u)$ y la linealidad de la convolución, se desprende que

$$\begin{aligned} \|G(u) - G(v)\|_{L^2} &= \|(\psi_\gamma * |u|^2)u - (\psi_\gamma * |v|^2)v\|_{L^2} \\ &= \|K_\gamma(|u|^2)(u - v) + K_\gamma(|u|^2 - |v|^2)v\|_{L^2} \\ &\leq \|K_\gamma(|u|^2)(u - v)\|_{L^2} + \|K_\gamma(|u|^2 - |v|^2)v\|_{L^2}. \end{aligned} \tag{4.0.19}$$

Luego, por inclusiones (1.1.10) y Proposición 1.1.14 para $s = \gamma/2$, es directo que: $H^s \hookrightarrow H^{\gamma/2} \hookrightarrow \dot{H}^{\gamma/2}$, para $s \geq \gamma/2$. De este modo, aplicando el Lema 1.1.16 para $u \in \dot{H}^{\gamma/2}$, con $\gamma \in (0,n)$, resulta que el primer término del lado derecho de (4.0.19) satisface que

$$\begin{aligned}
\|K_\gamma(|u|^2)(u-v)\|_{L^2}^2 &:= \int_{\mathbb{R}^n} |K_\gamma(|u|^2)(x)|^2 |(u-v)(x)|^2 dx \\
&\leq \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |K_\gamma(|u|^2)(x)|^2 \int_{\mathbb{R}^n} |(u-v)(x)|^2 dx \\
&\leq C\|\psi\|_{L^\infty}^2 \|u\|_{\dot{H}^{\gamma/2}}^4 \int_{\mathbb{R}^n} |(u-v)(x)|^2 dx \\
&\leq C\|u\|_{H^{\gamma/2}}^4 \|u-v\|_{L^2}^2.
\end{aligned} \tag{4.0.20}$$

De este modo, desde (4.0.20) y la incrustación continua (1.1.10) inferimos que para $s \geq \gamma/2$,

$$\|K_\gamma(|u|^2)(u-v)\|_{L^2} \leq C\|u\|_{H^{\gamma/2}}^2 \|u-v\|_{L^2} \leq C\|u\|_{H^s}^2 \|u-v\|_{L^2}. \tag{4.0.21}$$

Ahora, para estimar el segundo término del lado derecho de (4.0.19), notamos que $K_\gamma(|u|^2 - |v|^2) = K_\gamma(|u|^2) - K_\gamma(|v|^2) \in L^{2n/\gamma}$ debido a nuestro Lema 4.0.15 y es directo que $v \in L^{2n/n-\gamma}$, puesto que $H^s \hookrightarrow L^{2n/n-\gamma}$. De hecho, por Teorema A.3.10 para $r = 2, p = 2n/\gamma$, $q = 2n/n-\gamma$ y debido al Lema 4.0.17, Corolario A.3.8 para $q = 2n/\gamma$, $p = 2n/2n-\gamma$, $|u|^2 - |v|^2 \in L^{2n/2n-\gamma}$, se concluye que

$$\begin{aligned}
\|K_\gamma(|u|^2 - |v|^2)v\|_{L^2} &\leq \|K_\gamma(|u|^2 - |v|^2)\|_{L^{2n/\gamma}} \|v\|_{L^{2n/n-\gamma}} \\
&\leq \|v\|_{H^s} \|K_\gamma(|u|^2 - |v|^2)\|_{L^{2n/\gamma}} \\
&\leq \|v\|_{H^s} \cdot \||u|^2 - |v|^2\|_{L^{2n/2n-\gamma}} \\
&\leq \|v\|_{H^s}(\|u\|_{H^s} + \|v\|_{H^s})\|u-v\|_{L^2}.
\end{aligned} \tag{4.0.22}$$

En consecuencia, combinando las estimaciones obtenidas (4.0.19), (4.0.21) y (4.0.22) se puede concluir que

$$\begin{aligned}
\|G(u) - G(v)\|_{L^2} &\leq \|K_\gamma(|u|^2)(u-v)\|_{L^2} + \|K_\gamma(|u|^2 - |v|^2)v\|_{L^2} \\
&\leq C(\|u\|_{H^s}^2 + \|v\|_{H^s}^2 + \|u\|_{H^s}\|v\|_{H^s})\|u-v\|_{L^2},
\end{aligned}$$

para alguna constante no negativa C. ■

En el siguiente resultado, demostraremos que la aplicación $u \mapsto G(u) = K_\gamma(|u|^2)u$ es Lipschitz continua sobre el espacio de Sobolev H^s. Note además, que este resultado será clave en la demostración del Teorema 4.1.2.

Lema 4.0.19. *Para $\gamma \in (0,n)$, $\gamma/2 \leq s < 1$, $u, v \in H^s$. Entonces, existe una constante no negativa C, de modo que*

$$\|G(u) - G(v)\|_{H^s} \leq C(\|u\|_{H^s}^2 + \|u\|_{H^s} + \|v\|_{H^s}^2 + \|u\|_{H^s}\|v\|_{H^s}) \cdot \|u-v\|_{H^s}.$$

donde $G(u) = K_\gamma(|u|^2)u$, *para* $K_\gamma(|u|^2) = (\psi_\gamma * |u|^2)$, $\psi \in L^\infty$.

Demostración. Sea $s \in (0,1)$. Luego, por la Proposición 1.1.14 para $G(u) - G(v)$, existe una constante no negativa C, de modo que

$$\|G(u) - G(v)\|_{H^s} \leq C(\|G(u) - G(v)\|_{L^2} + \|G(u) - G(v)\|_{\dot{H}^s}), \tag{4.0.23}$$

donde $G(u) - G(v) \in L^2$, debido a nuestro Lema 4.0.18. Note que, nuestro interés está orientado en estimar la siguiente cantidad $\|G(u) - G(v)\|_{\dot{H}^s}$, para $u, v \in H^s$. Para conseguir esto, es directo desde (4.0.3) aplicado a la función $|u|^2$, y debido a la linealidad de la convolución resulta que

$$G(u) - G(v) = K_\gamma(|u|^2)(u - v) + K_\gamma(|u|^2 - |v|^2)v. \tag{4.0.24}$$

De hecho, debido a la identidad (4.0.24), y Definición 1.1.2 para $p = 2$ tenemos

$$\begin{aligned} \|G(u) - G(v)\|_{\dot{H}^s} &:= \|(-\Delta)^{s/2}(G(u) - G(v))\|_{L^2} \\ &\leq \|(-\Delta)^{s/2}K_\gamma(|u|^2)(u - v)\|_{L^2} + \|(-\Delta)^{s/2}K_\gamma(|u|^2 - |v|^2)v\|_{L^2}. \end{aligned} \tag{4.0.25}$$

De este modo, a partir de la reciente desigualdad es suficiente estimar ambas cantidades de (4.0.25) , esto es,

$$I := \|(-\Delta)^{s/2}K_\gamma(|u|^2)(u - v)\|_{L^2}, \quad J := \|(-\Delta)^{s/2}K_\gamma(|u|^2 - |v|^2)v\|_{L^2}, \tag{4.0.26}$$

$u, v \in H^s$. Para este propósito, iniciamos estimando el valor de I. De hecho, debido a que $K_\gamma(|u|^2) \in H^{s,2n/\gamma} \cap L^\infty$, $u - v \in H^s \cap L^{2n/n-\gamma} = H^s$, por Lema 4.0.14, Lema 4.0.16 e inclusión continua (1.1.10). Entonces, por la Proposición 4.0.12 para $\sigma = s, r = 2, p_1 = 2n/\gamma, q_1 = 2n/n - \gamma, p_2 = \infty, q_2 = 2$, se puede concluir que $K_\gamma(|u|^2)(u - v) \in \dot{H}^s$ y se satisface la estimación

$$\begin{aligned} I &= \|(-\Delta)^{s/2}K_\gamma(|u|^2)(u - v)\|_{L^2} \\ &\leq \|K_\gamma(|u|^2)\|_{H^{s,2n/\gamma}}\|u - v\|_{L^{2n/n-\gamma}} + \|K_\gamma(|u|^2)\|_{L^\infty}\|u - v\|_{H^s} \\ &=: I_1 + I_2. \end{aligned} \tag{4.0.27}$$

Ahora, notando que $(-\Delta)^{s/2}, K_\gamma$ conmutan con argumento del tipo $|u|^2$, (1.1.10), Corolario A.3.8 para $q = 2n/\gamma, p = 2n/2n - \gamma$, Proposición 4.0.12 para $\sigma = s$, $r = 2n/2n - \gamma$, $p_1 = q_2 = 2$, $q_1 = p_2 = 2n/n - \gamma$, donde $|u| \in H^s \cap L^{2n/n-\gamma} = H^s$, para $s \geq \gamma/2$; y Proposición 1.1.14, podemos estimar el primer término I_1 del lado derecho de (4.0.27),

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \|(I-\Delta)^{s/2}K_\gamma(|u|^2)\|_{L^{2n/\gamma}}\|u-v\|_{L^{2n/n-\gamma}} \\
&\leq \|(I-\Delta)^{s/2}K_\gamma(|u|^2)\|_{L^{2n/\gamma}}\|u-v\|_{H^s} \\
&\leq \|(I-\Delta)^{s/2}(|u|^2)\|_{L^{2n/2n-\gamma}}\|u-v\|_{H^s} \\
&\leq \|(I-\Delta)^{s/2}(|u|)\|_{L^2}\|u\|_{L^{2n/n-\gamma}(\mathbb{R}^n)}\|u-v\|_{H^s} \\
&\leq \|u\|_{H^s}^2 \cdot \|u-v\|_{H^s}.
\end{aligned} \tag{4.0.28}
$$

En la misma dirección, por Lema 4.0.14, (1.1.10) y Proposición 1.1.14 para $s=\gamma/2$, podemos estimar el segundo término I_2 de (4.0.27),

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \|K_\gamma(|u|^2)\|_{L^\infty}\|(I-\Delta)^{s/2}(u-v)\|_{L^2} \\
&\leq C\|u\|_{\dot{H}^{\gamma/2}}^2\|u-v\|_{H^s} \\
&\leq C\|u\|_{H^s}^2 \cdot \|u-v\|_{H^s}.
\end{aligned} \tag{4.0.29}
$$

En consecuencia, para estimar (4.0.25) sólo nos resta estudiar el término J descrito en (4.0.26). En efecto, debido a que $K_\gamma(|u|^2-|v|^2) \in H^{s,2n/\gamma} \cap L^\infty$, $v \in H^s$, luego por la Proposición 4.0.12 para $\sigma=s, r=2, p_1=2n/\gamma, q_1=2n/n-\gamma, p_2=\infty, q_2=2$, se obtiene que

$$
\begin{aligned}
J &= \|(-\Delta)^{s/2}K_\gamma(|u|^2-|v|^2)v\|_{L^2} \\
&\leq \|K_\gamma(|u|^2-|v|^2)\|_{H^{s,2n/\gamma}}\|v\|_{L^{2n/n-\gamma}} + \|K_\gamma(|u|^2-|v|^2)\|_{L^\infty}\|v\|_{H^s} \\
&=: J_1 + J_2.
\end{aligned} \tag{4.0.30}
$$

Luego, usando nuevamente la incrustación (1.1.10), la conmutatividad $(-\Delta)^{s/2}K_\gamma(|u|^2-|v|^2) = K_\gamma(-\Delta)^{s/2}(|u|^2-|v|^2)$, Corolario A.3.8 aplicado al operador $(-\Delta)^{s/2}(|u|^2-|v|^2)$, para $q=2n/\gamma$, $p=2n/2n-\gamma$, Proposición 4.0.12 para $\sigma=s$, $r=2n/2n-\gamma$, $p_1=2, q_1=2n/n-\gamma$ $p_2=2n/n-\gamma, q_2=2$, y debido a que las funciones $|u|+|v|, |u-v| \in H^s \cap L^{2n/n-\gamma} = H^s$, puesto que por hipótesis $s \geq \gamma/2$. Entonces, se satisface la siguiente estimación asociada a J_1,

$$
\begin{aligned}
J_1 &= \|(I-\Delta)^{s/2}K_\gamma(|u|^2-|v|^2)\|_{L^{2n/\gamma}}\|v\|_{L^{2n/n-\gamma}}\\
&\leq \|v\|_{H^s}\|K_\gamma(I-\Delta)^{s/2}(|u|^2-|v|^2)\|_{L^{2n/\gamma}}\\
&\leq \|v\|_{H^s}\|(I-\Delta)^{s/2}(|u|^2-|v|^2)\|_{L^{2n/2n-\gamma}}\\
&\leq \|v\|_{H^s}\|(I-\Delta)^{s/2}((|u|+|v|)|u-v|)\|_{L^{2n/2n-\gamma}}\\
&\leq \|v\|_{H^s}\cdot(\||u|+|v|\|_{H^s}\|u-v\|_{L^{2n/n-\gamma}}+\||u|+|v|\|_{L^{2n/n-\gamma}}\||u-v|\|_{H^s})
\end{aligned} \tag{4.0.31}
$$

Por lo tanto, usando las expresiones (4.0.31) permiten deducir la siguiente estimación asociada a J_1,

$$
J_1 \leq 2\|v\|_{H^s}(\|u\|_{H^s}+\|v\|_{H^s})\cdot\|u-v\|_{H^s},\ u,v\in H^s. \tag{4.0.32}
$$

Ahora, aplicando argumentos análogos a los empleados en J_1 para el valor J_2, nos permiten concluir que J_2 satisface que

$$
\begin{aligned}
J_2 &= \|K_\gamma(|u|^2-|v|^2)\|_{L^\infty}\|(I-\Delta)^{s/2}v\|_{L^2}\\
&\leq C\|v\|_{H^s}(\|u\|_{H^s}+\|v\|_{H^s})\|u-v\|_{H^s},\ u,v\in H^s,
\end{aligned} \tag{4.0.33}
$$

para una constante no negativa C. En consecuencia, usando la desigualdad (4.0.25) y estimaciones (4.0.27)-(4.0.33), se concluye que

$$
\begin{aligned}
\|G(u)-G(v)\|_{\dot{H}^s} &\leq \|(-\Delta)^{s/2}K_\gamma(|u|^2)(u-v)\|_{L^2}+\|(-\Delta)^{s/2}K_\gamma(|u|^2-|v|^2)v\|_{L^2}\\
&\leq C\left(2\|u\|_{H^s}+2\|v\|_{H^s}(\|u\|_{H^s}+\|v\|_{H^s})\right)\cdot\|u-v\|_{H^s},
\end{aligned} \tag{4.0.34}
$$

para cada $u,v\in H^s$. Luego, usando la estimación proporcionada por el Lema 4.0.18 junto con la desigualdad (4.0.34), nos permite deducir que $G(u)-G(v)\in L^2\cap\dot{H}^s$. Más aún, debido a la estimación (4.0.23), (4.0.34) y nuestro Lema 4.0.18 se sigue la siguiente estimación:

$$
\|G(u)-G(v)\|_{H^s}\leq C(\|u\|_{H^s}^2+\|u\|_{H^s}+\|v\|_{H^s}^2+\|u\|_{H^s}\|v\|_{H^s})\cdot\|u-v\|_{H^s},
$$

para $u,v\in H^s$. ■

4.1 Ecuación de Schrödinger tiempo-espacio fraccionario, caso no lineal

En esta sección, nuestro objetivo será estudiar una clase de ecuaciones de Schrödinger tiempo-espacio fraccionario con una no linealidad tipo Hartree. Más precisamente, estamos interesados en establecer existencia y unicidad local (en tiempo) de solución para el siguiente problema:

$$\begin{cases} i^\alpha \, \mathbf{D}_t^\alpha \, u(t,x) = (-\Delta)^{s/2} u(t,x) + \lambda J_t^{1-\alpha} K_\gamma(|u|^2)(x) u(t,x), & (0,T] \times \mathbb{R}^n \\ \quad u(0,x) = u_0(x), \; u_0 \in H^s, \end{cases} \tag{4.1.1}$$

donde $\alpha \in (0,1)$, $s > 0$, $\lambda \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$. Consideramos en nuestro problema (4.1.1), un término K_γ definido sobre $u \in L^p$, como el operador convolución

$$K_\gamma(u)(x) = (\psi_\gamma * u)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \psi_\gamma(x-y) u(y) dy,$$

donde $\psi_\gamma = \dfrac{\psi}{|\cdot|^\gamma}$, para $\gamma \in (0,n)$, $\psi \in L^\infty$. Note que, el funcional no lineal tipo Hartree es la aplicación $u \mapsto G(u) := K_\gamma(|u|^2)u$. En lo que sigue, probaremos existencia y unicidad de solución para el problema (4.1.1). Para este propósito, nuestra herramienta principal será el Teorema de punto fijo de Banach y la serie de Lemas descritos en la sección previa asociados a la aplicación $u \mapsto K_\gamma(|u|^2)$.

4.1.1 Fórmula de variación de constantes: Métodos de transformadas

Nuestro interés, en esta sección es determinar una representación integral de nuestra ecuación de Schrödinger de orden fraccionario,

$$i^\alpha \, \mathbf{D}_t^\alpha \, u(t,x) = (-\Delta)^{s/2} u(t,x) + \lambda K_\gamma(|u|^2)(x) u(t,x), \quad (0,\infty) \times \mathbb{R}^n, \tag{4.1.2}$$

donde $i^\alpha = e^{i\alpha\frac{\pi}{2}}$, $\mathbf{D}_t^\alpha$ denota la derivada en el sentido de Caputo de orden $\alpha \in (0,1)$, $(-\Delta)^{s/2}$ operador no local definido previamente como operador pseudo-diferencial con símbolo $|\xi|^s$ sobre $\mathbb{R}^n$. Cabe señalar que el procedimiento que indicaremos a continuación es válido para otros tipo de derivadas fraccionarias, por ejemplo derivada en el sentido de Riemann-Liouville; no obstante, la representación final de la fórmula de variación de parámetro varía de acuerdo al tipo de derivada fraccionaria empleada inicialmente en el problema.

Suponer $\alpha \in (0,1), s > 0$ fijos. Luego, aplicando transformada de Fourier $\mathcal{F}$ en ambos lados de (4.1.2) con respecto a la variable espacial $x \in \mathbb{R}^n$, y después tomando la transformada de Laplace $\mathcal{L}$ sobre ambos lados de (4.1.2) con respecto a la variable temporal $t > 0$, y debido a la fórmula (A.1.19) para $\Re(z) > 0$, Lema A.2.2 para $w = (-i)^\alpha |\xi|^s$, y el hecho que

$$\mathcal{L}\{J_t^{1-\alpha} \mathcal{F}(G(u))(\xi)\}(z) = z^{\alpha-1} \mathcal{L}\mathcal{F}(G(u))(\xi),$$

permite obtener que,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{LF}(u)(z,\xi) &= \frac{z^{\alpha-1}}{z^\alpha-(-i)^\alpha|\xi|^s}\hat{u}_0(\xi)+\lambda(-i)^\alpha\frac{z^{\alpha-1}}{z^\alpha-(-i)^\alpha|\xi|^s}\mathcal{LF}(G(u))(z,\xi), \quad \lambda\neq 0\\
&= \mathcal{L}\{E_\alpha((-it)^\alpha|\xi|^s)\hat{u}_0(\xi)\}(z)+\lambda(-i)^\alpha\mathcal{L}\{E_\alpha((-it)^\alpha|\xi|^s)*\mathcal{F}(G(u))(\xi)\}(z)\\
&= \mathcal{L}\{E_\alpha((-it)^\alpha|\xi|^s)\hat{u}_0(\xi)+\lambda(-i)^\alpha E_\alpha((-it)^\alpha|\xi|^s)*\mathcal{F}(G(u))(\xi)\}(z)
\end{aligned}
\tag{4.1.3}
$$

donde $(-i)^\alpha = e^{-i\alpha\frac{\pi}{2}}$, $u\mapsto G(u) := K_\gamma(|u|^2)u$. Luego, debido a la unicidad de la transformada de Laplace e inversión de la transformada de Fourier se tiene a partir de (4.1.3) la fórmula de variación de parámetro(1) asociada a nuestro problema (4.1.1):

$$
u(t,x)=\mathcal{F}^{-1}[E_\alpha((-it)^\alpha|\xi|^s)\hat{u}_0(\xi)](x)+\lambda(-i)^\alpha\int_0^t\mathcal{F}^{-1}[E_\alpha((-i(t-\tau))^\alpha|\xi|^s)\mathcal{F}(G(u))(\xi)](x)d\tau, \tag{4.1.4}
$$

donde $\lambda\neq 0$.

De este modo, a partir del cálculo formal realizado previamente para conseguir una representación integral de nuestro problema (4.1.1). En la siguiente sección, proporcionamos la definición de solución débil y resultado que garantiza la existencia y unicidad local de nuestra solución.

4.1.2 Existencia y unicidad de solución local

En esta sección, estaremos interesados en demostrar la existencia y unicidad de solución débil sobre el espacio de funciones continuas con valores en el espacio de Sobolev H^s, esto es, $C([0,T];H^s)$ para la clase de ecuaciones de Schrödinger tiempo-espacio fraccionario no lineal (4.1.1).

Definición 4.1.1. [Solución débil] Sea $\alpha\in(0,1)$, $s\in(0,1)$, $u_0\in H^s$. Una función $u\in C([0,T];H^s)$ se denomina una solución débil de (4.1.1) si u satisface la siguiente representación integral

$$
u(t,x)=\mathcal{F}^{-1}[E_\alpha((-it)^\alpha|\xi|^s)\hat{u}_0(\xi)](x)+\lambda(-i)^\alpha\int_0^t\mathcal{F}^{-1}[E_\alpha((-i(t-\tau))^\alpha|\xi|^s)\mathcal{F}(G(u))(\xi)](x)d\tau, \tag{4.1.5}
$$

donde $E_\alpha(\cdot)$, $u\mapsto G(u)=K_\gamma(|u|^2)u$ denotan la función de Mittag-Leffler y la no linealidad tipo Hartree, respectivamente.

A partir de ahora, estamos preparados para demostrar existencia y regularidad de solución débil de nuestro problema de interés. Por brevedad en la notación, en el siguiente resultado adoptaremos la L^∞ norma sobre el espacio $\mathcal{C}([0,T];H^s)$, como $\|u\|_\infty=\sup_{t\in[0,T]}\|u(t,\cdot)\|_{H^s}$. Denotaremos $u(t,\cdot)=u$ a menos

(1)La fórmula de Duhamel de orden fraccionario, se sugiere ver e.g., [12, Proposición 3.1.3].

que se especifique otra cosa. Además si X es cualquiera de los espacios bajo consideración, simplemente escribiremos $u \in X$ cuando $u(t,\cdot) \in X$ para $t \in [0,T]$.

Teorema 4.1.2. *Sea $\alpha \in (0,1)$, $\gamma/2 \leq s < 1$, $n \geq 2$. Suponer que $u_0 \in H^s$, $\psi \in L^\infty$ tal que $|\psi(x)| \leq Me^{-\mu|x|}$, $\mu \geq 0, x \in \mathbb{R}^n$. Entonces existe $T := T_{\|u_0\|_{H^s},n,\lambda,\gamma} > 0$, de modo que la ecuación (4.1.1) posee única solución débil $u \in C([0,T];H^s)$, tal que*

$$\|u\|_\infty \leq \tilde{C}\|u_0\|_{H^s}, \tag{4.1.6}$$

donde $\tilde{C} := \tilde{C}_{r,\lambda,T,M} > 0$. Más aún, la aplicación $\mathbb{F}$ que asocia la condición inicial u_0 a una única solución débil u, esto es, $\mathbb{F} : H^s \to C([0,T];H^s)$, donde $u_0 \mapsto u$ es continua sobre H^s.

Demostración. Sea $T > 0$ fijo, y considere $r := 2\sqrt{2}M\|u_0\|_{H^s}$. Denotaremos la bola cerrada sobre el espacio $C([0,T];H^s)$ como

$$B_r := \{u \in C([0,T];H^s) : \|u\|_\infty \leq r\}.$$

Note que la constante no negativa M que define al radio r es considerado a partir del Lema A.2.3 parte (i). Luego, bajo estas condiciones definimos el operador no lineal $\Phi_{u_0} : u \mapsto \Phi_{u_0}(u)$ sobre la bola B_r como

$$\Phi_{u_0}(u)(t,x) := \mathcal{F}^{-1}[E_\alpha((-it)^\alpha|\xi|^s)\hat{u}_0(\xi)](x) + \lambda(-i)^\alpha \int_0^t \mathcal{F}^{-1}[E_\alpha((-i(t-\tau))^\alpha|\xi|^s)\mathcal{F}(G(u))(\xi)](x)d\tau.$$

De este modo, aplicando la transformada de Fourier $\mathcal{F}$ en el sentido de las distribuciones temperada $\mathcal{S}'$ sobre la representación de $\Phi_{u_0}(u)$, permite conseguir que

$$\mathcal{F}\Phi_{u_0}(u)(t,\xi) = E_\alpha((-it)^\alpha|\xi|^s)\hat{u}_0(\xi) + \lambda(-i)^\alpha \int_0^t E_\alpha((-i(t-\tau))^\alpha|\xi|^s)\mathcal{F}(G(u))(\xi)d\tau, \tag{4.1.7}$$

para $u \in B_r$. En consecuencia, a partir de la ecuación (4.1.7) junto a una desigualdad elemental de cálculo[(2)] para

$$z = E_\alpha((-it)^\alpha|\xi|^s)\hat{u}_0(\xi), \quad w = \lambda(-i)^\alpha \int_0^t E_\alpha((-i(t-\tau))^\alpha|\xi|^s)\mathcal{F}(G(u))(\xi)d\tau,$$

con $p = 2$, Lema A.2.3 parte (i) para $z = (-it)^\alpha|\xi|^s$ y la desigualdad de Hölder con respecto a la variable

---

[(2)] Suponer $p \in (0,\infty)$, $\gamma_p := \text{máx}\{1, 2^{p-1}\}$. Entonces se satisface que

$$|z \mp w|^p \leq \gamma_p(|z|^p + |w|^p), \quad z,w \in \mathbb{C}.$$

temporal nos permite deducir que

$$\begin{aligned}
|\mathcal{F}\Phi_{u_0}(u)(t,\xi)|^2 &= \left| E_\alpha((-it)^\alpha|\xi|^s)\hat{u}_0(\xi) + \lambda(-i)^\alpha \int_0^t E_\alpha((-i(t-\tau))^\alpha|\xi|^s)\mathcal{F}(G(u))(\xi)d\tau \right|^2 \\
&\leq 2|E_\alpha((-it)^\alpha|\xi|^s)\hat{u}_0(\xi)|^2 + 2\left|\lambda \int_0^t E_\alpha((-i(t-\tau))^\alpha|\xi|^s)\mathcal{F}G(u)(\xi)d\tau\right|^2 \\
&\leq 2M^2|\hat{u}_0(\xi)|^2 + 2\lambda^2 \int_0^t |E_\alpha((-i(t-\tau))^\alpha|\xi|^s)|^2 d\tau \int_0^t |\mathcal{F}G(u)(\xi)|^2 d\tau \\
&\leq 2M^2|\hat{u}_0(\xi)|^2 + 2\lambda^2 M^2 T \int_0^t |\mathcal{F}G(u(\tau))(\xi)|^2 d\tau, \qquad (4.1.8)
\end{aligned}$$

para M constante no negativa, $\lambda \in \mathbb{R}$ no nulo. Luego, debido a nuestra estimación (4.1.8) y usando el teorema de Fubini se tiene que

$$\begin{aligned}
\|\Phi_{u_0}(u)\|_{H^s}^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^s |\mathcal{F}\Phi_{u_0}(u)(t,\xi)|^2 d\xi \\
&\leq 2M^2 \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^s |\hat{u}_0(\xi)|^2 d\xi + 2\lambda^2 M^2 T \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^s \int_0^t |\mathcal{F}G(u(\tau))(\xi)|^2 d\tau d\xi \\
&= 2M^2\|u_0\|_{H^s}^2 + 2\lambda^2 M^2 T \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^s |\mathcal{F}G(u(\tau))(\xi)|^2 d\xi d\tau \\
&= 2M^2\|u_0\|_{H^s}^2 + 2\lambda^2 M^2 T \int_0^t \|G(u(\tau))\|_{H^s}^2 d\tau \\
&\leq 2M^2\|u_0\|_{H^s}^2 + 2(\lambda M T)^2 \sup_\tau \|G(u(\tau))\|_{H^s}^2. \qquad (4.1.9)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, debido a nuestra estimación (4.1.9) es directo que

$$\begin{aligned}
\|\Phi_{u_0}(u)\|_\infty &= \sup_{t\in[0,T]} \|\Phi_{u_0}(u)(t)\|_{H^s} \\
&\leq 2^{1/2}M\|u_0\|_{H^s} + 2^{1/2}\lambda M T \left(\sup_\tau \|G(u)(\tau)\|_{H^s}^2\right)^{1/2} \qquad (4.1.10) \\
&\leq 2^{1/2}M\|u_0\|_{H^s} + 2^{1/2}\lambda M T \sup_\tau \|G(u)(\tau)\|_{H^s}.
\end{aligned}$$

En consecuencia, a partir de la estimación (4.1.10) y debido a que estamos interesados en asegurar que $\Phi_{u_0}(u) \in B_r$, para cada $u \in B_r$, luego es suficiente estimar la cantidad $\|G(u)(\tau)\|_{H^s}$. Ahora, sea $s \in (0,1)$. Luego, por Proposición 1.1.14 existe una constante no negativa C, de modo que

$$\|G(u)\|_{H^s} \leq C(\|G(u)\|_{L^2} + \|(-\Delta)^{s/2}G(u)\|_{L^2}). \qquad (4.1.11)$$

Con el objetivo de estimar ambas cantidades del lado derecho de (4.1.11), notamos en primer lugar que debido a que $K_\gamma(|u|^2) \in L^\infty$ por Lema 4.0.14 y $u \in H^s \subseteq L^2$. Entonces, por desigualdad de Hölder

(Teorema A.3.10) para $r = 2, p = \infty$, $q = 2$ se tiene que $G(u) \in L^2$ y se satisface que

$$\|G(u)\|_{L^2} = \|K_\gamma(|u|^2)u\|_{L^2} \leq \|K_\gamma(|u|^2)\|_{L^\infty}\|u\|_{L^2}. \tag{4.1.12}$$

En una segunda parte, deseamos estimar la cantidad $\|(-\Delta)^{s/2}G(u)\|_{L^2}$ del lado derecho de (4.1.11). Para esto, notamos que $K_\gamma(|u|^2) \in H^{s,2n/\gamma} \cap L^\infty$ por Lema 4.0.14, Lema 4.0.16; y ya que $H^s \hookrightarrow L^{2n/n-\gamma}$ se tiene que $u \in H^s \cap L^{2n/n-\gamma} = H^s$. Entonces, por la Proposición 4.0.12 para $\sigma = s$, $r = 2, p_1 = 2n/\gamma, q_1 = 2n/n-\gamma$, $p_2 = \infty$, $q_2 = 2$, se concluye que $G(u) \in \dot{H}^s$ y existe una constante no nula C, tal que se satisface la siguiente estimación

$$\begin{aligned}\|(-\Delta)^{s/2}G(u)\|_{L^2} &= \|(-\Delta)^{s/2}K_\gamma(|u|^2)u\|_{L^2} \\ &\leq C\Big(\|(I-\Delta)^{s/2}K_\gamma(|u|^2)\|_{L^{2n/\gamma}}\|u\|_{L^{2n/n-\gamma}} \\ &\quad +\|K_\gamma(|u|^2)\|_{L^\infty}\|(I-\Delta)^{s/2}u\|_{L^2}\Big).\end{aligned} \tag{4.1.13}$$

En consecuencia, debido a la desigualdad (4.1.11) junto a las estimaciones (4.1.12),(4.1.13) y nuestro Lema 4.0.15 permiten obtener que

$$\begin{aligned}\|G(u)\|_{H^s} &\leq C\Big(\|K_\gamma(|u|^2)\|_{L^\infty}\|u\|_{L^2} + \|(I-\Delta)^{s/2}K_\gamma(|u|^2)\|_{L^{2n/\gamma}}\|u\|_{L^{2n/n-\gamma}} \\ &\quad +\|K_\gamma(|u|^2)\|_{L^\infty}\|(I-\Delta)^{s/2}u\|_{L^2}\Big) \\ &\leq C(\|K_\gamma(|u|^2)\|_{L^\infty}(\|u\|_{L^2} + \|u\|_{H^s}) + \|u\|_{L^{2n/n-\gamma}}\|K_\gamma(|u|^2)\|_{H^{s,2n/\gamma}}) \\ &\leq C(\|K_\gamma(|u|^2)\|_{L^\infty}\|u\|_{H^s} + \|u\|_{L^{2n/n-\gamma}}\|K_\gamma(|u|^2)\|_{H^{s,2n/\gamma}}).\end{aligned} \tag{4.1.14}$$

Por lo tanto, a partir de nuestra estimación (4.1.14), y como consecuencia de la inclusión $H^s \hookrightarrow L^{2n/n-\gamma}$, Lema 4.0.14, Lema 4.0.16 permite concluir que

$$\begin{aligned}\|G(u)\|_{H^s} &\leq C(\|u\|^2_{\dot{H}^{\gamma/2}}\|u\|_{H^s} + \|u\|^2_{H^s}\|u\|_{L^{2n/n-\gamma}}) \\ &\leq C(\|u\|^2_{H^{\gamma/2}}\|u\|_{H^s} + \|u\|^3_{H^s}) \\ &\leq C\|u\|^3_{H^s},\end{aligned} \tag{4.1.15}$$

donde C es alguna constante no negativa. De esta forma, a partir de (4.1.10) y (4.1.15) se tiene finalmente que

$$\begin{aligned}\|\Phi_{u_0}(u)\|_\infty &\leq 2^{1/2}M\|u_0\|_{H^s} + 2^{1/2}\lambda MT\sup_\tau\|G(u)(\tau)\|_{H^s} \\ &\leq 2^{1/2}M\|u_0\|_{H^s} + 2^{1/2}\lambda MTC\|u\|^3_\infty \\ &\leq 2^{1/2}M\|u_0\|_{H^s} + 2^{1/2}\lambda MTC\|u\|^3_\infty \\ &\leq \frac{r}{2} + 2^{1/2}\lambda MTCr^3 \leq r,\end{aligned} \tag{4.1.16}$$

si $T > 0$ es suficientemente pequeño podemos concluir que el operador no lineal Φ_{u_0} deja invariante a la bola cerrada $B_r \subset C([0,T]; H^s)$, es decir, $\Phi_{u_0}(B_r) \subseteq B_r$. Más aún, basta tomar $T = 1/\lambda MC\|u_0\|^2_{H^s}$.

Ahora, estaremos interesados en demostrar que el operador Φ_{u_0} es una aplicación Lipschitz para T suficientemente pequeño sobre la bola B_r. Para esto, considere $u, v \in B_r$ y denotamos como es usual

$$\|\Phi_{u_0}(u) - \Phi_{u_0}(v)\|_\infty = \sup_{t\in[0,T]} \|(\Phi_{u_0}(u) - \Phi_{u_0}(v))(t)\|_{H^s},$$

donde por brevedad definimos el operador diferencia $\Gamma_{u_0}(u,v)$ como,

$$\begin{aligned}\Gamma_{u_0}(u,v)(t) &:= (\Phi_{u_0}(u) - \Phi_{u_0}(v))(t)\\ &= \lambda(-i)^\alpha \int_0^t \mathcal{F}^{-1}[E_\alpha((-i(t-\tau))^\alpha|\xi|^\beta)(\mathcal{F}G(u)(\xi) - \mathcal{F}G(v)(\xi))](x)d\tau.\end{aligned}$$

De este modo, usando esta última identidad junto a la desigualdad de Hölder, Lema A.2.3 parte (i) para $z = (-i(t-\tau))^\alpha|\xi|^\beta$ y teorema de Fubini, permiten concluir que

$$\begin{aligned}\|\Gamma_{u_0}(u,v)(t)\|^2_{H^s} &:= \int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{F}(\Phi_{u_0}(u) - \Phi_{u_0}(v))(t,\xi)|^2 d\mu(\xi), \quad d\mu(\xi) := (1+|\xi|^2)^s d\xi\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left|\lambda(-i)^\alpha \int_0^t E_\alpha((-i(t-\tau))^\alpha|\xi|^\beta)(\mathcal{F}G(u)(\xi) - \mathcal{F}G(v)(\xi))d\tau\right|^2 d\mu(\xi)\\ &\le \lambda^2 \int_{\mathbb{R}^n}\int_0^t |E_\alpha((-i(t-\tau))^\alpha|\xi|^\beta)|^2 d\tau \cdot \int_0^t |\mathcal{F}G(u)(\tau,\xi) - \mathcal{F}G(v)(\tau,\xi)|^2 d\tau d\mu(\xi)\\ &\le \lambda^2 M^2 T \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^s |\mathcal{F}G(u)(\tau,\xi) - \mathcal{F}G(v)(\tau,\xi)|^2 d\xi d\tau\\ &\le (\lambda TM)^2 \sup_{\tau\in[0,T]} \|G(u)(\tau) - G(v)(\tau)\|^2_{H^s},\end{aligned}$$

es decir, observamos que $\|\Phi_{u_0}(u) - \Phi_{u_0}(v)\|_\infty \le \lambda TM\|G(u) - G(v)\|_\infty$. De hecho, empleando nuestro Lema 4.0.19, existe una constante no negativa C de modo que se satisface la siguiente estimación

$$\begin{aligned}\|G(u) - G(v)\|_{H^s} &\le C(\|u\|^2_{H^s} + \|u\|_{H^s} + \|v\|^2_{H^s} + \|u\|_{H^s}\|v\|_{H^s}) \cdot \|u-v\|_{H^s}\\ &\le C(3r^2 + r) \cdot \|u-v\|_{H^s},\end{aligned} \tag{4.1.17}$$

para cada $u, v \in B_r$. En consecuencia, bajo estos requerimientos tenemos que

$$\begin{aligned}\|\Phi_{u_0}(u) - \Phi_{u_0}(v)\|_\infty &= \sup_{t\in[0,T]} \|(\Phi_{u_0}(u) - \Phi_{u_0}(v))(t)\|_{H^s}\\ &\le (3r^2 + r)\lambda TMC\|u-v\|_\infty,\end{aligned}$$

entonces, si asumimos que $T \leq 1/\lambda M^2 C(24M\|u_0\|_{H^s}^2 + 2\sqrt{2}\|u_0\|_{H^s})$ se puede concluir que Φ_{u_0} es un operador Lipschitz sobre la bola $B_r \subseteq \mathcal{C}([0,T];H^s)$. De este modo, Φ_{u_0} tiene un único punto fijo $u \in B_r$ debido al Teorema de punto fijo de Banach, el cual representa la solución débil de nuestro problema (4.1.1) sobre $(0,T]$.

Ahora, estaremos interesados en probar que nuestra aplicación u es continua sobre $[0,T]$, para $T > 0$ fijo. En efecto, para este propósito consideramos una sucesión t_n convergente, tal que $t_n \to t_0 \in [0,T]$, para n suficientemente grande. Luego, tenemos que

$$\begin{aligned} \|u(t_n) - u(t_0)\|_{H^\beta}^2 &= \|(1+|\xi|^2)^{\beta/2}\mathcal{F}(u(t_n) - u(t_0))\|_{L^2}^2 \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^\beta |\hat{u}(t_n,\xi) - \hat{u}(t_o,\xi)|^2 d\xi, \end{aligned} \tag{4.1.18}$$

donde debido a la definición de u en (4.1.5), continuidad de la transformada de Fourier inversa $\mathcal{F}^{-1}$ obtenemos que

$$\begin{aligned} \hat{u}(t_n,\xi) - \hat{u}(t_o,\xi) &= (a(t_n) - a(t_0))\hat{u}_0(\xi) \\ &\quad + \lambda(-i)^\alpha \left(\int_0^{t_n} a(t_n - s)b(s)ds - \int_0^{t_0} a(t_0 - s)b(s)ds \right), \ \lambda \neq 0, \end{aligned} \tag{4.1.19}$$

donde denotamos $a(\cdot) = E_\alpha((-i\cdot)^\alpha|\xi|^\beta)$, $b(\cdot) = \mathcal{F}(K_\gamma(|u(\cdot)|^2)u)$ para $K_\gamma(|u(\cdot)|^2)u \in H^\beta$ si $u \in H^\beta$. De este modo, a partir de la identidad (4.1.19) tenemos que

$$\begin{aligned} |\hat{u}(t_n,\xi) - \hat{u}(t_o,\xi)|^2 &\leq 2|(a(t_n) - a(t_0))\hat{u}_0(\xi)|^2 \\ &\quad + 2\left|\lambda(-i)^\alpha \left(\int_0^{t_n} a(t_n - s)b(s)ds - \int_0^{t_0} a(t_0 - s)b(s)ds \right)\right|^2 \\ &= 2|(a(t_n) - a(t_0))\hat{u}_0(\xi)|^2 + 2|\lambda|^2 \left|(a*b)(t_n) - (a*b)(t_0)\right|^2. \end{aligned} \tag{4.1.20}$$

Luego,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |(a(t_n) - a(t_0))\hat{u}_0(\xi)|^2 d\mu(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} |(E_\alpha((-it_n)^\alpha|\xi|^\beta) - E_\alpha((-it_0)^\alpha|\xi|^\beta))|^2 |\hat{u}_0(\xi)|^2 d\mu(\xi), \tag{4.1.21}$$

donde la parte derecha converge a cero, cuando $t_n \to t_0$, ya que la aplicación $t \mapsto E_\alpha((-it)^\alpha|\xi|^\beta)$ es continua, $(E_\alpha((-it_n)^\alpha|\xi|^\beta) - E_\alpha((-it_0)^\alpha|\xi|^\beta))$ es acotada debido al Lema A.2.3 parte (i), $u_0 \in H^\beta$. Así, por una aplicación del teorema de convergencia dominada se tiene lo deseado. Por otra parte, notamos que el segundo término del lado derecho de (4.1.20) satisface que

$$\begin{aligned} (a*b)(t_n) - (a*b)(t_0) &= \int_0^{t_n} (a(t_n - s) - a(t_0 - s))b(s)ds + \int_{t_0}^{t_n} a(t_0 - s)b(s)ds \\ &\leq \int_0^T (a(t_n - s) - a(t_0 - s))b(s)ds + \int_{t_0}^{t_n} a(t_0 - s)b(s)ds, \end{aligned} \tag{4.1.22}$$

luego debido a (4.1.22), $u \in H^\beta$ y usando la desigualdad de Hölder se tiene que

$$\begin{aligned} |\lambda|^2 \int_{\mathbb{R}^n} |(a*b)(t_n) - (a*b)(t_0)|^2 d\mu(\xi) &\leq 2|\lambda|^2 \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_0^T (a(t_n - s) - a(t_0 - s)) b(s) ds \right|^2 d\mu(\xi) \\ &+ 2|\lambda|^2 \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_0^{t_n} a(t_0 - s) b(s) ds \right|^2 d\mu(\xi) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \end{aligned} \tag{4.1.23}$$

donde $a(t_n - s) = E_\alpha((-i(t_n - s))^\alpha |\xi|^\beta), a(t_0 - s) = E_\alpha((-i(t_0 - s))^\alpha |\xi|^\beta)$, $b(s) = \mathcal{F}(K_\gamma(|u(\cdot)|^2)u)$. En consecuencia, a partir de (4.1.18) y usando (4.1.20) junto con (4.1.21), (4.1.23) se concluye la continuidad de la función u definida en (4.1.1).

Como segunda etapa, estaremos interesados en demostrar la estimación (4.1.6). Para conseguir esto, considere la estimación (4.1.16), $u \in B_r$, y $2^{1/2}\lambda MTCr^2 < 1$, luego

$$\|u\|_\infty \leq \tilde{C}\|u_0\|_{H^s},$$

donde $\tilde{C} = 2^{1/2}M/(1 - 2^{1/2}\lambda MTCr^2)$.
Finalmente, en lo que sigue estaremos interesados en demostraremos la dependencia continua de $\mathbb{F} : u_0 \mapsto \mathbb{F}(u_0) = u$ con respecto a la condición inicial $u_0 \in H^s$. Para conseguir esto, notamos que si u, v representan soluciones débiles del problema (4.1.1) con condiciones iniciales u_0, v_0, entonces es directo que

$$\begin{aligned} u(t,x) - v(t,x) &= \mathcal{F}^{-1}[E_\alpha((-it)^\alpha |\xi|^s)(\hat{u}_0(\xi) - \hat{v}_0(\xi))](x) \\ &+ \lambda(-i)^\alpha \int_0^t \mathcal{F}^{-1}[E_\alpha((-i(t-\tau))^\alpha |\xi|^s)(\mathcal{F}(G(u))(\xi) - \mathcal{F}(G(v))(\xi))](x) d\tau. \end{aligned} \tag{4.1.24}$$

Luego, aplicando transformada de Fourier $\mathcal{F}$ sobre ambos lados de la identidad (4.1.24), permite conseguir que

$$\begin{aligned} \hat{u}(t,\xi) - \hat{v}(t,\xi) &= E_\alpha((-it)^\alpha |\xi|^s)(\hat{u}_0(\xi) - \hat{v}_0(\xi)) \\ &+ \lambda(-i)^\alpha \int_0^t E_\alpha((-i(t-\tau))^\alpha |\xi|^s)(\mathcal{F}(G(u))(\xi) - \mathcal{F}(G(v))(\xi)) d\tau. \end{aligned} \tag{4.1.25}$$

Ahora, por brevedad denotaremos el diferencial $d\mu(\xi) := (1 + |\xi|^2)^s d\xi$. De este modo, usando nuestra identidad (4.1.25) y argumentos previos, se sigue que

$$
\begin{aligned}
\|u-v\|_{H^s}^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} |E_\alpha((-it)^\alpha|\xi|^s)(\hat{u}_0(\xi)-\hat{v}_0(\xi)) \\
&+ \lambda(-i)^\alpha \int_0^t E_\alpha((-i(t-\tau))^\alpha|\xi|^s)(\mathcal{F}(G(u))(\xi)-\mathcal{F}(G(v))(\xi))d\tau\Big|^2 d\mu(\xi) \\
&\leq 2\int_{\mathbb{R}^n} |E_\alpha((-it)^\alpha|\xi|^s)|^2|\hat{u}_0(\xi)-\hat{v}_0(\xi)|^2 d\mu(\xi) \\
&+ 2\lambda^2 \int_{\mathbb{R}^n} \left|\int_0^t E_\alpha((-i(t-\tau))^\alpha|\xi|^s)(\mathcal{F}(G(u))(\xi)-\mathcal{F}(G(v))(\xi))d\tau\right|^2 d\mu(\xi) \\
&\leq 2M^2\|u_0-v_0\|_{H^s}^2 \\
&+ 2\lambda^2 \int_{\mathbb{R}^n}\int_0^t |E_\alpha((-i(t-\tau))^\alpha|\xi|^s)|^2 d\tau \cdot \int_0^t |\mathcal{F}(G(u))(\xi)-\mathcal{F}(G(v))(\xi)|^2 d\tau d\mu(\xi) \\
&\leq 2M^2\|u_0-v_0\|_{H^s}^2 + 2\lambda^2M^2T\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|^2)^s|\mathcal{F}(G(u)-G(v))(\xi)|^2 d\xi d\tau \\
&= 2M^2\|u_0-v_0\|_{H^s}^2 + 2\lambda^2M^2T\int_0^t \|G(u)(\tau)-G(v)(\tau)\|_{H^s}^2 d\tau \\
&\leq 2M^2\|u_0-v_0\|_{H^s}^2 + 2(\lambda MT)^2\sup_\tau \|G(u)(\tau)-G(v)(\tau)\|_{H^s}^2.
\end{aligned}
\tag{4.1.26}
$$

Luego, debido a (4.1.26) y nuestra estimación (4.1.17) se concluye que

$$
\|u-v\|_\infty \leq \widetilde{K}\|u_0-v_0\|_{H^s},
$$

donde $\widetilde{K} = 2^{1/2}M/(1-2^{1/2}\lambda MTC(3r^2+r))$, para $2^{1/2}\lambda MTC(3r^2+r) < 1$. ■

APÉNDICE A

Apéndice

En este apéndice proporcionaremos algunos conceptos preliminares relacionados a la derivada e integración temporal de orden fraccionario en el sentido de Caputo y Riemann-Liouville, función de Mittag-Leffler, transformada de Laplace, desigualdad de Hardy, desigualdad de Hardy-Littlewood-Sobolev, estimación de la regla de Leibniz de orden fraccionario, y algunos resultados vinculados a la teoría de semigrupo de operadores junto con un lema de subordinación de operadores solución. Más precisamente, nuestra sección A.1 corresponde a un reescritura del capítulo 1 de la tesis de Bajlekova, E. [5], donde describimos las propiedades básicas de la derivada e integración en el sentido Riemann-Liouville junto con la derivada en el sentido de Caputo y la transformada de Laplace de dichos operadores de orden fraccionarios. La sección A.2, corresponde a resultados provenientes del capítulo 1 del texto de Podlubny, I. [54], donde se establecen algunas estimaciones básicas de la función de Mittag-Leffler $E_\alpha(\cdot)$ sobre ciertos sectores angulares del plano complejo $\mathbb{C}$, además se describe la transformada de Laplace y una representación asintótica de nuestra función entera. En cuanto a la sección A.3, corresponde a una reescritura de la sección 3.3-3.4 del capítulo 3 del texto de Taylor, M. [65], donde describimos las propiedades básicas de la transformada de Fourier en el sentido de las distribuciones, teorema de Plancherel sobre $L^2(\mathbb{R}^n)$, junto con la desigualdad de Hardy, desigualdad de Hardy-Littlewood-Sobolev, estimación de la regla de Leibniz de orden fraccionario, entre otros resultados de interés. Finalmente, la sección A.4 contiene resultados provenientes de la parte I, capítulo 3 del texto de Arendt, et al. [1] junto con capítulo 2 de la tesis de Bajlekova, E. [5], en esta parte se presenta de forma breve algunos resultados asociado a semigrupos de operadores y familia de operadores solución. Para más detalles, de los tópicos discutidos en este apéndice se sugiere ver, e.g., $[1, 5, 26, 41, 54, 69]$ y las referencias que ahí aparecen.

A.1 Derivada e integración de orden fraccionario en sentido de Caputo y Riemann-Liouville

Sea $\alpha > 0$ fijo, $\lceil \alpha \rceil$ denota el menor entero mayor o igual a α. Denotaremos por X, Y espacios de Banach complejos con normas $\| \cdot \|_X, \| \cdot \|_Y$, respectivamente. Luego, diremos que el espacio de Banach X es continuamente incrustado en el espacio de Banach Y, lo cual denotaremos como $X \hookrightarrow Y$, si $X \subseteq Y$ y existe una constante no negativa C tal que $\| \cdot \|_Y \leq C \| \cdot \|_X$.

Recordamos que dado $k \in L^1(\mathbb{R}_+), u \in L^1(\mathbb{R}_+; X)$, definimos el producto convolución finito sobre $\mathbb{R}_+ := [0, \infty)$ como,

$$(k * u)(t) := \int_0^t k(t-\tau)u(\tau)d\tau, \ t \in \mathbb{R}_+. \tag{A.1.1}$$

A continuación, describimos la escala de espacios de Sobolev donde naturalmente se define la derivada fraccionaria en el sentido de Riemann-Liouville D_t^α y la derivada fraccionaria en el sentido de Caputo $\mathbf{D}_t^\alpha$, se sugiere ver e.g., [5]:

Definición A.1.1. Sean $m \in \mathbb{N}$, $1 \leq p < \infty$ fijos. El espacio de Sobolev $W^{m,p}(I; X)$ se define como,

$$W^{m,p}(I;X) := \left\{ u | \text{ existe } \varphi \in L^p(I;X) : \ u(t) = \sum_{k=0}^{m-1} c_k \frac{t^k}{k!} + \left(\frac{t^{m-1}}{(m-1)!} * \varphi \right)(t), \ t \in I \right\}. \tag{A.1.2}$$

donde $I = (0, T)$, o bien $I = \mathbb{R}_+$, para cada $T > 0$.

Note que, dado $u \in W^{m,p}(I; X)$ entonces se deduce que

$$D_t^m u(t) = D_t^m \left(c_0 + c_1 t + \cdots + c_{m-1} \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} \right) + D_t^m J_t^m \varphi(t) = \varphi(t) \quad t \in I,$$

donde $c_k \in \mathbb{R}$ para $k = 0, 1, \ldots, m-1$, y denotamos por $J_t^m \varphi(t) = \left(\frac{t^{m-1}}{(m-1)!} * \varphi \right)(t)$, para $\varphi \in L^p(I; X)$. Además, para cada $k = 0, 1, \ldots, m-1$ se desprende de (A.1.2) que

$$u^{(k)}(t) = c_k + \cdots + (m-1)(m-2)\cdots(m-k)c_{m-1} \frac{t^{m-(k+1)}}{(m-1)!} + D_t^k J_t^m \varphi(t) \quad t \in I.$$

Luego, a partir de esta igualdad es directo que $c_k = u^{(k)}(0)$. De este modo, definimos el siguiente subespacio de $W^{m,p}(I; X)$ dado como,

$$W_0^{m,p}(I;X) := \{ u \in W^{m,p}(I;X) | \ u^{(k)}(0) = 0, \ k = 0, 1, \ldots, m-1 \}, \tag{A.1.3}$$

luego, a partir de (A.1.3) es directo que

$$u \in W_0^{m,p}(I;X) \text{ si y sólo si } u = \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} * \varphi,$$

para algún $\varphi \in L^p(I;X)$.

Observación A.1.2. Notamos que, para cada $u \in W^{1,1}(I;X)$ se deduce de la Definición A.1.1 que si

$$\begin{aligned} u \in W^{1,1}(I;X) &\Leftrightarrow \text{ existe } \varphi \in L^1(I;X): \ u(t) = c_0 + (1 * \varphi)(t), \quad t \in I \\ &\Leftrightarrow \text{ existe } \varphi \in L^1(I;X): \ u(t) = \int_0^t \varphi(\tau)d\tau + c_0, \quad t \in I \\ &\Leftrightarrow u \in AC(I;X). \end{aligned}$$

Para un estudio más detallado del espacio de funciones absolutamente continuas $AC(I;X)$, se sugiere consultar e.g., [41].

Considere el espacio localmente L^1 con valores en un Banach, descrito como

$$L^1_{loc}(\mathbb{R}_+;X) := \{u : \mathbb{R}_+ \to X : u \text{ es Bochner integrable sobre } [0,\tau], \tau > 0\}.$$

Luego, la transformada de Laplace de una función $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+;X)$ se define como

$$\mathcal{L}\{u\}(z) = \tilde{u}(z) := \int_0^\infty e^{-zt}u(t)dt, \tag{A.1.4}$$

si la integral converge para algún $z \in \mathbb{C}$. Por ejemplo, si u continua a trozos y es exponencialmente acotada[(1)], entonces la integral (A.1.4) converge absolutamente para $\Re(z) > w$ y define en aquel sector complejo una función analítica, cuya línea vertical izquierda coincide con la cota de crecimiento exponencial w, para propiedades de la transformada de Laplace se sugiere ver e.g., Arendt, et al. [1].

Ahora, sea $\alpha > 0$, $m := \lceil \alpha \rceil$ e $I = (0,T)$ para $T > 0$. Luego, recordamos la definición de núcleo de convolución de orden $\beta > 0$ como

$$g_\beta(t) := \begin{cases} \dfrac{t^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0, \end{cases} \tag{A.1.5}$$

donde $\Gamma(\cdot)$ denota la función gamma de Euler[(2)]. Note que $g_\beta \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+)$, y definimos $g_0 := \delta_0$, donde δ_0 denota la medida de Dirac concentrada en el origen. Note que, la familia $\{g_\alpha(t)\}_{t\geq 0}$ satisface la propiedad de semigrupo:

$$g_\alpha * g_\beta = g_{\alpha+\beta}, \quad \alpha, \beta \geq 0. \tag{A.1.6}$$

Cabe señalar, que nuestra función $t \mapsto g_\beta(t)$ es una función decreciente para $\beta \in (0,1)$, creciente para $\beta > 1$ y $g_1(t) = 1$, para $t \geq 0$.

Ahora, estaremos interesados en introducir los operadores de derivación e integración fraccionarios en

[(1)]La función $u : \mathbb{R}_+ \to X$ es exponencialmente acotada si existe $M > 0, w \in \mathbb{R}$ tal que $\|u(t)\| \leq Me^{wt}$, $t \geq 0$.

[(2)]La función gamma de Euler se define como $\Gamma(\beta) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-t}t^{\beta-1}dt$, $\beta > 0$. Note que $\Gamma(\cdot)$ es analíticamente extendido a todo el plano $\mathbb{C}$ excepto en los puntos $\beta = 0, -1, -2, \ldots$, los cuales son polos simple de la función gamma. Para un estudio más exhaustivo de esta función, ver apéndice A en [26].

sentido de Caputo y Riemann-Liouville y resumir algunas propiedades básicas que utilizaremos durante este trabajo de investigación, se sugiere ver e.g., [5, 41, 54].

Definición A.1.3. Sea $\alpha > 0$ fijo. Considere $u \in L^1(I;X)$, entonces la integral fraccionaria de Riemann-Liouville J_t^α de orden α de la función u se define como

$$J_t^\alpha u(t) := (g_\alpha * u)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} u(\tau) d\tau, \quad t > 0,$$

donde $*$ denota la convolución finita, dada en (A.1.1). Se define, $J_t^0 u(t) := u(t)$, para $t > 0$. Notamos que, debido a (A.1.6) y propiedades elementales de la convolución finita es directo que $\{J_t^\alpha\}_{\alpha>0}$ posee la propiedad de semigrupo: $J_t^\alpha \circ J_t^\beta = J_t^{\alpha+\beta}$, $\alpha, \beta \geq 0$. El siguiente resultado, corresponde a una proposición que describe la transformada de Laplace del operador J_t^α, para u suficientemente regular, se sugiere ver [69]:

Proposición A.1.4. *Sea $\alpha > 0$, fijo. Entonces la transformada de Laplace del operador integral J_t^α es dado por*

$$\mathcal{L}[J_t^\alpha u](z) = z^{-\alpha} \mathcal{L}[u](z), \quad \Re(z) > 0.$$

Para la demostración de la Proposición A.1.4, ver ecuación (3.26), Capítulo 3 en Umarov [69].

En nuestra siguiente definición, aparece de manera natural la escala de espacios $W^{m,p}(I;X)$ para $p = 1$.

Definición A.1.5. Sea $\alpha > 0$, $m = \lceil \alpha \rceil$. Considere $u \in L^1(I;X)$, entonces la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville D_t^α de orden α de la función u se define como

$$\mathrm{D}_t^\alpha u(t) := D_t^m (g_{m-\alpha} * u)(t) = D_t^m J_t^{m-\alpha} u(t), \quad t > 0, \tag{A.1.7}$$

donde $g_{m-\alpha} * u \in W^{m,1}(I;X)$.

Denotamos el operador diferencial de orden entero $D_t^m := \dfrac{d^m}{dx^m}$, para $m \in \mathbb{N}$. Ahora, debido a la Observación A.1.2, se tiene que la Definición A.1.5 para $\alpha \in (0,1)$, se reduce a lo siguiente

$$\mathrm{D}_t^\alpha u(t) := \frac{d}{dt} J_t^{1-\alpha} u(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} u(\tau) d\tau, \quad t > 0,$$

donde $u \in L^1(I;X)$, $g_{1-\alpha} * u \in AC(I;X)$.

Proposición A.1.6. *[54] Sea $\alpha > 0$, $m := \lceil \alpha \rceil$. Entonces la transforma de Laplace de la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville $\mathrm{D}_t^\alpha u$ es dada como*

$$\mathcal{L}[\mathrm{D}_t^\alpha u](z) = z^\alpha \mathcal{L}[u](z) - \sum_{k=0}^{m-1} z^k \left[\mathrm{D}_t^{\alpha-k-1} u(t) \right]_{t=0^+}. \tag{A.1.8}$$

Para la demostración de la Proposición A.1.6, ver ecuación (2.248), Capítulo 2 en Podlubny [54].

Las condiciones iniciales, $\left[\mathrm{D}_t^{\alpha-k-1}\, u(t)\right]_{t=0^+}$ para $k = 0, \ldots, m-1$, representan derivadas fraccionarias en el sentido de Riemann-Liouville de orden $\alpha - k - 1$ evaluadas en el instante $t = 0$. En este instante, cabe destacar que usualmente cuando se estudian sistemas físicos, las condiciones iniciales del problema son habitualmente medidas de forma experimental o impuesta sobre el sistema. Sin embargo, *no existe* hasta el día de hoy una interpretación física clara acerca de las condiciones iniciales $\left[\mathrm{D}_t^{\alpha-k-1}\, u(t)\right]_{t=0^+}$.

Note que, debido a la Proposición A.1.6 se satisface que

$$\mathcal{L}[\,\mathrm{D}_t^{\alpha}\, u](z) = z^{\alpha}\mathcal{L}[u](z) - (g_{1-\alpha} * u)(0^+), \quad \alpha \in (0,1).$$

Ahora, deseamos notar que las operaciones de diferenciación e integración de orden uno no son operaciones inversas, puesto que debido al teorema fundamental del cálculo: $\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_a^t u(s)ds = u(t)$, y sin embargo $\displaystyle\int_a^t u'(s)ds = u(t) - u(a)$, para $a \in \mathbb{R}$. Luego, por inducción es directo verificar que para cada $m \in \mathbb{N}$, se satisface que

$$D_t^m J_t^m u(t) = u(t), \quad J_t^m D_t^m u(t) \neq u(t). \tag{A.1.9}$$

Como es de esperar, en general nuestro operador D_t^{α} corresponde a un operador inverso del operador integración J_t^{α}, pero no es un inverso a la derecha de J_t^{α}, para $\alpha > 0$. Más precisamente, se conoce el siguiente resultado.

Teorema A.1.7. *[5] Sea $\alpha > 0$, $m := \lceil \alpha \rceil$. Entonces, para $u \in L^1(I;X)$*

$$\mathrm{D}_t^{\alpha}\, J_t^{\alpha} u(t) = u(t), \quad t > 0.$$

Más aún, si $u \in L^1(I;X)$, $g_{m-\alpha} * u \in W^{m,1}(I;X)$, se satisface

$$J_t^{\alpha}\, \mathrm{D}_t^{\alpha}\, u(t) = u(t) - \sum_{k=0}^{m-1} (g_{m-\alpha} * u)^{(k)}(0) g_{\alpha+k+1-m}(t), \;\; t > 0. \tag{A.1.10}$$

Para la demostración del Teorema A.1.7, ver Teorema 1.5, Capítulo 1 en Bajlekova [5].

Luego, a partir del Teorema A.1.7, se concluye el siguiente Corolario.

Corolario A.1.8. *Sea $\alpha > 0$, $m := \lceil \alpha \rceil$. Entonces, para $u \in L^1(I;X)$ se tiene*

(i) $J_t^{\alpha}\, \mathrm{D}_t^{\alpha}\, u(t) = u(t)$, $t > 0$, *donde* $g_{m-\alpha} * u \in W_0^{m,1}(I;X)$.

(ii) Si $\alpha \in (0,1)$, $g_{1-\alpha} * u \in AC(I;X)$. *Entonces*

$$J_t^{\alpha}\, \mathrm{D}_t^{\alpha}\, u(t) = u(t) - (g_{1-\alpha} * u)(0) g_{\alpha}(t), \quad t > 0.$$

En lo que sigue, deseamos notar que si $u \in W^{m,1}(I;X)$ (entonces $u \in L^1(I;X)$, $g_{m-\alpha} * u \in W^{m,1}(I;X)$), entonces nuestro operador Riemann-Liouville D_t^α (Definición A.1.5), puede ser expresado del siguiente modo

$$\begin{aligned} \mathrm{D}_t^\alpha u(t) &= \mathrm{D}_t^\alpha \left(\sum_{k=0}^{m-1} c_k \frac{t^k}{k!} + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} * \varphi(t) \right) \\ &= \mathrm{D}_t^\alpha \left(\sum_{k=0}^{m-1} u^{(k)}(0) g_{k+1}(t) + g_m(t) * u^{(m)}(t) \right) \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} u^{(k)}(0)\, \mathrm{D}_t^\alpha g_{k+1}(t) + \mathrm{D}_t^\alpha \left(g_m(t) * u^{(m)}(t) \right) \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} u^{(k)}(0) g_{k+1-\alpha}(t) + \mathrm{D}_t^\alpha \left(g_m(t) * u^{(m)}(t) \right) \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} u^{(k)}(0) g_{k+1-\alpha}(t) + J_t^{m-\alpha} D_t^m u(t), \quad t > 0, \end{aligned} \tag{A.1.11}$$

donde $\varphi \in L^1(I;X), \varphi(t) = u^{(m)}(t)$ y $c_k = u^{(k)}(0)$. A partir de (A.1.11), y debido a múltiples aplicaciones en el campo de la física variados autores han usado el segundo término del lado derecho de (A.1.11) como una definición de derivada fraccionaria de orden α, ver Proposición A.1.13.

Definición A.1.9. Sea $\alpha > 0$, $m = \lceil \alpha \rceil$. Considere $u \in W^{m,1}(I;X)$, entonces la derivada fraccionaria de Caputo $\mathbf{D}_t^\alpha$ de orden α de la función u se define por

$$\mathbf{D}_t^\alpha u(t) := J_t^{m-\alpha} D_t^m u(t), \quad t > 0. \tag{A.1.12}$$

En particular, si $\alpha \in (0,1)$, $u \in AC(I;X)$, entonces a partir de la Definición A.1.9 se tiene que la derivada de Caputo de orden $\alpha \in (0,1)$ es representada como,

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_t^\alpha u(t) = J_t^{1-\alpha} u'(t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} u'(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[\frac{d}{dt} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} u(\tau) d\tau - \frac{u(0)}{t^\alpha} \right], \quad t > 0. \end{aligned} \tag{A.1.13}$$

Algunos simples, pero relevantes resultados válidos para $\alpha, \beta > 0$ son los siguientes:

$$J_t^\alpha g_\beta(t) = g_{\alpha+\beta}(t), \quad \mathrm{D}_t^\alpha g_\beta(t) = g_{\beta-\alpha}(t), \quad \beta \geq \alpha, t > 0. \tag{A.1.14}$$

En particular, desde (A.1.14) se tiene que $\mathrm{D}_t^\alpha g_\alpha(t) = 0$, $\mathrm{D}_t^\alpha 1 = g_{1-\alpha}(t)$, para $\alpha \in (0,1)$. Note que, es directo desde (A.1.12) que $\mathbf{D}_t^\alpha 1 = 0$, para $\alpha > 0$.

Corolario A.1.10. *[5] Sea $\alpha > 0$, $m = \lceil \alpha \rceil$. Considere $u \in C^{m-1}(I;X)$, $g_{m-\alpha} * u \in W^{m,1}(I;X)$,* *entonces se satisface que*

$$\boldsymbol{D}_t^\alpha u(t) = \mathrm{D}_t^\alpha \left(u(t) - \sum_{k=0}^{m-1} u^{(k)}(0) g_{k+1}(t) \right), \ t > 0. \tag{A.1.15}$$

La demostración del Corolario A.1.10, es una simple consecuencia desde (A.1.11), (A.1.12), (A.1.14).

En particular, si $\alpha \in (0,1)$, $u \in C(I;X)$, $g_{1-\alpha} * u \in AC(I;X)$, entonces a partir de (A.1.14) y Corolario A.1.10 se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_t^\alpha u(t) &= \mathrm{D}_t^\alpha [u(t) - u(0)] \\ &= \mathrm{D}_t^\alpha u(t) - u(0) g_{1-\alpha}(t), \quad t > 0. \end{aligned} \tag{A.1.16}$$

De forma análoga, al Teorema A.1.7 notamos que la derivada en el sentido de Caputo $\mathbf{D}_t^\alpha$ corresponde a un operador inverso a la izquierda del operador integración J_t^α, pero en general no corresponde a un inverso a la derecha.

Teorema A.1.11. *[5] Sea $\alpha > 0$, $m = \lceil \alpha \rceil$. Considere $u \in L^1(I;X)$, entonces para $u \in L^1(I;X)$*

$$\boldsymbol{D}_t^\alpha J_t^\alpha u(t) = u(t), \quad t > 0.$$

Más aún, si $u \in C^{m-1}(I;X)$, $g_{m-\alpha} * u \in W^{m,1}(I;X)$ se satisface que

$$J_t^\alpha \boldsymbol{D}_t^\alpha u(t) = u(t) - \sum_{k=0}^{m-1} u^{(k)}(0) g_{k+1}(t), \quad t > 0. \tag{A.1.17}$$

La demostración del Teorema A.1.11, se obtiene de forma directa del Teorema A.1.7 y Corolario A.1.10.

Luego, a partir del Teorema A.1.11 se desprende el siguiente Corolario.

Corolario A.1.12. *Sea $\alpha > 0$, $m := \lceil \alpha \rceil$. Considere $u \in L^1(I;X)$, entonces se tiene que*

(i) $J_t^\alpha \boldsymbol{D}_t^\alpha u(t) = u(t)$, $t > 0$, *donde* $u \in W_0^{m,1}(I;X)$.

(ii) Si $\alpha \in (0,1)$, $u \in C(I;X)$, $g_{1-\alpha} * u \in AC(I;X)$. *Entonces se satisface que*

$$J_t^\alpha \boldsymbol{D}_t^\alpha u(t) = u(t) - u(0), \quad t > 0.$$

De forma análoga, al Teorema A.1.6 se conoce la transformada de Laplace del operador $\mathbf{D}_t^\alpha u$ para u suficientemente regular.

Proposición A.1.13. *[54] Sea $\alpha > 0$, $m := \lceil \alpha \rceil$. Considere $u \in C^m(\mathbb{R}_+)$, entonces la transformada de Laplace de la Derivada de Caputo $\boldsymbol{D}_t^\alpha u$ es dada por*

$$\mathcal{L}[\,\boldsymbol{D}_t^\alpha\, u](z) = z^\alpha \mathcal{L}[u](z) - \sum_{k=0}^{m-1} z^{\alpha-k-1}\, D_t^k u(t)\Big|_{t=0}, \quad \Re(z) > 0, \tag{A.1.18}$$

donde $z^\alpha = |z|^\alpha e^{i\arg(z)}$, $|\arg(z)| < \pi$.

Para la demostración de la Proposición A.1.13, ver ecuación (2.253), Capítulo 2 en Podlubny [54].

Notamos que, en este caso las condiciones iniciales $D_t^k u(t)\big|_{t=0}$ para $k = 0, \ldots, m-1$, son perfectamente comprendidas desde el aspecto físico en contraste al caso descrito en (A.1.8). Por ejemplo, si $u(t)$ denota la posición de una partícula, entonces $D_t^0 u(t)\big|_{t=0}$ es la posición inicial de nuestra partícula en el instante $t = 0$, $D_t^1 u(t)\big|_{t=0}$ corresponde a la velocidad de nuestra partícula en el instante $t = 0$, $D_t^2 u(t)\big|_{t=0}$ es la aceleración de nuestra partícula en el instante $t = 0$, etcétera. Para más detalles, se sugiere sección 2.4 en [54].

En particular, si $\alpha \in (0,1)$, $u \in C([0,\infty))$. Entonces, a partir de la Proposición A.1.13 se desprende que

$$\mathcal{L}[\,\mathbf{D}_t^\alpha\, u](z) = z^\alpha \mathcal{L}[u](z) - z^{\alpha-1} u(0), \quad \Re(z) > 0. \tag{A.1.19}$$

A.2 Funciones de Mittag-Leffler

La función de Mittag-Leffler desempeña un rol importante en la solución de ecuaciones diferenciales de orden fraccionario, [5]. Esta función $z \mapsto E_{\alpha,\beta}(z)$ para $z \in \mathbb{C}$, se define como [7, 27, 50]:

$$E_{\alpha,\beta}(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{Ha_-} \frac{\xi^{\alpha-\beta} e^{\xi}}{\xi^\alpha - z} d\xi, \quad \alpha, \beta > 0, z \in \mathbb{C}, \tag{A.2.1}$$

donde $\Gamma(\cdot)$ es la función gamma de Euler, Ha_- corresponde a un camino cerrado, el cual comienza y termina en $-\infty$ acercándose a lo largo del semi eje negativo y rodeando el disco $|\xi| \le |z|^{1/\alpha}$ contra reloj: $-\pi \le \arg(\xi) \le \pi$ sobre Ha_- (curva conocida como camino de Hankel). Por brevedad en la notación, a partir de (A.2.1) denotaremos por $E_{\alpha,1}(z) := E_\alpha(z)$(3), es decir,

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad \alpha > 0, z \in \mathbb{C}. \tag{A.2.2}$$

(3) La función $E_\alpha(\cdot)$ fue definida y estudiada por Mittag-Leffler en el año 1903. Esta función es una generalización directa de varias funciones transcendentales, esto es, $E_1(\pm z) = e^{\pm z}$, $E_2(-z^2) = \cos(z)$, $E_2(z^2) = \cosh(z)$, etc.

Note que, la función de Mittag-Leffler $z \mapsto E_\alpha(z)$ es una función entera, para $\alpha > 0$. En el caso límite, $\alpha \to 0^+$ la analiticidad de $E_\alpha(\cdot)$ sobre $\mathbb{C}$ se pierde, ya que $E_0(z) := \sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}$, para $|z| < 1$.

Proposición A.2.1. *[26] Sea $0 \leq \alpha \leq 1$, entonces la función de Mittag-Leffler $E_\alpha(-x)$ es completamente monótona para $x \geq 0$.*

La función Mittag-Leffler desempeña un rol de carácter fundamental en la teoría de ecuaciones diferenciales de orden fraccionario. Es bastante conocido que la función de Mittag-Leffler $E_\alpha(z)$ satisface la siguiente igualdad diferencial

$$\mathbf{D}_t^\alpha\, E_\alpha(wt^\alpha) = wE_\alpha(wt^\alpha), \quad w \in \mathbb{C}. \tag{A.2.3}$$

El siguiente resultado, corresponde a una proposición que permite conocer la transformada de Laplace de nuestra función de Mittag-Leffler $E_\alpha(\cdot)$.

Lema A.2.2. *[41] Sea $\alpha > 0$, $t \geq 0$,. Entonces, la transformada de Laplace de la función $z \mapsto E_\alpha(\pm wt^\alpha)$, es representada como*

$$\mathcal{L}[E_\alpha(\pm wt^\alpha)](z) = \frac{z^{\alpha-1}}{z^\alpha \mp w}, \quad \Re(z) > 0, w \in \mathbb{C}, |z| > |w|^{1/\alpha}.$$

Para la demostración del Lema A.2.2, ver ecuación 1.9.13, Capítulo 1 en Kilbas, A. et al. [41].

El siguiente lema, corresponde a una estimación de la aplicación $z \mapsto E_\alpha(z)$ sobre dos sectores del plano complejo. Este resultado, resulta fundamental en nuestros teoremas de existencia y unidad de soluciones de los problemas de interés.

Lema A.2.3. *[54] Sea $\alpha \in (0,1)$, $\frac{\pi\alpha}{2} < \theta < \pi\alpha$. Entonces se satisfacen las siguientes estimaciones para la función de Mittag-Leffler $E_\alpha(\cdot)$:*

(i) *Si* $|\arg(z)| \leq \theta$, $|z| > 0$:
$$|E_\alpha(z)| \leq M_1 e^{\Re(z^{\frac{1}{\alpha}})} + \frac{M_2}{1+|z|}.$$

(ii) *Si* $\theta \leq |\arg(z)| \leq \pi$, $|z| > 0$:
$$|E_\alpha(z)| \leq \frac{M_2}{1+|z|}.$$

Notamos que M_i para $i = 1, 2$ depende de α, pero no del número complejo z.

Para la demostración del Lema A.2.3, se sugiere ver Teorema 1.5 y Teorema 1.6, capítulo 1 en Podlubny, I. [54].

Observación A.2.4. Note que, para $\alpha \in (0,1), \beta > 0$ y considerando el número complejo $z := (-it)^\alpha |\xi|^\beta = |\xi|^\beta t^\alpha e^{-\alpha\pi i/2}$, se tiene que

$$-\theta < \arg(z) = -\alpha\pi/2 \leq \theta < \pi\alpha,$$

para cada $\pi\alpha/2 < \theta < \pi\alpha$. Luego, aplicando el Lema A.2.3 parte (i), se deduce que existen constantes no negativas M_1, M_2 de modo que

$$|E_\alpha((-it)^\alpha|\xi|^\beta)| \leq M_1 + \frac{M_2}{1+|\xi|^\beta t^\alpha} \leq M, \quad t>0, \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{A.2.4}$$

Teorema A.2.5. *[26] Sea $\alpha \in (0,1)$, $|\arg(z)| < \pi\alpha$, $z \neq 0$. Entonces, la función de Mittag-Leffler $E_\alpha(\cdot)$ posee la siguiente representación*

$$E_\alpha(z) = \frac{1}{\alpha}e^{z^{1/\alpha}} + \int_0^\infty K_\alpha(r,z)dr, \tag{A.2.5}$$

donde el núcleo $K_\alpha(r,z)$ es dado por,

$$K_\alpha(r,z) = -\frac{e^{-r^{1/\alpha}} z\sin(\pi\alpha)}{\pi\alpha(r^2 - 2rz\cos(\pi\alpha) + z^2)}.$$

Para la demostración del Teorema A.2.5, se sugiere ver Capítulo 4, Teorema 4.20 en Gorenflo, R., et al. [26].

Observación A.2.6. Note que, a partir del Teorema A.2.5 para $\alpha \in (0,1)$, $z = (-it)^\alpha|\xi|^s$, se deduce que

$$\begin{aligned}
E_\alpha((-it)^\alpha|\xi|^s) &= \frac{1}{\alpha}e^{-it|\xi|^{s/\alpha}} - \frac{1}{\pi\alpha}\int_0^\infty \frac{e^{-r^{1/\alpha}}(-it)^\alpha|\xi|^s\sin(\pi\alpha)}{r^2 - 2r(-it)^\alpha|\xi|^s\cos(\pi\alpha) + (-it)^{s\alpha}|\xi|^{2s}}dr \\
&= \frac{1}{\alpha}e^{-it|\xi|^{s/\alpha}} \\
&\quad - \frac{1}{\pi\alpha}|\xi|^s(-i)^\alpha\sin(\pi\alpha)t^\alpha\int_0^\infty \frac{e^{-r^{1/\alpha}}}{r^2 - 2|\xi|^s(-i)^\alpha r t^\alpha\cos(\pi\alpha) + |\xi|^{2s}(-it)^{s\alpha}}dr.
\end{aligned}$$

Luego, considere $r(\tau) := (\tau t)^\alpha$, de donde derivando r con respecto a τ se tiene que $dr = \alpha\tau^{\alpha-1}t^\alpha d\tau$. De este modo,

$$\begin{aligned}
E_\alpha((-it)^\alpha|\xi|^s) &= \frac{1}{\alpha}e^{-it|\xi|^{s/\alpha}} \\
&\quad - \frac{1}{\pi\alpha}\int_0^\infty \frac{|\xi|^s(-i)^\alpha\sin(\pi\alpha)t^\alpha e^{-\tau t}\alpha\tau^{\alpha-1}t^\alpha}{\tau^{2\alpha}t^{2\alpha} - 2|\xi|^s(-i)^\alpha\tau^\alpha t^{2\alpha}\cos(\pi\alpha) + |\xi|^{2s}(-it)^{2\alpha}}d\tau \\
&= \frac{1}{\alpha}e^{-it|\xi|^{s/\alpha}} \\
&\quad - \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{|\xi|^s(-i)^\alpha\sin(\pi\alpha)e^{-\tau t}\tau^{\alpha-1}}{\tau^{2\alpha} - 2|\xi|^s(-i)^\alpha\tau^\alpha\cos(\pi\alpha) + |\xi|^{2s}(-i)^{2\alpha}}d\tau \\
&= \frac{1}{\alpha}e^{-it|\xi|^{s/\alpha}} \\
&\quad - \frac{1}{\pi}|\xi|^s(-i)^\alpha\sin(\pi\alpha)\int_0^\infty \frac{e^{-\tau t}\tau^{\alpha-1}}{\tau^{2\alpha} - 2|\xi|^s(-i)^\alpha\tau^\alpha\cos(\pi\alpha) + |\xi|^{2s}(-i)^{2\alpha}}d\tau.
\end{aligned}$$

En consecuencia, definiendo $\rho := |\xi|^s(-i)^\alpha$, se desprende la siguiente representación de nuestra función $E_\alpha(\cdot)$,

$$E_\alpha((-it)^\alpha|\xi|^s) = \frac{1}{\alpha}e^{-it|\xi|^{s/\alpha}} - \frac{1}{\pi}\rho\sin(\pi\alpha)\int_0^\infty \frac{e^{-\tau t}\tau^{\alpha-1}}{\tau^{2\alpha} - 2\rho\tau^\alpha\cos(\pi\alpha) + \rho^2}d\tau, \tag{A.2.6}$$

donde $\alpha \in (0,1), s > 0$. A partir de (A.2.6), se puede deducir que la aplicación $t \mapsto E_\alpha((-it)^\alpha |\xi|^s)$ para $t \to \infty$, se comporta como un término oscilatorio $\frac{1}{\alpha} e^{-it|\xi|^{s/\alpha}}$ menos un segundo término que tiende a cero, cuando t es suficientemente grande.

A.3 Transformada de Fourier, distribuciones temperadas y resultados de Análisis Armónico

En esta sección, proporcionamos una presentación breve de las definiciones y propiedades elementales usadas en este trabajo, una herramienta clave representa la transformada de Fourier $\mathcal{F}$. En una primera parte, definimos la transformada de Fourier sobre $L^1 := L^1(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{S} := \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $L^2 := L^2(\mathbb{R}^n)$, y luego por dualidad se define sobre el espacio de las distribuciones temperadas $\mathcal{S}' := \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Más precisamente, enunciamos el Teorema de Plancherel, Teorema de inversión de Fourier, transformada de Fourier sobre el espacio L^2, transformada de Fourier sobre $\mathcal{S}'$. En una segunda parte de esta sección presentamos la regla de Leibniz fraccionaria y algunos resultados clásicos de análisis armónico.

La transformada de Fourier $u \mapsto \mathcal{F}(u)$, se define sobre L^1 como [62]:

$$\mathcal{F}(u)(\xi) = \hat{u}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} u(x)dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{A.3.1}$$

donde $x \cdot \xi$ denota el producto interno sobre $\mathbb{R}^n$. Luego, $\mathcal{F} : L^1 \to L^\infty$ es una aplicación lineal continua. Ahora, introducimos el *espacio de Schwartz* $\mathcal{S} \subseteq L^1$, el cual representa un herramienta básica para extender la transformada de Fourier a la clase de distribuciones temperadas $\mathcal{S}'$. Primero, es necesario introducir la siguiente notación: Si $\alpha := (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \beta := (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{N}_0^n$ son multi-índices, entonces la longitud $|\alpha|$ de α se define por $|\alpha| := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$. También se define $x^\beta = x_1^{\beta_1} \cdots x_n^{\beta_n}$, $D^\alpha := D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n}$ donde el operador diferencial $D_j := -i\frac{\partial}{\partial x_j}$, $i^2 = -1$, con $j = 1, \ldots, n$; denotamos además el operador diferencial de orden α, ∂_x^α, como

$$\partial_x^\alpha := \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}}, \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n. \tag{A.3.2}$$

Definición A.3.1. El espacio de Schwartz $\mathcal{S}$ es el conjunto de funciones suave u sobre $\mathbb{R}^n$,

$$\mathcal{S} := \{u \in \mathcal{C}^\infty : x^\beta D^\alpha u \in L^\infty, \text{ para } \alpha, \beta \geq 0\}, \tag{A.3.3}$$

Es conocido que $\mathcal{S}$ equipado con la familia de seminormas,

$$p_k(u) = \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^{k/2} |D^\alpha u(x)|, u \in \mathcal{S},$$

corresponde a un espacio de Fréchet. Note que, la transformada de Fourier $\mathcal{F} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ es un automorfismo isométrico sobre $\mathcal{S}$.

Se define el operador lineal $\mathcal{F}^*$ como

$$\mathcal{F}^*(u)(\xi) := \mathcal{F}^{-1}(u)(\xi) := (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi} u(x)dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{A.3.4}$$

el cual difiere de (A.3.1) sólo en el argumento de la función exponencial. Note que, debido a (A.3.4) es directo que $\mathcal{F}^* : L^1 \to L^\infty$, $\mathcal{F}^* : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$, y en el caso que $u, v \in \mathcal{S}$ se tiene que $\langle \mathcal{F}(u), v \rangle = \langle u, \mathcal{F}^*(v) \rangle$. Más aún, se puede concluir la fórmula de inversión de Fourier

$$\mathcal{F}^*\mathcal{F} = \mathcal{F}\mathcal{F}^* = I, \quad \text{sobre} \quad \mathcal{S}. \tag{A.3.5}$$

Luego, debido a la identidad (A.3.5), se tiene que

$$\langle \mathcal{F}u, \mathcal{F}v \rangle = \langle u, \mathcal{F}^*\mathcal{F}v \rangle = \langle u, v \rangle = \langle \mathcal{F}^*u, \mathcal{F}^*v \rangle, \quad u, v \in \mathcal{S}.$$

En consecuencia, debido a la continuidad de $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}^*$ sobre $\mathcal{S}$, es posible extender la transformada de Fourier $\mathcal{F}$ de manera única desde $\mathcal{S}$ al espacio L^2. De esta manera, se tiene el siguiente resultado.

Teorema A.3.2. *(**Plancherel**, [65]) Sea $\mathcal{F} : L^2 \to L^2$ la transformada de Fourier, entonces $\mathcal{F}$ es un operador unitario, con inversa $\mathcal{F}^*$.*

Definición A.3.3. Una distribución temperada sobre $\mathbb{R}^n$ es cualquier funcional lineal continuo sobre $\mathcal{S}$. El conjunto de distribuciones temperada lo denotaremos por

$$\mathcal{S}' := \{T : \mathcal{S} \to \mathbb{C},\ T \text{ lineal y continuo sobre } \mathcal{S}\}. \tag{A.3.6}$$

Luego, por definición si $T \in \mathcal{S}'$ se tiene que existe C no negativo y un entero k tal que $|T(u)| \leq Cp_k(u)$, para cada $u \in \mathcal{S}$. Un ejemplo canónico de distribuciones temperadas es dado por las L^p-funciones, esto se debe a que se puede identificar L^p como un subespacio de $\mathcal{S}'$, vía una inyección continua $T_f : L^p \hookrightarrow \mathcal{S}'$, definida como $T_f(u) = \langle T_f, u \rangle := \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f(x)u(x)dx$, $u \in \mathcal{S}, f \in L^p$, donde $1 \leq p \leq \infty$.

Ahora bien, con el fin de extender la definición de la transformada de Fourier a distribuciones temperadas $\mathcal{S}'$, consideramos $u \in \mathcal{S}$ y debido al automorfismo $\mathcal{F} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$, se puede definir la transformada de Fourier $\mathcal{F}$ como

$$\mathcal{F}T(u) = \langle \mathcal{F}T, u \rangle = \hat{T}(u) := T(\mathcal{F}u), \quad u \in \mathcal{S}, T \in \mathcal{S}'. \tag{A.3.7}$$

De forma análoga, se define el operador $\mathcal{F}^*$ como $\mathcal{F}^*T(u) = \langle F^*T, u \rangle := T(\mathcal{F}^*u), u \in \mathcal{S}$. Luego, es directo que $\mathcal{F}, \mathcal{F}^* : \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$, corresponden a isomorfismos lineales continuos sobre $\mathcal{S}'$.

Proposición A.3.4. *[65] Sea $\mathcal{F} : \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$ la transformada de Fourier descrita en (A.3.7), entonces*

$$\mathcal{F}^*\mathcal{F} = \mathcal{F}\mathcal{F}^* = I, \quad \mathcal{S}'.$$

Teorema A.3.5. *[49] Sea $u \in L^p$, $v \in L^q$, $1 \leq p, q \leq \infty$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq 1$. Entonces $u * v \in L^r$. Más aún, se satisface que*

$$\|u * v\|_{L^r} \leq \|u\|_{L^p}\|v\|_{L^q},$$

donde $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$.

Ahora, deseamos recordar algunas estimaciones que serán de utilidad en este trabajo. El siguiente lema, conocido como la desigualdad de Hardy sobre $\mathbb{R}^n$ corresponde a un resultado clave para la demostración de nuestro Lema 1.1.16.

Lema A.3.6. *(Desigualdad de Hardy [64]) Sea $0 \leq s < n/2$, $u \in \dot{H}^s$. Entonces, existe una constante no negativa $C = C_{s,n}$ de modo que,*

$$\left\| \frac{u}{|\cdot|^s} \right\|_{L^2} \leq C\|u\|_{\dot{H}^s}.$$

Para la demostración del Lema A.3.6, se sugiere ver e.g., Lema A.2 en Tao [64].

Enunciamos un teorema bien conocido en la literatura llamado la desigualdad de Hardy-Littlewood-Sobolev sobre $\mathbb{R}^n$, dado como.

Teorema A.3.7 (Desigualdad de Hardy-Littlewood-Sobolev [61])**.** *Suponga que $\gamma \in (0, n)$, $1 < p < q < \infty$ de modo que $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{(n-\gamma)}{n}$. Entonces, para $u \in L^p$ existe una constante no negativa $C = C_{\gamma,n}$ tal que*

$$\left\| u * \frac{1}{|\cdot|^\gamma} \right\|_{L^q} \leq C\|u\|_{L^p}. \tag{A.3.8}$$

Para la demostración del Teorema A.3.7, puede revisar el Capítulo VIII sección 4.2 en Stein [61].

Corolario A.3.8. *Sea $\gamma \in (0, n)$, $1 < p < q < \infty$ de modo que $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{(n-\gamma)}{n}$. Entonces para $u \in L^p$, existe una constante no negativa $C = C(\gamma, n)$ tal que*

$$\|K_\gamma(u)\|_{L^q} \leq \|\psi\|_\infty \left\| u * \frac{1}{|\cdot|^\gamma} \right\|_{L^q} \leq C\|\psi\|_\infty\|u\|_{L^p}, \tag{A.3.9}$$

El siguiente teorema, el cual es útil en el capítulo 4, proporciona una estimación para $(-\Delta)^{s/2}(uv), (I - \Delta)^{s/2}(uv)$ sobre L^r, para ciertos u, v.

Teorema A.3.9 (Regla de Leibniz fraccionaria [16], [29], [39])**.** *Suponga que $s > 0$, $1 < r < \infty$, $1 < p_1, p_2, q_1, q_2 \leq \infty$, de modo que $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{p_i} + \dfrac{1}{q_i}$, para cada i=1,2. Entonces, para $u, v \in \mathcal{S}$, existe una* *constante no negativa C tal que se satisfacen las siguiente estimaciones,*

$$\|(-\Delta)^{s/2}(uv)\|_{L^r} \leq C\left[\|(-\Delta)^{s/2}u\|_{L^{p_1}}\|v\|_{L^{q_1}} + \|u\|_{L^{p_2}}\|(-\Delta)^{s/2}v\|_{L^{q_2}}\right], \tag{A.3.10}$$

$$\|(I-\Delta)^{s/2}(uv)\|_{L^r} \leq C\left[\|(I-\Delta)^{s/2}u\|_{L^{p_1}}\|v\|_{L^{q_1}} + \|u\|_{L^{p_2}}\|(I-\Delta)^{s/2}v\|_{L^{q_2}}\right]. \tag{A.3.11}$$

Para la demostración del Teorema A.3.9, ver Teorema 1 en Grafakos & Oh [29], donde examinan las desigualdades (A.3.10)-(A.3.11) en un sentido más general. Notamos que, tempranamente Christ & Weinstein en [16], demuestran la desigualdad (A.3.10) para el caso $s \in (0,1)$, $1 < r, p_1, p_2, q_1, q_2 < \infty$, y asumiendo que $u \in L^{p_2} \cap \dot{H}^{s,p_1}$, $v \in L^{q_1} \cap \dot{H}^{s,q_2}$.

Más tarde, Kato en [39] prueba la desigualdad (A.3.10) para $s \geq 0$, $1 < r < \infty$, $1 < p_1, q_2 < \infty$, $1 < q_1, p_2 \leq \infty$, y considerando que

$$u \in L^{p_2} \cap \dot{H}^{s,p_1},\ v \in L^{q_1} \cap \dot{H}^{s,q_2}.$$

Teorema A.3.10 (Desigualdad de Hölder [56])**.** *Sean $p, q, r \geq 1$, de modo que $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$, $u \in L^p, v \in L^q$. Entonces, $uv \in L^r$ y se satisface que*

$$\|uv\|_{L^r} \leq \|u\|_{L^p}\|v\|_{L^q}. \tag{A.3.12}$$

Para la demostración del Teorema A.3.10, ver e.g., Teorema III.1 parte (c) en Reed y Simon [56].

A.4 Operador solución y semigrupo de operadores

En la presente sección, es desarrollada para describir las propiedades clásicas asociadas a un operador solución, semigrupo de operadores, y dichos resultados serán utilizados principalmente en el Capítulo 2 de este trabajo de tesis.

Teorema A.4.1. *[33] Sea $T \in \mathbf{B}(L^2)$ un operador lineal acotado, tal que $T\tau_h = \tau_h T$, para $h \in \mathbb{R}^n$. Entonces, existe m asociado a L^2 de modo que*

$$Tu = \mathcal{F}^{-1}[m\mathcal{F}(u)], \quad u \in L^2,$$

es un operador acotado.

Para la demostración del Teorema A.4.1, ver e.g., Teorema 1.2 en Hörmander [33].

Proposición A.4.2. *[1] Sea A operador sobre X, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) A genera un semigrupo analítico acotado sobre X;

(b) El conjunto $\{z \in \mathbb{C} : \Re(z) > 0\} \subset \rho(A)$, y se satisface

$$M := \sup_{\Re(\lambda)>0} \|\lambda R(\lambda, A)\| < \infty.$$

Para la demostración de la Proposición A.4.2, ver e.g., Corolario 3.7.12 en Arent, et al. [1].

Proposición A.4.3. *[1] Sea $(A, \mathcal{D}(A))$ operador lineal, $\overline{\mathcal{D}(A)}^X = X$. Entonces, A genera un C_0-semigrupo sobre X tal que $\|T(t)\| \leq 1$ para $t \geq 0$ si y sólo si $(0, \infty) \subset \rho(A)$ y se satisface que*

$$\|\lambda R(\lambda.A)\| \leq 1, \quad \lambda > 0.$$

Para la demostración de la Proposición A.4.3, ver e.g., Corolario 3.3.5 en Arent, et al. [1].

Proposición A.4.4. *[1] Sea $x_0 \in X$, A genera un C_0-semigrupo analítico sobre X. Entonces, existe una única función $u \in C^\infty((0,\infty); X) \cap C([0,\infty); X) \cap C((0,\infty); \mathcal{D}(A))$ satisfaciendo el problema de primer orden $u'(t) = Au(t),\ t > 0$, donde $u(0) = x_0$.*

Para la demostración de la Proposición A.4.4, ver e.g., Corolario 3.7.21 en Arent, et al. [1].

Lema A.4.5. *[5] Sea $\alpha \in (0,1)$, fijo. Suponer que el operador $A \in \mathcal{C}^1(w)$, entonces $A \in \mathcal{C}^\alpha(w^{1/\alpha})$.*

Para la demostración del Lema A.4.5, ver e.g., Corolario 2.10 en Bajlekova [5].

A partir de la referencia [5], se define la siguiente clase de operadores,

$$\begin{aligned} A \in \mathcal{C}^1(w) := \bigcup_{M \geq 1} \mathcal{C}^1(M_0, w) &\Leftrightarrow \text{existe } M_0 \geq 1, A \in \mathcal{C}^1(M_0, w) \\ &\Leftrightarrow \text{existe } M_0 \geq 1,\ u'(t) = Au(t), u(0) = u_0 \text{ tiene operador solución} \\ &\quad\ T_1(t) \text{ tal que } \|T_1(t)\| \leq M_0 e^{wt}, t \geq 0. \end{aligned}$$

Más aún, consideramos la siguiente clase de operadores solución definidas como

$$\begin{aligned} A \in \mathcal{C}^\alpha(w) := \bigcup_{M \geq 1} \mathcal{C}^\alpha(M_0, w) &\Leftrightarrow \text{existe } M_0 \geq 1, A \in \mathcal{C}^\alpha(M_0, w) \\ &\Leftrightarrow \text{existe } M_0 \geq 1,\ \mathbf{D}_t^\alpha u(t) = Au(t), u(0) = u_0 \text{ tiene operador solución} \\ &\quad\ T_\alpha(t) \text{ tal que } \|T_\alpha(t)\| \leq M_0 e^{wt}, t \geq 0. \end{aligned}$$

Lema A.4.6. *[5] Sea $\alpha \in (0,1)$, $\rho(A) \supset \{z : \Re(z) > 0\}$, y que existe una constante no negativa C, de modo que*

$$\|R(z, A)\| \leq C/\Re(z), \quad \Re(z) > 0.$$

Entonces, se tiene que $A \in \mathcal{A}^{\alpha}(\text{mín}\{(1/\alpha - 1)\pi/2, \pi/2\}, 0)$.

Conclusiones

En este trabajo de tesis, se obtuvieron contribuciones originales asociadas a la existencia, unicidad, regularidad y representación de soluciones continuas para una clase de ecuaciones Schrödinger homogéneas, lineales y no lineales tiempo-espacio fraccionario en el marco de un espacio de Sobolev de orden fraccionario H^s, para $s > 0$.

En una primera etapa, obtuvimos existencia, unicidad y representación de soluciones continuas sobre la semi-recta real positiva a valores el espacio de sobolev H^s, $s > 0$, para una clase de ecuaciones Schrödinger homogéneas tiempo-espacio fraccionario, definidas por el operado Laplaciano fraccionario. Para esto, usamos método de transformas y un resultado fundamental proveniente del artículo [28]. Además, proporcionamos algunas propiedades de regularidad de nuestra solución.

En una segunda etapa, desarrollamos un estudio de existencia, unicidad y representación (integral) de soluciones continuas sobre el intervalo $[0, T]$, $T > 0$, a valores el espacio de sobolev H^s, $s > 0$, para una clase de ecuaciones Schrödinger lineales tiempo-espacio fraccionario. Para esto, usamos método de transformas integrales, y el estudio desarrollado del problema homogéneo asociado. Además, proporcionamos una estimación de nuestra solución, ne términos de los datos del problema.

Finalmente, en un tercera etapa desarrollamos un estudio de existencia, unicidad y representación integral (fórmula de Duhamel) de soluciones continuas sobre el intervalo $[0, T]$, $T > 0$, a valores el espacio de sobolev H^s, $s > 0$, para una clase de ecuaciones Schrödinger no lineal tipo Hartree tiempo-espacio fraccionario. Para esto, probamos condiciones apropiadas tipo Lipschitz en el término no lineal $u \mapsto G(u) = K_\gamma(|u|^2)u$, para cada $u \in B_r \subseteq H^s$ (B_r bola cerrada), para luego emplear el teorema de punto fijo de Banach. Note que, la solución de la ecuación no lineal es escrita en términos de la función de Mittag-Leffler $E_\alpha(\cdot)$, u_0 y el término no lineal $G(u)$. En adición, probamos que la aplicación dato-solución, $\mathbb{F} : H^s \to C([0, T]; H^s)$, donde $u_0 \mapsto u$ corresponde a una aplicación continua sobre H^s.

Bibliografía

[1] Arendt, W., Batty, C., Hieber, M. and Neubrander, F.: *Vector-valued Laplace ransforms and Cauchy problems*, Vol. 96, Springer Science & Business Media, (2011).

[2] Baeumer, B., Kurita, S. and Meerschaert, M. *Inhomogeneous fractional diffusion equations*, Fractional Calculus and Applied Analysis **8** (2005), no. 4, 371–386.

[3] Baeumer, B. Meerschaert, M. and Naber, M. *Stochastic models for relativistic diffusion*, Physical Review E **82** (2010), no. 1, 011132.

[4] Bai, F. *Fractional Order Evolution Equation Interpolating both Heat and Wave Equation*, Systems Sciencie and Mathematical Sciences **10** (1997), 160–167.

[5] Bajlekova, E. *Fractional Evolution Equations in Banach Spaces*, Citeseer, (2001).

[6] Baqer, S. and Boyadjiev, L. *Fractional Schrödinger equation with zero and linear potentials*, Fractional Calculus and Applied Analysis **19** (2016), no. 4, 973–988.

[7] Bateman, Harry. *Higher transcendental functions*, California Institute of Technology Bateman Manuscript Project, New York: McGraw-Hill, 1953-1955 (1955).

[8] Bayın, S. *Definition of the Riesz derivative and its application to space fractional quantum mechanics*, Journal of Mathematical Physics **57** (2016), no. 12, 123501.

[9] Bayın, S. *Time fractional Schrödinger equation: Fox's H-functions and the effective potential*, Journal of Mathematical Physics **54** (2013), no. 1, 012103.

[10] Bazhlekova, E. *The abstract Cauchy problem for the fractional evolution equation*, Fract. Calc. Appl. Anal. **1** (1998), no. 3, 255–270.

[11] Bergh, J. and Löfström, J. *Interpolation spaces: An Introduction* (1976).

[12] Cazenave, T. *Semilinear Schrödinger Equations*, Vol. 10, American Mathematical Soc. (2003).

[13] Cho, Y., Fall, M., Hajaiej, H., Markowich, P. and Trabelsi, S. *Orbital stability of standing waves of a class of fractional Schrödinger equations with Hartree-type nonlinearity*, Analysis and Applications **15** (2017), no. 05, 699–729.

[14] Cho, Y., Hwang, G. and Yang, C. *On the modified scattering of* $3-d$ *Hartree type fractional Schrödinger equations with Coulomb potential for any given initial and boundary data*, Advances in Differential Equations **23** (2018), no. 9/10, 649–692.

[15] Cho, Y., Hwang, G. Kwon, S. and Lee, S. *On finite time blow-up for the mass-critical Hartree equations*, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A: Mathematics **145** (2015), no. 3, 467–479.

[16] Christ, F. and Weinstein, M. *Dispersion of small amplitude solutions of the generalized Korteweg-de Vries equation*, Journal of functional analysis **100** (1991), no. 1, 87–109.

[17] Di Nezza, E., Palatucci, G. and Valdinoci, E. *Hitchhiker's guide to the fractional Sobolev spaces*, Bulletin des Sciences Mathématiques **136** (2012), no. 5, 521–573.

[18] Dong, J. and Xu, M. *Some solutions to the space fractional Schrödinger equation using momentum representation method*, Journal of mathematical physics **48** (2007), no. 7, 072105.

[19] Dong, J. and Xu, M. *Space–time fractional Schrödinger equation with time-independent potentials*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **344** (2008), no. 2, 1005–1017.

[20] Feng, B. and Zhang, H. *Stability of standing waves for the fractional Schrödinger–Hartree equation*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **460** (2018), no. 1, 352–364.

[21] Feynman, R., Hibbs, A. and Styer, D. *Quantum Mechanics and Path Integrals*, Courier Corporation, (2010).

[22] Ford, N., Rodrigues, M. and Vieira, N. *A numerical method for the fractional Schrödinger type equation of spatial dimension two*, Fractional Calculus and Applied Analysis **16** (2013), no. 2, 454–468.

[23] Fröhlich, J. and Lenzmann, E. *Blowup for nonlinear wave equations describing boson stars*, Communications on Pure and Applied Mathematics **60** (2007), no. 11, 1691–1705.

[24] Garofalo, N. *Fractional thoughts*, arXiv preprint arXiv:1712.03347 (2017).

[25] Gorenflo, R. and Mainardi, F. *Some recent advances in theory and simulation of fractional diffusion processes*, Journal of Computational and Applied Mathematics **229** (2009), no. 2, 400–415.

[26] Gorenflo, R., Kilbas, A., Mainardi, F. and Rogosin, S. *Mittag-Leffler Functions, Related Topics and Applications*, Springer, (2016).

[27] Gorenflo, R., Loutchko, J. and Luchko, Y. *Computation of the Mittag-Leffler function $E_{\alpha,\beta}(z)$ and its derivative* (2002).

[28] Górka, P., Prado, H. and Trujillo, J. *The Time Fractional Schrödinger equation on Hilbert Space*, Integral Equations and Operator Theory **87** (2017), no. 1, 1–14.

[29] Grafakos, L. and Oh, S. *The Kato-Ponce inequalitys*, Communications in Partial Differential Equations **39** (2014), no. 6, 1128–1157.

[30] Grafakos, L. *Classical Fourier Analysis*, Vol. 2, Springer, (2008).

[31] Guo, Q. and Zhu, S. *Sharp threshold of blow-up and scattering for the fractional Hartree equation*, Journal of Differential Equations **264** (2018), no. 4, 2802–2832.

[32] Guo, X. and Xu, M. *Some physical applications of fractional Schrödinger equation*, Journal of mathematical physics **47** (2006), no. 8, 082104.

[33] Hörmander, L. *Estimates for translation invariant operators in L^p spaces*, Acta Mathematica **104** (1960), no. 1-2, 93–140.

[34] Hu, Y. and Kallianpur, G. *Schrödinger equations with fractional Laplacians*, Applied Mathematics and Optimization **42** (2000), no. 3, 281–290.

[35] Hwang, G. *Almost sure local well-posedness of energy critical fractional Schrödinger equations with Hartree nonlinearity*, arXiv preprint arXiv:1504.06438 (2015).

[36] Iomin, A. *Fractional-time Schrödinger equation: fractional dynamics on a comb*, Chaos, Solitons & Fractals **44** (2011), no. 4-5, 348–352.

[37] Iomin, A. *On fractional-time quantum dynamics*, Physical Review E **80** (2009), no. 2, 022103.

[38] Kato, T. *Note on fractional powers of linear operators*, Proceedings of the Japan Academy **36** (1960), no. 3, 94–96.

[39] Kato, T. *On nonlinear Schrödinger equations, II. H^s-solutions and unconditional well-posedness*, Journal d Analyse Mathematique **67** (1995), no. 1, 281–306.

[40] Kemppainen, J., Siljander, J. and Zacher, R. *Representation of solutions and large-time behavior for fully nonlocal diffusion equations*, Journal of Differential Equations **263** (2017), no. 1, 149–201.

[41] Kilbas, A., Srivastava, H. and Trujillo, J. *Theory and applications of fractional differential equations* (2006).

[42] Kwaśnicki, M. *Ten equivalent definitions of the fractional Laplace operator*, Fractional calculus and applied analysis **20** (2017), no. 1, 7–51.

[43] Laskin, N. *Fractional quantum mechanics*, Physical Review E **62** (2000), no. 3, 3135.

[44] Laskin, N. *Fractional quantum mechanics and Lévy path integrals*, Physics Letters A **268** (2000), no. 4-6, 298–305.

[45] Laskin, N. *Fractional Schrödinger equation*, Physical Review E **66** (2002), no. 5, 056108.

[46] Laskin, N. *Principles of fractional quantum mechanics* (2012), 393–427.

[47] Laskin, N. *Time fractional quantum mechanics*, Chaos, Solitons & Fractals **102** (2017), 16–28.

[48] Lenzmann, E. *Well-posedness, for semi-relativistic Hartree equations of critical type*, Mathematical Physics, Analysis and Geometry **10** (2007), no. 1, 43–64.

[49] Linares, F. and Ponce, G. *Introduction to Nonlinear Dispersive Equations*, Springer, (2014).

[50] Mainardi, F. and Gorenflo, R. *On Mittag-Leffler-type functions in fractional evolution processes*, Journal of Computational and Applied Mathematics **118** (2000), no. 1-2, 283–299.

[51] Mainardi, F., Luchko, Y. and Pagnini, G. *The fundamental solution of the space-time fractional diffusion equation*, arXiv preprint cond-mat/0702419 (2007).

[52] Naber, M. *Time fractional Schrödinger equation*, Journal of Mathematical Physics **45** (2004), no. 8, 3339–3352.

[53] Narahari, B., Yale, B. and Hanneken, J. *Time fractional Schrödinger equation revisited*, Advances in Mathematical Physics **2013** (2013).

[54] Podlubny, I. *Fractional Differential Equations: An introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications*, Vol. 198, Elsevier, (1998).

[55] Prado, H. and Reyes, E. *Nonlinear Evolution Equations with Infinitely Many Derivatives*, Complex Analysis and Operator Theory **10** (2016), no. 7, 1577–1590.

[56] Reed, M. and Simon, B. *Methods of Modern Mathematical Physics I: Functional Analysis*, Academic Press, (1972).

[57] Saint, X. *Elementary introduction to the theory of pseudodifferential operators*, Routledge, 2017.

[58] Saxena, R., Mathai, A. and Haubold, H. *Space-Time fractional reaction-diffusion equations associated with a generalized Riemann–Liouville fractional derivative*, Axioms **3** (2014), no. 3, 320–334.

[59] Saxena, R.K., Saxena, R. and Kalla, S. *Solution of space-time fractional Schrödinger equation occurring in quantum mechanics*, Fractional Calculus and Applied Analysis **13** (2010), no. 2, 177–190.

[60] Shieh, N.-R. *On time-fractional relativistic diffusion equations*, Journal of Pseudo-Differential Operators and Applications **3** (2012), no. 2, 229–237.

[61] Stein, E. and Murphy, T. *Harmonic Analysis: Real-variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals*, Vol. 3, Princeton University Press, (1993).

[62] Stein, E. M. and Shakarchi, R. *Princeton lectures in Analysis*, Princeton University Press, (2003).

[63] Stein, E. *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, Vol. 2, Princeton University Press, (1970).

[64] Tao, T. *Nonlinear Dispersive Equations: Local and Global Analysis*, American Mathematical Soc. (2006).

[65] Taylor, M. *Partial Differential Equations I: Basic Theory* 115 (Applied Mathematical Sciences), 2011.

[66] Taylor, M. *Remarks on fractional diffusion equations*, preprint.

[67] Tofighi, A. *Probability structure of time fractional Schrödinger equation*, Acta Phys. Polon. **116** (2009), 114–118.

[68] Treves, F. *Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels: Pure and Applied Mathematics*, Vol. 25, Elsevier, (2016).

[69] Umarov, S. *Introduction to Fractional and Pseudo-Differential Equations with Singular Symbols*, Vol. 41, Springer, (2015).

[70] Wang, S. and Xu, M. *Generalized fractional Schrödinger equation with space-time fractional derivatives*, Journal of mathematical physics **48** (2007), no. 4, 043502.

[71] Warma, M. *Approximate controllabilty from the exterior of space-time fractional diffusion equations with the fractional Laplacian*, arXiv preprint arXiv:1802.08028 (2018).

[72] Wong, M. *An Introduction to Pseudo-Differential Operators*, Journal of Mathematical Physics **2** (1999).

[73] Wu, D. *Existence and stability of standing waves for nonlinear fractional Schrödinger equations with Hartree type nonlinearity*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **411** (2014), no. 2, 530–542.