UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

FACULTAD DE CIENCIA

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA Y CIENCIA DE LA COMPUTACION

Un estudio cualitativo para ecuaciones pseudo diferenciales definidas por un símbolo de tipo elíptico

Mauricio Bravo Vera

Profesor Guía: **Humberto Prado Castillo**

Tesis entregada a la Facultad de Ciencia de la Universidad de Santiago de Chile para optar al grado de Doctor en Ciencia con mención en Matemática.

Santiago de Chile

2015

Esta Tesis fue desarrollada bajo la supervisión del profesor guía Dr. Humberto Prado, académico del Departamento de Matemática y Ciencia de la Computación de la Universidad Santiago de Chile.

Ha sido aprobado por los miembros de la Comisión Calificadora, compuesta por:

Dr. Humberto Prado Castillo
PROFESOR GUÍA

Dr. Przemysław Górka
PROFESOR INFORMANTE

Dr. Enrique Reyes García
PROFESOR INFORMANTE

Dr. Claudio Fernández Jana
PROFESOR INFORMANTE

Dra. María Isabel Cortez Muñoz
Directora Programa Doctorado en Ciencia con mención en Matemática.

Pero Marín Álvarez
Director Departamento de Matemática y Ciencia de la Computación

Índice general

Introducción

El objetivo principal de la presente Tesis es el estudio relativo a la existencia y unicidad de soluciones para una clase de ecuaciones pseudo diferenciales parciales, lineales y no lineales, definidas por un símbolo f perteneciente a una clase de los símbolos elípticos, según la denominación dada en la literatura (ver [26, 39, 44]).

Inspirados en los trabajos recientes sobre el tema (ver [17–21]), nuestro objeto de estudio será la pseudo ecuación diferencial parcial

$$f(\Delta)u = U(\cdot, u), \tag{1}$$

donde $f(\Delta)$ denota a una función del operador de Laplace Δ, f es el símbolo que define a la ecuación y U es una función no lineal sujeta a ciertas hipótesis.

La motivación para estudiar la ecuación (1) se encuentra en la Teoría de cuerdas, en Cosmología y en Gravitación, donde aparecen ecuaciones de este tipo (ver [2–5, 9, 10, 41–43]). Dentro de éstas se puede mencionar la ecuación del campo de taquiones en la teoría de cuerdas bosónicas abiertas definida como

$$[(1 + \Box)e^{-c\Box} - 2]\varphi = \varphi^2,$$

donde $\Box = -\partial_t^2 + \Delta$ es el operador de D'Alembertiano (ver [16]).

La estrategia principal que se aplicará para estudiar la ecuación (1) consistirá en la construcción de una escala de espacios de Banach $\mathcal{H}^{s,p}(f),\ s \geq 0,\ 1 < p < \infty,$ definidos mediante el símbolo f.

En el trascurso de este trabajo nos interesará, en una primera etapa, responder a las siguientes preguntas cuyas respuestas nos conducirán a la obtención de propiedades cualitativas para las soluciones de la ecuación (1).

1. Propiedades de regularidad para las soluciones.

2. Determinar condiciones sobre los exponentes p, s y el símbolo f que permitan definir los espacios $\mathcal{H}^{s,p}(f)$.

3. Relación entre la escala de espacios $\mathcal{H}^{s,p}(f)$ y los correspondientes espacios de Sobolev fraccionarios $H^{s,p}(\mathbb{R}^n)$.

4. Determinar las condiciones que deben cumplir los exponentes s y p para asegurar una inyección continua de $\mathcal{H}^{s,p}(f)$ en $H^{r,p}(\mathbb{R}^n)$.

Este trabajo se ha estructurado de la siguiente manera: en el Capítulo 1, se considera el operador $(I + f(\Delta))^{s/2}$ actuando sobre el espacio $L^2(\mathbb{R}^n)$ y usando las propiedades de la transformada de Fourier sobre $L^2(\mathbb{R}^n)$ se construye el espacio $\mathcal{H}^{\beta}(f)$ y se muestra que las soluciones de la ecuación (1) pertenecen a este espacio. Luego en el Capítulo 2, se considera el operador $(I + f(\Delta))^{s/2}$, esta vez actuando sobre $L^p(\mathbb{R}^n)$. Se demostrará que bajo ciertas hipótesis sobre la función U, que naturalmente dependen de s y de p, las soluciones de la ecuación (1) pertenecen al espacio $\mathcal{H}^{s,p}(f)$. La herramienta principal usada en Capítulo 2 será el Teorema de Mikhlin relativo a los multiplicadores de Fourier. Se detallarán las condiciones exigidas al símbolo f para poder definir el espacio $\mathcal{H}^{s,p}(f)$. Es importante destacar la intrínsica relación existente entre los espacios de Banach $\mathcal{H}^{s,p}(f)$ y los clásicos espacios de Sobolev fraccionarios $H^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ descritos por P-L. Lions [27]; consultar támbien la monografía [37, 39] de M. Taylor. Aún más, haremos uso del hecho que cada $\mathcal{H}^{s,p}(f)$ se inyecta continuamente en un correspondiente espacio de Sobolev $H^{r,p}(\mathbb{R}^n)$ para cierto r, tal como se demuestra en la Proposición 2.6.5. Este resultado será fundamental en la aplicación de teoremas de punto fijo.

Finalmente, este trabajo termina con un apéndice donde se muestran algunos resultados usados en esta Tesis que hacen referencia a la transformada de Fourier definida sobre el espacio de las distribuciones temperadas.

Resumen

Esta Tesis tiene como propósito el estudio de ecuaciones pseudo diferenciales parciales definidas por un símbolo f de tipo elíptico, específicamente estaremos interesados en determinar la existencia, unicidad y las propiedades de regularidad de las soluciones de la ecuación definida como

$$f(\Delta)u = U(\cdot, u), \tag{2}$$

donde $f(\Delta)$ denota una función del operador de Laplace Δ, f es el símbolo que corresponde a la ecuación y U es una función no lineal. En este trabajo se extienden los resultados obtenidos en [17–20] a espacios de Lebesgue.

El contenido de la presente Tesis se ha divido en dos capítulos y un apéndice. En el primero, el objetivo es estudiar la ecuación (2) sobre el espacio $L^2(\mathbb{R}^n)$. La principal herramienta usada en este caso será el Teorema espectral para operadores autoadjuntos. Posteriormente, en el segundo capítulo, se estudia la ecuación pseudo diferencial (2) sobre el espacio de Banach $L^p(\mathbb{R}^n)$. En este contexto, la construcción del espacio de soluciones se basa en una clase de multiplicadores de Fourier definidos por f. En ambos casos, se determinan las hipótesis requeridas por la función U y por el símbolo f a fin de poder definir el espacio de soluciones de la ecuación (2). Finalmente, se mostrará la intrínseca relación que existe entre el espacio de las soluciones de la ecuación no lineal (2) y los espacios de Sobolev fraccionarios clásicos.

Abstract

This thesis is concerned with the study of partial pseudo-differential equations defined by a symbol f of elliptic type, specifically we are interested in determining the existence, uniqueness and regularity properties of the solution of the equation defined by

$$f(\Delta)u = U(\cdot, u), \tag{3}$$

in which $f(\Delta)$ denotes a function of the Laplace operator Δ, f is the symbol which defines the corresponding equation and U is a non linear function. We have extended the results obtained by [17–20] to the Lebesgue spaces.

This work has been divided into two chapters and an appendix. In the first one, the aim is to study the equation (3) on the space $L^2(\mathbb{R}^n)$. The main tool in this case is the Spectral Theorem for self-adjoint operators. Then, in the second chapter, we study the partial pseudo-differential equation (3) on the Banach spaces $L^p(\mathbb{R}^n)$. In this case, the construction of the space of solutions is based on a class of Fourier multipliers defined by f. In both cases, we determine the hypothesis required by the function U and the symbol f in order to define the space of solutions of the equation (3). Finally, we exhibit the intrinsic relationship that exits between the space of solutions of the non-linear equation (3) and the classical fractional Sobolev spaces.

Capítulo 1

Ecuaciones pseudo diferenciales sobre el espacio $L^2(\mathbb{R}^n)$

1.1. Preliminares

Como se mencionó en la Introducción, en algunas áreas de la Física Matemática como la Teoría de Cuerdas o Gravitación, se han desarrollado en el último tiempo modelos que se pueden considerar como funciones de operadores diferenciales tales como el operador Laplaciano $\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ definido sobre $\mathbb{R}^n$ o también el operador D'Alembertiano $\Box = \Delta - \frac{\partial^2}{\partial t^2}$. Un ejemplo es esto es la ecuación generalizada de cuerdas bosónicas definida como

$$\Delta e^{-c\Delta}\phi = U(x,\phi), \qquad c > 0,$$

ésta ecuación se puede escribir como

$$f(\Delta)\phi = U(x,\phi),$$

donde f es la función real definida como $f(x) = xe^{-cx}$. Para mayor información sobre esta ecuación, sus aplicaciones físicas y sobre sus soluciones se recomienda revisar [19] y las referencias que ahí aparecen.

El objetivo de este capítulo es introducir y desarrollar los aspectos básicos que serán necesarios en el estudio de ecuaciones no lineales definidas como

$$f(\Delta)\phi = U(x,\phi), \tag{1.1}$$

donde $f(\Delta)$ es un operador lineal no acotado determinado por el "símbolo f" y Δ es el operador de Laplace actuando sobre $\mathbb{R}^n$. En la primera parte, se desarrolla el cálculo funcional que permitirá dar la definición del operador $f(\Delta)$ que se usará tanto en este capítulo

como en el resto de esta tesis. Después de esto, usando el Teorema de Plancherel (ver A.0.3) se dará la definición del espacio $\mathcal{H}^{\beta}(f)$, que es donde se encontrará la solución de la ecuación (1.1). Como se puede suponer, este espacio también estará determinado por el símbolo f, más precisamente, el espacio $\mathcal{H}^{\beta}(f)$ estará determinado por $(1+f(-|\xi|^2))$. Consecuentemente, primero se mostrarán las condiciones que debe satisfacer el símbolo f con el objeto de definir tanto el operador lineal $f(\Delta)$ como el espacio $\mathcal{H}^{\beta}(f)$.
Considere las funciones medibles $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tales que verifican las siguientes condiciones:

(P) la función $x\mapsto f(-x^2)\geq 0$;

(E_β) Existen constantes positivas $\beta,\ M$ y R tales que

$$M(1+|\xi|^2)^{\beta/2}\leq f(-|\xi|^2),\ \text{ para todo } \xi \text{ con } |\xi|>R.$$

Se define la clase $\mathcal{G}^{\beta}$ como todas las funciones medibles que satisfacen las condiciones (P) y (E_β). De esta forma, si f satisface (P) y (E_β) se dice que f está en la clase $\mathcal{G}^{\beta}$ o bien que f es un $\mathcal{G}^{\beta}$-símbolo. Observe que, si bien, la condición (E_β) coincide con la condición de elipticidad dada para operadores pseudo diferenciales (ver [32, 38, 45]), es necesario señalar que a estos símbolos no se les exige ningún tipo de regularidad, por lo que no están definidos en el sentido de Hörmander (ver [26]).
Ahora, dada la definición de la clase $\mathcal{G}^{\beta}$ se tienen las siguientes Proposiciones.

Proposición 1.1.1 *Sean $\beta,\delta>0$ fijos. Si f y g son símbolos tales que $f\in\mathcal{G}^{\beta}$ y $g\in\mathcal{G}^{\delta}$, entonces el producto $fg\in\mathcal{G}^{\beta+\delta}$.*

Demostración: Si $f\in\mathcal{G}^{\beta}$ y $g\in\mathcal{G}^{\delta}$ es claro que el producto fg satisface la condición (P), por lo que basta probar que fg satisface la condición (E_β). Por un lado, como $f\in\mathcal{G}^{\beta}$, se tiene que existen constantes positivas M_1, β y R_1 tales que

$$M_1(1+|\xi|^2)^{\beta/2}\leq f(-|\xi|^2),\ \text{para } |\xi|>R_1. \tag{1.2}$$

Del mismo modo, como $g\in\mathcal{G}^{\delta}$, entonces existen constantes positivas M_2, δ y R_2 tales que

$$M_2(1+|\xi|^2)^{\delta/2}\leq g(-|\xi|^2),\ \text{para } |\xi|>R_2. \tag{1.3}$$

Al multiplicar las desigualdades (1.2) y (1.3), se obtiene que para todo $|\xi|>R$, donde $R=\max\{R_1,R_2\}$ se tiene

$$M(1+|\xi|^2)^{(\beta+\delta)/2}\leq fg(-|\xi|^2),$$

donde $M = M_1 M_2$. Luego, $fg \in \mathcal{G}^{\beta+\delta}$. $\square$

Proposición 1.1.2 *Si $0 < \delta < \beta$, entonces $\mathcal{G}^{\beta} \subset \mathcal{G}^{\delta}$.*

Demostración: Considere $f \in \mathcal{G}^{\beta}$. De la desigualdad $1 < (1 + |\xi|^2)$ y como $\delta < \beta$, es evidente que $(1 + |\xi|^2)^{\delta/2} < (1 + |\xi|^2)^{\beta/2}$. Por otra parte, como $f \in \mathcal{G}^{\beta}$, se tiene que f satisface la condición (P) y además existen constantes positivas M, β y R tales que para todo $|\xi| > R$

$$M(1 + |\xi|^2)^{\delta/2} < M(1 + |\xi|^2)^{\delta/2} \leq f(-|\xi|^2),$$

de esta forma $f \in \mathcal{G}^{\delta}$. $\square$

Observe que, dado $s > 0$ fijo, al considerar el símbolo f_s definido como $f_s(x) = (1 - x)^{s/2} - 1$, se tiene

$$(1 + f_s(-|\xi|^2)) = (1 + (1 + |\xi|^2)^{s/2} - 1) = (1 + |\xi|^2)^{s/2}.$$

El símbolo que aparece en el lado derecho de la última igualdad, es muy común y se ha usado, por ejemplo para definir los espacio de Sobolev generalizados $H^s(\mathbb{R}^n)$ (ver [37]). Por esta razón, sería importante determinar si existe $\beta > 0$ tal que el símbolo f_s pertenece a alguna clase $\mathcal{G}^{\beta}$, de esta forma, los espacios de Sobolev generalizados $H^s(\mathbb{R}^n)$ serían un caso particular de los espacios $\mathcal{H}^{\beta}(f)$. El siguiente lema, muestra que efectivamente f_s es un símbolo de una clase $\mathcal{G}^{\beta}$.

Lema 1.1.1 *Para $s > 0$ fijo considere la función f_s definida por $f_s(x) = (1 - x)^{s/2} - 1$. Entonces para todo $\beta \leq s$ se tiene que $f_s \in \mathcal{G}^{\beta}$.*

Demostración: Claramente la función $x \mapsto f_s(-x^2) = (1 + x^2)^{s/2} - 1 \geq 0$, por lo tanto f_s satisface la condición (P). Ahora, para mostrar que f_s satisface (E_{β}), observe que para si $\beta \leq s$, entonces

$$\begin{aligned} f_s(-|\xi|^2) &= (1 + |\xi|^2)^{s/2} - 1 \\ &\geq (1 + |\xi|^2)^{\beta/2} - 1 \\ &= (1 + |\xi|^2)^{\beta/2} \left[1 - \frac{1}{(1 + |\xi|^2)^{\beta/2}}\right]. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Por otro lado, note que para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ se tiene que $\left[1 - \frac{1}{(1 + |\xi|^2)^{\beta/2}}\right] < 1$ y además que el $\lim_{|\xi| \to \infty} \left(1 - \frac{1}{(1 + |\xi|^2)^{\beta/2}}\right) = 1$. Por lo tanto, es claro que la función $\left[1 - \frac{1}{(1 + |\xi|^2)^{\beta/2}}\right]$

es creciente y tiene como asíntota horizontal a la recta $y = 1$. Es decir, existen constantes R y $M < 1$ tales que para todo $|\xi| > R$ se tiene que $\left[1 - \dfrac{1}{(1+|\xi|^2)^{\beta/2}}\right] > M$. Con esto y con la desigualdad (1.4) se tiene que para todo $|\xi| > R$

$$f(-|\xi|^2) \geq (1+|\xi|^2)^{\beta/2}\left[1 - \frac{1}{(1+|\xi|^2)^{\beta/2}}\right] \geq M(1+|\xi|^2)^{\beta/2}$$

por lo tanto, $f_s \in \mathcal{G}^\beta$ para todo $\beta \leq s$. $\square$

Antes de definir los espacios de funciones donde se buscarán las soluciones de la ecuación (1.1) considere el siguiente cálculo funcional, el cual motiva la definición del operador $f(\Delta)$.

Suponga que la función f es una función real y que es analítica en una vecindad de $x = 0$, entonces f tiene una expansión en series de potencias

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n,$$

luego, formalmente podemos considerar que

$$f(\Delta)u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \Delta^n u. \tag{1.5}$$

A este tipo de operadores, cuya acción sobre una función u se define como una expansión en serie de potencias, tal como se muestra en (1.5) se les denominan *no locales* y es la forma en que se interpreta en la literatura Física. Por ejemplo, en los artículos [2–5, 5], el operador $e^{-c\Delta}$ se define formalmente como una serie de potencias definida por la función exponencial

$$e^{-c\Delta}u = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-c\Delta)^k}{k!} u.$$

Suponga ahora que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $\Delta^n u \in L^2(\mathbb{R}^n)$, entonces al aplicar la transformada de Fourier a ambos lados de (1.5) y aplicando las propiedades que tiene la transformada de Fourier sobre el operador Δ, tenemos formalmente que

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f(\Delta)u)(\xi) &= \mathcal{F}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\Delta^n u\right)(\xi)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\mathcal{F}(\Delta^n u)(\xi)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}(-|\xi|^2)^n\mathcal{F}(u)(\xi)\\
&= f(-|\xi|^2)\mathcal{F}(u)(\xi).
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\mathcal{F}(f(\Delta)u)(\xi) = f(-|\xi|^2)\mathcal{F}(u)(\xi)$$

Finalmente, al aplicar la transformada inversa de Fourier a ambos lados de esta última igualdad, se tiene de forma explícita la definición del operador $f(\Delta)$ que es

$$f(\Delta)u = \mathcal{F}^{-1}\left(f(-|\xi|^2)\mathcal{F}(u)(\xi)\right).$$

Si bien, esta definición coincide con la definición de operadores pseudo diferenciales [39, 45], el cálculo funcional desarrollado hasta acá sólo permite definir el operador $f(\Delta)$ en un sentido formal, sin embargo, en los artículos [18, 19] los autores desarrollando un trabajo riguroso muestran, usando teoría de vectores enteros y el hecho que el operador Laplaciano Δ en $L^2(\mathbb{R}^n)$ es un generador de un semigrupo analítico con ángulo $\pi/2$, que tal definición, para el símbolo f que se considera en este trabajo es matemáticamente consistente.

Definición 1.1.1 *Sean $\beta > 0$ y $f \in \mathcal{G}^\beta$ fijos. Se define el operador $f(\Delta)$ como*

$$f(\Delta)u = \mathcal{F}^{-1}\left(f(-|\xi|^2)\mathcal{F}(u)(\xi)\right) \tag{1.6}$$

Si bien es cierto, ya se tiene la definición del operador $f(\Delta)$, para resolver la ecuación no lineal (1.1) es necesario tener la definición del operador lineal $L = f(\Delta) + Id$, donde Id denota la identidad. Usando el hecho que la transformada de Fourier es un isomorfismo de $L^2(\mathbb{R}^n)$ en $L^2(\mathbb{R}^n)$ se deduce que

$$\begin{aligned}
Lu &= f(\Delta)u + u\\
&= \mathcal{F}^{-1}(f(-|\xi|^2)\mathcal{F}u) + \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}u)\\
&= \mathcal{F}^{-1}(f(-|\xi|^2)\mathcal{F}u + \mathcal{F}u)\\
&= \mathcal{F}^{-1}((1 + f(-|\xi|^2))\mathcal{F}u).
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Ahora que ya se tiene la definición del operador L, se procederá a dar la definición del espacio de funciones donde se hallarán las soluciones de la ecuación no lineal (1.1).

Definición 1.1.2 *Dados $\beta > 0$ y $f \in \mathcal{G}^\beta$ fijos, se define el espacio $\mathcal{H}^\beta(f)$ como la clase de todas las funciones medibles u definidas sobre $\mathbb{R}^n$ con valores complejo tales que exista su transformada de Fourier $\mathcal{F}(u)$ y que*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left[1 + f(-|\xi|^2)\right]^2 |\mathcal{F}(u)(\xi)|^2 d\xi < \infty \tag{1.8}$$

Además la aplicación $\langle\ ,\ \rangle_{\mathcal{H}^\beta(f)} : \mathcal{H}^\beta(f) \times \mathcal{H}^\beta(f) \to \mathbb{C}$ definida como

$$\langle u_1, u_2\rangle_{\mathcal{H}^\beta(f)} = \int_{\mathbb{R}^n} [1 + f(-|\xi|^2)]^2 \mathcal{F}(u_1)(\xi)\overline{\mathcal{F}(u_2)(\xi)} d\xi. \tag{1.9}$$

define un producto interno.

Observe que de la Definición del operador L dada en (1.7) y del Teorema de Plancherel (ver A.0.3), el espacio $\mathcal{H}^\beta(f)$ se puede definir como todas las funciones medible u tales que $Lu \in L^2(\mathbb{R}^n)$. A continuación se indican algunas propiedades que tiene el espacio $\mathcal{H}^\beta(f)$.

Proposición 1.1.3 *El espacio $\mathcal{H}^\beta(f)$ provisto del producto interno definido en (1.9) es un espacio de Hilbert.*

Demostración: Sea $T_f : L^2(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{H}^\beta(f)$ la aplicación definida como

$$T_f(g) = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\mathcal{F}(g)}{1 + f(-|\xi|^2)}\right).$$

Se mostrará que T_f es un isomorfismo que preserva el producto interno entre $L^2(\mathbb{R}^n)$ y $\mathcal{H}^\beta(f)$. De esta forma, como $L^2(\mathbb{R}^n)$ es un espacio de Hilbert, se demostrará que $\mathcal{H}^\beta(f)$ también lo es.

Claramente T_f es lineal. Por otra parte, dada $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$, por la definición se tiene que $T_f(g) \in \mathcal{H}^\beta(f)$, ya que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} [1 + f(-|\xi|^2)]^2 |\mathcal{F}(T_f(g))(\xi)|^2 d\xi &= \int_{\mathbb{R}^n} [1 + f(-|\xi|^2)]^2 \left|\frac{\mathcal{F}(g)(\xi)}{1 + f(-|\xi|^2)}\right|^2 d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{F}(g)(\xi)|^2 d\xi \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Observe que la última integral es finita ya que como $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$, entonces el Teorema de Plancherel garantiza que $\mathcal{F}(g) \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Finalmente, es inmediato ver que T_f tiene como inversa a la aplicación $(T_f)^{-1} : \mathcal{H}^\beta(f) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ definida por

$$(T_f)^{-1}(u) = \mathcal{F}^{-1}\left([1 + f(-|\xi|^2)]\mathcal{F}(u)\right)$$

Por último, observe que si $g_1, g_2 \in L^2(\mathbb{R}^n)$, entonces

$$\begin{aligned}
\langle T_f(g_1), T_f(g_2)\rangle_{\mathcal{H}^\beta(f)} &= \int_{\mathbb{R}^n} [1 + f(-|\xi|^2)]^2 \mathcal{F}(T_f g_1)(\xi)\overline{\mathcal{F}(T_f g_2)(\xi)} d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} [1 + f(-|\xi|^2)]^2 \frac{\mathcal{F}(g_1)(\xi)}{(1 + f(-|\xi|^2))} \frac{\overline{\mathcal{F}(g_2)(\xi)}}{(1 + f(-|\xi|^2))} d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}(g_1)(\xi)\overline{\mathcal{F}(g_2)(\xi)} d\xi \\
&= \langle \mathcal{F}(g_1), \mathcal{F}(g_2)\rangle \\
&= \langle g_1, g_2\rangle.
\end{aligned}$$

En esta última igualdad se volvió a usar el Teorema de Plancherel. Por lo tanto, se tiene que T_f es un isomorfismo isométrico entre $\mathcal{H}^\beta(f)$ y $L^2(\mathbb{R}^n)$, por lo tanto $\mathcal{H}^\beta(f)$ es un espacio de Hilbert. $\square$

Como se ve, en este Capítulo es fundamental el Teorema de Plancherel. En la Proposición que sigue se vuelve a usar fuertemente este Teorema.

Proposición 1.1.4 *Sea $\beta > 0$ y $f \in \mathcal{G}^\beta$. El espacio $\mathcal{H}^\beta(f)$ se inyecta continuamente en $L^2(\mathbb{R}^n)$.*

Demostración:

$$\begin{aligned}
\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} &= \|\mathcal{F}(u)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{F}(u)(\xi)|^2 d\xi \\
&< \int_{\mathbb{R}^n} [1 + f(-|\xi|^2)]^2 |\mathcal{F}(u)(\xi)|^2 d\xi \\
&= \|u\|_{\mathcal{H}^\beta(f)}.
\end{aligned}$$

$\square$

Considere ahora $s > 0$. Como se mostró en el Lema 1.1.1, el símbolo f_s que ahí se define es un elemento de la clase $\mathcal{G}^\beta$. Por otro lado la condición

$$(1 + f_s(-|\xi|^2))\mathcal{F}(u) \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

es equivalente a

$$(1+|\xi|^2)^{s/2}\mathcal{F}(u) \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

que es la definición del espacio de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^n)$. Por lo tanto, de esta observación se deduce que los espacios de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^n)$ son un caso particular de los espacios $\mathcal{H}^\beta(f)$ obtenidos al considerar el símbolo f_s.

Lema 1.1.2 *Sean $\beta > 0$ y $f \in \mathcal{G}^\beta$; entonces*

1. *para $s \in \mathbb{R}$ tal que $s \leq \beta$, se tiene que $\mathcal{H}^\beta(f) \hookrightarrow H^s(\mathbb{R}^n)$;*

2. *para todo $k \geq 1$ tal que $n/2 + k < s \leq \beta$, se tiene que $\mathcal{H}^\beta(f) \hookrightarrow C^k(\mathbb{R}^n)$*

Este Lema se enmarca dentro de lo que son las inclusiones de Sobolev. La demostración de 1. se puede revisar en [17], mientras que para la demostración de 2. se puede consultar [37].

1.2. Ecuación Lineal

Esta seción está dedicada al estudio de la ecuación lineal

$$Lu = g, \tag{1.10}$$

donde $L = f(\Delta) + Id$, es el operador definido en (1.7) y $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Se establecerán ciertas propiedades que tiene la solución de esta ecuación, tanto como la unicidad como la regularidad. El estudio de esta ecuación será fundamental para la resolución de la ecuación no lineal (1.1) que se desarrollará en la próxima sección.

Teorema 1.2.1 *Sean $\beta > 0$ y $f \in \mathcal{G}^\beta$ fijos. Entonces para cada $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$, existe una única solución $u_g \in \mathcal{H}^\beta(f)$ de la ecuación (1.10). Aún más, se tiene que*

$$\|u_g\|_{\mathcal{H}^\beta(f)} = \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \tag{1.11}$$

Antes de presentar la demostración, es importante señalar que ésta es idéntica a la que aparece en el artículo [7].

Demostración: Por la definición del operador L dada en (1.7), se tiene que la ecuación $Lu = g$ es equivalente a

$$\mathcal{F}^{-1}\left[(1+f(-|\xi|^2))\mathcal{F}(u)(\xi)\right] = g, \tag{1.12}$$

y como $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$, se puede aplicar la transformada de Fourier a ambos lados de la igualdad anterior para obtener

$$(1 + f(-|\xi|^2))\mathcal{F}(u)(\xi) = \mathcal{F}(g)(\xi), \tag{1.13}$$

y claramente esto es equivalente a

$$\mathcal{F}(u)(\xi) = \frac{\mathcal{F}(g)(\xi)}{1 + f(-|\xi|^2)}.$$

Por último, al aplicar la transformada inversa de Fourier a esta última igualdad se obtiene de forma explícita la solución u_g que es

$$u_g = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\mathcal{F}(g)(\xi)}{1 + f(-|\xi|^2)}\right). \tag{1.14}$$

Cabe señalar que la unicidad de esta solución la entrega la inyectividad de la transformada de Fourier en $L^2(\mathbb{R}^n)$ (ver apéndice A). Por otro lado, de la igualdad (1.13) se tiene que

$$(1 + f(-|\xi|^2))\mathcal{F}(u)(\xi) = \mathcal{F}(g)(\xi),$$

por lo tanto

$$\|u_g\|^2_{\mathcal{H}^\beta(f)} = \int_{\mathbb{R}^n} [1 + f(-|\xi|^2)]^2 |\mathcal{F}(u)(\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{F}(g)(\xi)|^2 d\xi = \|\mathcal{F}(g)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

es decir, usando el Teorema de Plancherel se tiene que

$$\|u_g\|_{\mathcal{H}^\beta(f)} = \|\mathcal{F}(g)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

En las proposiciones que siguen, se mostrará que si la función g de la ecuación lineal (1.10), además de pertenecer a $L^2(\mathbb{R}^n)$, cuenta con ciertas propiedades adicionales, entonces la solución de la ecuación u_g también tendrá propiedades extras y mayor regularidad. Por ejemplo en la Proposición 1.1.4 se mostró que dados $\beta > 0$ y un símbolo $f \in \mathcal{G}^\beta$, el espacio $\mathcal{H}^\beta(f)$ se inyecta continuamente en $L^2(\mathbb{R}^n)$. En este sentido, cabe preguntarse si al plantear la ecuación lineal

$$f(\Delta)u = g$$

en vez de considerar g como elemento de $L^2(\mathbb{R}^n)$, se considera como un elemento de algún espacio $\mathcal{H}^\beta(f)$, entonces ¿cómo se refleja eso en la solución de la ecuación? La Proposición que sigue, responde esta pregunta. Se mostrará que si la función g, que define la ecuación lineal (1.10) además de pertenecer a $L^2(\mathbb{R}^n)$ también es un elemento de algún espacio $\mathcal{H}^\delta(h)$, para cierto $\delta > 0$ y $h \in \mathcal{G}^\delta$, entonces la solución de la ecuación (1.10) no sólo pertenece a $\mathcal{H}^\beta(f)$, sino que también estará en el espacio $\mathcal{H}^{\beta+\delta}(fh)$ cuyas funciones tienen mayor regularidad.

Proposición 1.2.1 *Sean $\beta > 0$ y $f \in \mathcal{G}^\beta$ fijos. Considere la ecuación lineal $Lu = g$ definida en (1.10) con $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Si, además $g \in \mathcal{H}^\delta(h)$ para ciertos $\delta > 0$ y $h \in \mathcal{G}^\delta$, entonces la solución $u \in \mathcal{H}^\beta(f) \cap \mathcal{H}^\delta(h) \cap \mathcal{H}^{\beta+\delta}(fh)$*

Demostración: Como ya se vio, si u es la solución de la ecuación lineal (1.10), entonces

$$(1 + f(-|\xi|^2))^2 |\mathcal{F}(u)(\xi)|^2 = |\mathcal{F}(g)|^2, \tag{1.15}$$

si se multiplican ambos lados de esta igualdad por el término positivo $(1 + h(-|\xi|^2))^2$ y luego se integra sobre $\mathbb{R}^n$, como $g \in \mathcal{H}^\delta(h)$ se obtiene que

$$\int_{\mathbb{R}^n} [(1 + h(-|\xi|^2))(1 + f(-|\xi|^2))]^2 |\mathcal{F}(u)(\xi)|^2 d\xi = \|g\|^2_{\mathcal{H}^\delta(h)} < \infty.$$

Por otro lado, como $1 \leq (1 + f(-|\xi|^2))^2$, entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n} [1 + h(-|\xi|^2)]^2 |\mathcal{F}(u)(\xi)|^2 d\xi \leq \int_{\mathbb{R}^n} [(1 + h(-|\xi|^2))(1 + f(-|\xi|^2))]^2 |\mathcal{F}(u)(\xi)|^2 d\xi < \infty,$$

de esta forma se ve que $u \in \mathcal{H}^\delta(h)$. Por otra parte, como

$$(1 + hf(-|\xi|^2)) \leq (1 + h(-|\xi|^2))(1 + f(-|\xi|^2)),$$

y por lo tanto

$$\int_{\mathbb{R}^n} [1 + hf(-|\xi|^2)]^2 |\mathcal{F}(u)(\xi)|^2 d\xi \leq \int_{\mathbb{R}^n} [(1 + h(-|\xi|^2))(1 + f(-|\xi|^2))]^2 |\mathcal{F}(u)(\xi)|^2 d\xi < \infty,$$

con lo que finalmente se obtiene que $u \in \mathcal{H}^{\beta+\delta}(f \cdot h)$ □

Ahora, como Corolario del Teorema 1.2.1 se mostrará que si la función g que define la ecuación lineal (1.10) es radial, es decir, para toda rotación $R \in SO(n)$ y para todo $x \in \mathbb{R}^n$ se tiene $g(Rx) = g(x)$, entonces la solución u de la ecuación también será radial.

Corolario 1.2.1 *Si g es radial, entonces la solución de la ecuación*

$$Lu = g$$

también es radial

Demostración: Note primero que si $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ es radial, entonces su transformada de Fourier también será radial. Para ver esto, considere $R \in SO(n)$ una rotación, usando las propiedades del producto escalar, se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(g)(R\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(R\xi)\cdot y} g(y)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi\cdot(R^{-1}y)} g(y)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi\cdot y} g(Ry)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi\cdot y} g(y)dy \\
&= \mathcal{F}(g)(\xi)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, si g es radial, su transformada de Fourier $\mathcal{F}(g)$ también será radial. Luego, el Teorema 1.2.1 entrega de forma explícita cual es la solución u de la ecuación lineal (1.10), luego al evaluar esta solución en Rx se tiene

$$\begin{aligned}
u(Rx) &= \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\mathcal{F}(g)(\xi)}{(1+f(-|\xi|^2))}\right)(Rx) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{i(Rx)\cdot\xi}\mathcal{F}(g)(\xi)}{(1+f(-|\xi|^2))} d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{ix\cdot(R^{-1}\xi)}\mathcal{F}(g)(\xi)}{(1+f(-|\xi|^2))} d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{ix\cdot\xi}\mathcal{F}(g)(R\xi)}{(1+f(-|\xi|^2))} d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{ix\cdot\xi}\mathcal{F}(g)(\xi)}{(1+f(-|\xi|^2))} d\xi \\
&= u(x),
\end{aligned}$$

por lo tanto u es radial. □

1.3. La Ecuación No Lineal

El objetivo principal de esta sección será estudiar la ecuación no lineal

$$f(\Delta)u = U(\cdot, u) \tag{1.16}$$

donde la función U estará dada por

$$U(x, y) = -y + \delta V(x, y), \tag{1.17}$$

donde δ es una constante no negativa. Asumiendo cierta condición de crecimiento para la función V, se probará la existencia y unicidad de la solución de esta ecuación. Para este propósito, las principales herramientas a usar serán el teorema del punto fijo de Banach (ver por ejemplo [12, 30]) y los resultados obtenido en la Sección 1.2.

Teorema 1.3.1 *Sean $\beta > 0$ y $f \in \mathcal{G}^\beta$ fijos. Para $\delta > 0$, considere la función U_δ definida por*

$$U_\delta(x, y) = -y + \delta V(x, y)$$

donde V es una función tal que $V(\cdot, 0) \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Si existe una función $h \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, tal que se tiene la siguiente desigualdad

$$|V(x, y_1) - V(x, y_2)| \leq h(x)|y_1 - y_2|, \tag{1.18}$$

entonces para $0 < \delta < 1/\|h\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$, la ecuación no lineal (1.16) tiene una única solución $u \in \mathcal{H}^\beta(f)$.

Demostración: Observe que usando la desigualdad triangular y la condición (1.18), se tiene que para todo (x, y) la función V satisface la siguiente desigualdad:

$$\begin{aligned} |V(x, y)| &\leq |V(x, y) - V(x, 0)| + |V(x, 0)| \\ &\leq h(x)|y| + |V(x, 0)|. \end{aligned} \tag{1.19}$$

Ahora, se probará que con estas condiciones sobre la función V, dada $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$, en particular $u \in \mathcal{H}^\beta(f)$, la función $\delta V(\cdot, u)$ definida sobre $\mathbb{R}^n$ es una función que pertenece a $L^2(\mathbb{R}^n)$. Observe que usando la desigualdad (1.19), para todo $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned} \|V(\cdot, u)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} &= \int_{\mathbb{R}^n} |V(x, u(x))|^2 dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} (h(x)|u(x)| + |V(x, 0)|)^2 dx \\ &\leq 2(\|h\|^2_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|V(\cdot, 0)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}) \\ &< \infty \end{aligned} \tag{1.20}$$

Al considerar la función U definida en (1.17), entonces la ecuación no lineal (1.16) se puede escribir como

$$f(\Delta)u = -u + \delta V(\cdot, u),$$

luego, al despejar se obtiene la ecuación

$$f(\Delta)u + u = \delta V(\cdot, u),$$

y esta última se puede escribir como

$$Lu = \delta V(\cdot, u),$$

donde L es el operador definido en (1.7). Ahora, si se define el operador $\mathcal{R} : \mathcal{H}^\beta(f) \mapsto \mathcal{H}^\beta(f)$ como

$$\mathcal{R}u = w \tag{1.21}$$

donde w es la única solución de la ecuación lineal $Lw = \delta V(\cdot, u)$, se tendrá que la solución de la ecuación no lineal (1.1) será un punto fijo del operador $\mathcal{R}$, ya que si $\mathcal{R}u = u$, en tal caso, por la definición de $\mathcal{R}$, u será la solución de la ecuación lineal

$$Lu = \delta V(\cdot, u)$$

y por lo tanto, solución de la ecuación no lineal (1.16).
Primero se debe verificar que $\mathcal{R}$ está bien definido, es decir, que dado $u \in \mathcal{H}^\beta(f)$, existe un único $w \in \mathcal{H}^\beta(f)$ tal que $\mathcal{R}u = w$. Por una parte, de la definición de $\mathcal{R}$ se tiene que w es la solución de la ecuación lineal

$$Lw = \delta V(\cdot, u), \tag{1.22}$$

luego, como $u \in \mathcal{H}^\beta(f) \subset L^2(\mathbb{R}^n)$, como se acaba de probar en (1.20), la función $\delta V(\cdot, u) \in L^2(\mathbb{R}^n)$, luego por Teorema 1.2.1, la ecuación (1.22) tiene una única solución en $\mathcal{H}^\beta(f)$, por lo tanto $\mathcal{R}$ está bien definido.
A continuación se mostrará que $\mathcal{R}$ es una contracción, para esto, suponga ahora que w_1 es la solución de la ecuación $Lw_1 = \delta V(\cdot, u_1)$ y w_2 es la solución de $Lw_2 = \delta V(\cdot, u_2)$, entonces de la linealidad del operador L, el elemento $(w_1 - w_2)$ es la solución de la ecuación

$$L(w_1 - w_2) = \delta(V(\cdot, u_1) - V(\cdot, u_2)),$$

luego, por el Teorema 1.11 se tiene que

$$\|w_1 - w_2\|_{\mathcal{H}^\beta(f)} = \delta\|V(\cdot, u_1) - V(\cdot, u_2)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

por lo tanto, por una parte se tendrá que

$$\|\mathcal{R}(u_1) - \mathcal{R}(u_2)\|_{\mathcal{H}^\beta(f)} = \|w_1 - w_2\|_{\mathcal{H}^\beta(f)} = \delta\|V(\cdot, u_1) - V(\cdot, u_2)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \tag{1.23}$$

Por otro lado, por la desigualdad (1.18) se tiene que

$$\begin{aligned}
\|V(\cdot,u_1)-V(\cdot,u_2)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} &= \int_{\mathbb{R}^n} |V(x,u_1(x))-V(x,u_2(x))|^2 dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} (h(x)|u_1(x)-u_2(x)|)^2 dx \\
&\leq \|h\|^2_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \|u_1-u_2\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq \|h\|^2_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \|u_1-u_2\|_{\mathcal{H}^\beta(f)}. \qquad (1.24)
\end{aligned}$$

Observe que en la última desigualdad se usó la inclusión de $\mathcal{H}^\beta(f)$ en $L^2(\mathbb{R}^n)$ mostrada en la Proposición 1.1.4.
Finalmente, por (1.23) y (1.24) se tiene que

$$\|\mathcal{R}(u_1)-\mathcal{R}(u_2)\|_{\mathcal{H}^\beta(f)} \leq \delta\|h\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\|u_1-u_2\|_{\mathcal{H}^\beta(f)} \qquad (1.25)$$

y como $\delta\|h\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} < 1$, el operador $\mathcal{R}$ es una contracción, y como asegura el Teorema del punto fijo de Banach, se tiene que existe una única $u_0 \in \mathcal{H}^\beta(f)$ que es punto fijo de $\mathcal{R}$ y por lo tanto, solución de la ecuación no lineal (1.1). $\square$

En el Teorema 1.3.1, se mostró que si la función $V(x,y)$ satisface la condición de tipo Lipschitz global (1.18) con respecto a la variable y, entonces existe una única solución en $\mathcal{H}^\beta(f)$ de la ecuación (1.16). Ahora se mostrará que si se debilita la condición de Lipschitz a una condición de tipo local, entonces para δ suficientemente pequeño, la ecuación no lineal (1.16) aún tendrá solución, pero ahora no se puede asegurar la unicidad de ésta.
Para el siguiente Teorema se considerará el conjunto $B_{L_2}(0,R)$ que es la bola en $L^2(\mathbb{R}^n)$ centrada en 0 y de radio R, es decir

$$B_{L_2}(0,R) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^n) : \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq R\}.$$

Teorema 1.3.2 *Sean $\beta > 0$ y $f \in \mathcal{G}^\beta$ fijos. Para $\delta > 0$ considere la función U_δ definida como*

$$U_\delta(x,y) = -y + \delta V(x,y)$$

donde $V(\cdot,0) \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Suponga además que para $R > 0$, existe $h_R \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que para todo $u_1,\ u_2 \in B_{L_2}(0,R)$ se satisface la siguiente desigualdad

$$|V(x,u_1(x))-V(x,u_2(x))| \leq h_R(x)|u_1(x)-u_2(x)|. \qquad (1.26)$$

Entonces, para δ suficientemente pequeño, existe $u \in \mathcal{H}^\beta(f)$ que es solución de la ecuación (1.16).

Demostración: Suponiendo que $\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq R$, usando la desigualdad triangular y la condición (1.26) se tiene por una parte que

$$|V(x,u(x))| \leq |V(x,u(x)) - V(x,0)| + |V(x,0)| \leq h_R(x)|u(x)| + |V(x,0)|.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\|V(\cdot,u)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |V(x,u(x))|^2 dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(h(x)|u(x)| + |V(x,0)|\right)^2 dx \\
&\leq 2\left(\int_{\mathbb{R}^n} h^2(x)|u(x)|^2 + |V(x,0)|^2 dx\right) \\
&\leq 2\left(\|h\|^2_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|V(\cdot,0)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right). \qquad (1.27)
\end{aligned}$$

Entonces, por la estimación mostrada en (1.27) y usando el hecho que $u \in B_{L_2}(0,R)$,

$$\|V(\cdot,u)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq 2(\|h\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}R + \|V(\cdot,0)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}), \qquad (1.28)$$

luego, para $\rho > 0$ se define el conjunto

$$\mathcal{Y}_\rho = \{u \in \mathcal{H}^\beta(f) : \|u\|_{\mathcal{H}^\beta(f)} \leq \rho\}$$

y el operador $\mathcal{R}_\rho : \mathcal{Y}_\rho \mapsto \mathcal{Y}_\rho$, definido como $\mathcal{R}_\rho(u) = w$, donde w es la solución de la ecuación lineal $Lw = \delta V(\cdot,u)$. A continuación, se verifica que el operador $\mathcal{R}_\rho$ está bien definido.

Para probar que $\mathcal{R}_\rho$ está bien definido, se debe mostrar que para toda $u \in \mathcal{Y}_\rho$, existe un único $w \in \mathcal{Y}_\rho$ tal que $w = \mathcal{R}_\rho(u)$, pero por definición w es la solución de la ecuación $Lw = \delta V(\cdot,u)$ y $u \in \mathcal{R}_\rho \subset L^2(\mathbb{R}^n)$, entonces como se vio en (1.20), $\delta V(\cdot,u) \in L^2(\mathbb{R}^n)$, luego por Teorema 1.2.1 w es único y además

$$\|w\|_{\mathcal{H}^\beta(f)} = \delta\|V(\cdot,u)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Por otra parte como $u \in \mathcal{Y}_\rho$, entonces $\|u\|_{\mathcal{H}^\beta(f)} \leq \rho$. Además, como se mostró en la Proposición 1.1.4

$$\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \|u\|_{\mathcal{H}^\beta(f)},$$

por lo tanto, $\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \rho$, es decir, $u \in B_{L_2}(0,\rho)$ y por (1.28)

$$\|w\|_{\mathcal{H}^\beta(f)} = \delta\|V(\cdot,u)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \delta\left(\|h\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\rho + \|V(\cdot,0)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right).$$

Observe que en esta última desigualdad, si se considera $\delta < M_\rho$, donde

$$M_\rho = \rho(2\rho\|h_R\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + \|V(\cdot,0)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)})^{-1/2},$$

entonces

$$\|w\|_{\mathcal{H}^\beta(f)} \leq \rho,$$

y por lo tanto $w = \mathcal{R}_\rho(u) \in \mathcal{Y}_\rho$ y de esta forma $\mathcal{R}_\rho$ está bien definido. Ahora, forma similar a como se obtuvo la estimación (1.25), note que

$$\begin{aligned} \|\mathcal{R}_\rho(u_1) - \mathcal{R}_\rho(u_2)\|_{\mathcal{H}^\beta(f)} &= \|w_1 - w_2\|_{\mathcal{H}^\beta(f)} \\ &\leq \delta\|h_R\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\|u_1 - u_2\|_{\mathcal{H}^\beta(f)}, \end{aligned}$$

es decir, si se escoge $\delta < M_h = (\|h_R\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)})^{-1}$, $\mathcal{R}_\rho$ es una contracción; luego al escoger $\delta < \text{mín}\{M_\rho, M_h\}$, como $\mathcal{Y}_\rho$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{H}^\beta(f)$, por el Teorema del punto fijo de Banach, se tiene que existe una única solución $u \in \mathcal{Y}_\rho$ la cual es solución de la ecuación no lineal (1.16). $\square$

A continuación se mostrará que si la función U definida en (1.17) es radial, es decir, es invariante bajo rotaciones con respecto a la variable x, entonces la solución de la ecuación (1.16) también será radial.
Considere el conjunto

$$\mathcal{H}^\beta(f)_{rad} = \{u \in \mathcal{H}^\beta(f) : u(Rx) = u(x)\ c.t.p.,\ \text{donde } R \in SO(n,\mathbb{R})\}$$

Observe que el conjunto $\mathcal{H}^\beta(f)_{rad}$ es cerrado en $\mathcal{H}^\beta(f)$, luego $\mathcal{H}^\beta(f)_{rad}$ es un espacio de Hilbert.

Teorema 1.3.3 *Sean $\beta > 0$ y $f \in \mathcal{G}^\beta$. Para $\delta > 0$ considere que la función U definida en (1.17) es invariante bajo rotaciones con respecto a la variable x. Suponga además que $V(\cdot,y) \in L^2(\mathbb{R}^n)$ y que existe una función $h \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que*

$$|V(x,y_1) - V(x,y_2)| < h(x)|y_1 - y_2|.$$

Entonces, para δ suficientemente pequeño, existe una única $u \in \mathcal{H}^\beta(f)_{rad}$ que es solución de la ecuación (1.16).

Demostración: Sea $\mathcal{R}_{rad} : \mathcal{H}^{\beta}(f)_{rad} \mapsto \mathcal{H}^{\beta}(f)_{rad}$ el operador definido como $\mathcal{R}_{rad}(u) = w$, donde w es la única solución de la ecuación lineal $Lw = \delta V(\cdot, u)$. Como la no linealidad U es invariante bajo rotaciones con respecto a la variable x, se sigue que la función $\delta V(\cdot, u)$ también será invariante bajo rotaciones, de esta forma, por el Corolario 1.2.1 w es radial, por lo tanto el operador $\mathcal{R}_{rad}$ está bien definido.
Por otra parte, como se probó en (1.25)

$$\begin{aligned} \|\mathcal{R}_{rad}(u_1) - \mathcal{R}_{rad}(u_2)\|_{\mathcal{H}^{\beta}(f)_{rad}} &= \|\mathcal{R}(u_1) - \mathcal{R}(u_2)\|_{\mathcal{H}^{\beta}(f)} \\ &\leq \|h\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}^n)} \|u_1 - u_2\|_{\mathcal{H}^{\beta}(f)}. \end{aligned}$$

Nuevamente, escogiendo $\delta < (\|h\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}^n)})^{-1}$, tenemos que el operador $\mathcal{R}_{rad}$ es una contracción, y por el Teorema del punto fijo de Banach, existe una única $u \in \mathcal{H}^{\beta}(f)_{rad}$ que es solución de la ecuación no lineal (1.16). $\square$

Capítulo 2

Ecuaciones pseudo diferenciales sobre $L^p(\mathbb{R}^n)$

2.1. Preliminares

Este capítulo está dedicado, al estudio de las ecuaciones no lineales definidas como

$$f(\Delta)u = U(\cdot, u), \tag{2.1}$$

donde $f(\Delta)$, al igual que en el Capítulo 1, será entendido como un operador pseudo diferencial generado por el símbolo f. Además de establecer las condiciones que debe satisfacer la función U para asegurar la existencia de las soluciones de esta ecuación, será de especial interés establecer propiedades cualitativas del espacio $\mathcal{H}^{s,p}(f)$ que es donde se hallarán las soluciones de esta ecuación. Por mencionar algunas de estas propiedades, se mostrará que $\mathcal{H}^{s,p}(f)$, el cual se define a partir del símbolo f, puede ser considerado como un espacio de Sobolev fraccionario generalizado, el cual coincide con $H^s(\mathbb{R}^n)$ (ver por ejemplo [27, 37, 39]) si se escoge un símbolo en particular. También se mostrará que el espacio $\mathcal{H}^{s,p}(f)$ será la imagen de un operador lineal y continuo T_m definido en base a un multiplicador de Fourier sobre $L^p(\mathbb{R}^n)$.

El estudio de estas ecuaciones y de los espacios donde se encontrarán sus soluciones se puede resumir de la siguiente manera. Dados el operador $f(\Delta)$, que se define como una función del Laplaciano Δ, y $s \geq 0$ se considerará el operador

$$L = (I + f(\Delta))^{s/2}.$$

Asociado a este operador L, se tendrá la función acotada $\mathcal{M}_{(f,s)}$, definida como

$$\mathcal{M}_{(f,s)}(x) = (1 + f(-|x|^2))^{-s/2}.$$

Si esta función es un multiplicador de Fourier para $L^p(\mathbb{R}^n)$, es decir, el operador $T_{\mathcal{M}}$, definido como

$$T_{\mathcal{M}}(g) = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{M}_{(f,s)}(x)\mathcal{F}(g))$$

es acotado sobre $L^p(\mathbb{R}^n)$, entonces se podrá definir el espacio $\mathcal{H}^{s,p}(f) = T_{\mathcal{M}}(L^p(\mathbb{R}^n))$. Por lo tanto, el objetivo de las primeras secciones de este capítulo será definir las condiciones necesarias que deben satisfacer tanto el símbolo f como la constante s de modo que $\mathcal{M}_{(f,s)}$ sea efectivamente un multiplicador de Fourier para $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Con esta finalidad es que este capítulo se estructura de la siguiente manera. En esta primera sección se darán las definiciones y propiedades básicas con los que se trabajará durante todo el capítulo. Luego, en la sección 2.2 se detallarán las condiciones que debe tener un símbolo f para poder definir el multiplicador de Fourier deseado, de esta forma se definirá la clase $\mathcal{G}_s^{\beta}$. Una vez establecida esta clase de símbolos, en la Sección 2.3 se mostrarán algunos ejemplos de funciones relevantes que pertenecen a esta clase. En la sección 2.4 se mostrará que efectivamente, los símbolos de $\mathcal{G}_s^{\beta}$ generan multiplicadores de Fourier. En las secciones 2.5 y 2.6 se construirá el espacio $\mathcal{H}^{s,p}(f)$ y se mostrarán las inclusiones sobre los Sobolev fraccionarios $H^{s,p}(\mathbb{R}^n)$, respectivamente. Por último, en la sección 2.7 se resuelve la ecuación no lineal (2.1) previo estudio de una ecuación lineal.

En el presente trabajo, se utilizarán reiteradamente algunas propiedades relacionadas a la transformada de Fourier de distribuciones temperadas. Si el lector no está familiarizado con estos conceptos, se recomienda una lectura previa del Capítulo A en el Apéndice. También se recomienda consultar [14, 30, 32, 36].

En el resto del capítulo, el número natural n denotará la dimensión del espacio Euclideano $\mathbb{R}^n$.

Definición 2.1.1 *Un multi índice $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_n)$ es una n-tupla de enteros no negativos. El largo del multi índice α es el número entero $|\alpha|$ definido como*

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i.$$

Sean α, β multi índices, diremos que $\alpha \leq \beta$ si y solamente si $|\alpha| = |\beta| = n$ y para cada $i = 1 \dots n$ se tiene que $\alpha_i \leq \beta_i$.

Si $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ es un elemento de $\mathbb{R}^n$ y $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ es un multi índice, se define el número real x^α como

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}.$$

Por último, si α es un multi índice, se define el operador diferencial D^α como

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

En el desarrollo de este Capítulo, se usará con frecuencia multi índices del tipo $\alpha \leq (1, 1, \dots, 1)$, esto, de acuerdo a la Definición que se acaba de dar, quiere decir que si el multi índice $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ es de esta clase, entonces para cada $i = 1, \dots n$ se tiene que α_i sólo puede ser 1 ó 0 y por lo tanto el operador D^α consiste en derivar a lo más una vez con respecto a cada variable.

Como se mencionara anteriormente, al extender el estudio del espacio $L^2(\mathbb{R}^n)$ a $L^p(\mathbb{R}^n)$ con $p \neq 2$, ya no será posible contar con las propiedades que tenía la transformada de Fourier como ser un isomorfismo isométrico y con esto tampoco se tendrá la identidad de Parseval. Sin embargo, para el espacio $L^p(\mathbb{R}^n)$ se contará con una herramienta equivalente que son los multiplicadores de Fourier. A continuación se presenta la definición de multiplicador de Fourier que ofrece Stein en [34]. Para profundizar en este tema también se recomienda consultar [1, 13, 22, 23].

Definición 2.1.2 (Multiplicador de Fourier) *Sea $m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ una función acotada y medible. Se dirá que m es un multiplicador de Fourier para $L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ si para cada $f \in L^2(\mathbb{R}^n) \cap L^p(\mathbb{R}^n)$, la función $\mathcal{F}^{-1}(m(x)\mathcal{F}(f)) \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y si el operador $T_m : L^2(\mathbb{R}^n) \cap L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)$ definido como $T_m(f) = \mathcal{F}^{-1}(m(x)\mathcal{F}(f))$ es continuo, es decir, existe una constante $A > 0$ tal que*

$$\|T_m(f)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq A\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \qquad f \in L^2(\mathbb{R}^n) \cap L^p(\mathbb{R}^n). \tag{2.2}$$

Note que del Teorema de Plancherel se tiene que $\mathcal{F}(f) \in L^2(\mathbb{R}^n)$ y como $m \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ entonces $m\mathcal{F}(f) \in L^2(\mathbb{R}^n)$, por lo tanto de la definición se tiene que $T_m f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Como es habitual, la norma del multiplicador m se define como el menor A que satisface (2.2). La clase de todos los multiplicadores de Fourier para $L^p(\mathbb{R}^n)$ se denota por $\mathcal{M}_p$.

Note, que si se denota como $D = L^2(\mathbb{R}^n) \cap L^p(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$, entonces se tiene por (2.2) que $T_m : D \subset L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)$ es un operador acotado. Por otra parte, para todo $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ se puede considerar la sucesión $\{g_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ definida como $g_j = \rho_j * g$, donde ρ_j es una sucesión regularizante o mollifier (ver [8]). De acuerdo a la definición, para cada $j \in \mathbb{N}$ se tiene que $\rho_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, por lo tanto, $\rho_j \in L^q(\mathbb{R}^n)$ para todo $q \in [1, \infty]$, en particular $\rho_j \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^{\frac{2p}{3p-2}}(\mathbb{R}^n)$. Como $\rho_j \in L^1(\mathbb{R}^n)$, por la desigualdad de Young (ver Proposición 1.3.2 [1]), se tiene que

$$\|g_j\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \|\rho_j * g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|\rho_j\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

De igual forma, como $\rho_n \in L^{\frac{2p}{3p-2}}(\mathbb{R}^n)$, se tiene también por la desigualdad de Young que

$$\|g_j\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|\rho_j * g\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \|\rho_j\|_{L^{\frac{2p}{3p-2}}(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Por lo tanto, $g_j \in L^2(\mathbb{R}^n) \cap L^p(\mathbb{R}^n)$ y por Teorema 4.22 de [8] es claro que $g_j \to g$ en $L^p(\mathbb{R}^n)$. De esta forma se ve que el conjunto D es denso en $L^p(\mathbb{R}^n)$ y por Teorema I.7 de [30], el operador T_m tiene una única extensión acotada $\widetilde{T}_m : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)$, que satisface la misma desigualdad (2.2). En el resto del capítulo, a la extensión del operador T_m también se le denotará por T_m.

Como ejemplos de multiplicadores de Fourier, se pueden mencionar a la transformada de Riesz R_j y al potencial de Bessel J_s.

La representación integral para la transformada de Riesz sobre $\mathbb{R}^n$ (ver [34]) está dada por

$$R_j(f)(x) = \lim_{\epsilon \to 0} c_n \int_{|y|\geq\epsilon} \frac{y_j}{|y|^{n+1}} f(x-y)dy, \qquad j = 1, \ldots, n,$$

donde $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y $c_n = \dfrac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\pi^{(n+1)/2}}$.

En [28, 34, 35] se muestra que $(R_j f)(x) = \mathcal{F}^{-1}(i\frac{x_j}{|x|}\mathcal{F}(f))$, para $j = 1, \ldots, n$, es decir, la función $m(x) = i\frac{x_j}{|x|^{n+1}}$ es el Multiplicador de Fourier sobre $L^p(\mathbb{R}^n)$ que define al operador de Riesz sobre $\mathbb{R}^n$.

Como se mencionó anteriormente, el segundo ejemplo que se considerará es el potencial de Bessel J_s, el cual se define para todo $s \geq 0$ como

$$J_s(f) = (I - \Delta)^{-s/2}(f), \qquad s > 0.$$

Este potencial tiene una representación como un producto de convolución (ver [34])

$$J_s(f) = G_s * f,$$

donde

$$G_s(x) = \frac{1}{(4\pi)^{s/2}\Gamma(s/2)} \int_0^\infty e^{-\pi|x|^2/y} e^{-y/4\pi} y^{(-n+s)/2} \frac{dy}{y}.$$

y al considerar la transformada de Fourier en el sentido de las distribuciones se tiene que

$$\mathcal{F}(J_s(f)) = (1 + |x|^2)^{-s/2} \mathcal{F}(f),$$

por lo tanto, la función $m(x) = (1 + |x|^2)^{-s/2}$ es el multiplicador de Fourier para $L^p(\mathbb{R}^n)$ que define el potencial de Bessel. Para más detalles sobre multiplicadores de Fourier y potenciales, se recomienda [6, 28, 34, 40].

A continuación, se presenta un Teorema que permite determinar, a partir de estimaciones sobre sus derivadas de orden α, cuándo una función m define un multiplicador de Fourier para $L^p(\mathbb{R}^n)$. Cabe señalar que si bien, el Teorema de Mikhlin entrega tal información(ver Teorema 3, Cap IV, [34]), acá se usará una variación de este Teorema dada por Guidetti en [22], que si bien, por un lado le exige más regularidad a la función m, por otro, ésta debe satisfacer una condición más débil que la exigida por en el Teorema de Mikhlin.

Teorema 2.1.1 *Sea $m \in C^n(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ tal que, para todo multi índice $\alpha \leq (1, \ldots, 1)$, existe una constante positiva C, tal que para todo $\xi \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$,*

$$|\xi^\alpha D^\alpha m(\xi)| \leq C. \tag{2.3}$$

Entonces m es un multiplicador de Fourier para $L^p(\mathbb{R}^n)$ para todo $p \in (1, \infty)$.

2.2. La clase $\mathcal{G}_s^\beta$

A continuación, al considerar f y γ fijos se introduce la función $\mathcal{M}_{f,\gamma}$. El estudio de esta función es fundamental en este Capítulo, ya que, para el símbolo f adecuado, será éste el que determine el multiplicador de Fourier y posteriormente el espacio de funciones donde se hallarán las soluciones de la ecuación no lineal (2.1).

Definición 2.2.1 *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Para cada $\gamma \in \mathbb{R}$ fijo se define $\mathcal{M}_{f,\gamma} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ como*

$$\mathcal{M}_{f,\gamma}(x) = (1 + f(-|x|^2))^\gamma. \tag{2.4}$$

Como se mencionó anteriormente, se mostrará primero que la función $\mathcal{M}_{f,\gamma}$ es un multiplicador de Fourier para $L^p(\mathbb{R}^n)$. Para esto, se usará el Teorema 2.1.1, por lo que se debe estimar el crecimiento que tienen las derivadas D^α de la función $\mathcal{M}_{f,\gamma}$, donde $\alpha \leq (1,\ldots,1)$. Para tal efecto, será conveniente, con el objeto de facilitar algunos cálculos, establecer la forma general que tienen estas derivadas. Para esto, primero observe que si α es un multi índice tal que $|\alpha| = 1$, se tendrá entonces que $\alpha = (0,\ldots,1,\ldots,0)$, es decir $x_i = x^\alpha$ y $D^\alpha = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$, por lo tanto

$$\begin{aligned}
D^\alpha \mathcal{M}_{f,\gamma}(x) &= \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\mathcal{M}_{f,\gamma}(x)\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x_i}(1+f(-|x|^2))^\gamma \\
&= (-2\gamma)x_i(1+f(-|x|^2))^{(\gamma-1)}(f'(-|x|^2))
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Si ahora se deriva la expresión que aparece en (2.5) con respecto a la variable $x_j \neq x_i$ (recuerde que $\alpha \leq (1,\ldots,1)$) se obtiene $D^\beta \mathcal{M}_{f,\gamma}(x)$ donde β es un multi índice tal que $|\beta| = 2$, es decir

$$\begin{aligned}
D^\beta \mathcal{M}_{f,\gamma} &= \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\mathcal{M}_{f,\gamma}(x)\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x_j}\left((-2\gamma)x_i(1+f(-|x|^2))^{(\gamma-1)}(f'(-|x|^2))\right) \\
&= C_1 x_i x_j(1+f(-|x|^2))^{\gamma-2}(f'(-|x|))^2 + C_2 x_i x_j(1+f(-|x|^2))^{\gamma-1}f''(-|x|^2)
\end{aligned}$$

donde $C_1 = (-2)^2(\gamma)(\gamma-1)$ y $C_2 = (-2)^2\gamma$. Por otro lado, como $x_i x_j = x^\beta$, se tiene por lo tanto que

$$\begin{aligned}
D^\beta \mathcal{M}_{f,\gamma}(x) &= C_1 x^\beta(1+f(-|x|^2))^{\gamma-2}(f'(-|x|))^2 + C_2 x^\beta(1+f(-|x|^2))^{\gamma-1}f''(-|x|^2) \\
&= x^\beta\left[C_1(1+f(-|x|^2))^{\gamma-2}(f'(-|x|))^2 + C_2(1+f(-|x|^2))^{\gamma-1}f''(-|x|^2)\right]
\end{aligned}$$

De forma similar, al caso anterior, si se deriva nuevamente, ahora con respecto a la variable x_k distinta a x_i y a x_j, se tiene que existe un multi índice ρ, con $|\rho| = 3$ tal que $D^\rho = \frac{\partial}{\partial x_k}D^\beta$. De esta forma se obtiene que

$$\begin{aligned}
D^\rho \mathcal{M}_{f,\gamma}(x) &= \frac{\partial}{\partial x_k}D^\beta \mathcal{M}_{f,\gamma}(x) \\
&= x^\beta x_k\Big[\widetilde{C}_1(1+f(-|x|^2))^{\gamma-3}(f'(-|x|^2))^3 + \\
&\quad \widetilde{C}_2(1+f(-|x|^2))^{\gamma-2}(f'(-|x|^2)f''(-|x^2|)) + \widetilde{C}_3(1+f(-|x|^2))^{\gamma-1}(f^{(3)}(-|x|^2))\Big]
\end{aligned}$$

donde $\widetilde{C}_1 = 2C_1(\gamma - 2)$, $\widetilde{C}_2 = (4C_1 + 2(C_2)(\gamma - 1))$ y $\widetilde{C}_3 = 2C_2$. Note además que $x^\beta x_k = x^\rho$

Según lo que se puede observar acá, es natural pensar que para todo multi índice α existan ciertas constantes $\widetilde{C}_i$ tales que $D^\alpha \mathcal{M}_{f,\gamma}$ sea una suma de potencias de $(1 + f(-|x|^2))$ y potencias de las distintas derivadas $f^{(k)}(-|x|^2)$, multiplicadas por x^α y por estas constantes. En el siguiente lema no sólo se verifica esta idea, sino que además se muestra las relación que tienen las potencias de las derivadas $f^{(k)}(-|x|^2)$ y la forma en que dependen del multi índice α.

Lema 2.2.1 *Sea α un multi índice tal que $\alpha \leq (1, 1, \ldots, 1)$. Entonces para cada $i = 1 \ldots |\alpha|$ existen constantes $\widetilde{C}_i = \widetilde{C}(\gamma, i)$ tales que*

$$D^\alpha \mathcal{M}_{f,\gamma}(x) = x^\alpha \sum_{i=1}^{|\alpha|} \widetilde{C}_i (1 + f(-|x|^2))^{(\gamma - i)} [(f'(-|x|^2))^{P_{i1}} (f''(-|x|^2))^{P_{i2}} \ldots (f^{(n)}(-|x|^2))^{P_{in}}]$$

donde las potencias P_{ij} son tales que para cada i, j $P_{ij} \geq 0$, además para cada i fijo se tiene que:

1. $P_{ij} = 0$ *si* $j > |\alpha|$
2. $\sum_{j=1}^{n} j P_{ij} = |\alpha|$ *y*
3. $\sum_{j=1}^{n} P_{ij} = i$.

Demostración: Probaremos este Lema por inducción sobre $k = |\alpha|$. Este caso es evidente, ya que si $|\alpha| = 1$, esto quiere decir que para cierto $1 \leq i \leq n$, $\alpha = (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{i}, 0, \ldots, 0)$ y luego, como se mostró en (2.5) se tiene que

$$\begin{aligned} D^\alpha \mathcal{M}_{f,\gamma}(x) &= \frac{\partial}{\partial x_i} \mathcal{M}_{f,\gamma}(x) \\ &= \gamma x_i (1 + f(-|x|^2))^{(\frac{\gamma - 2}{2})} f'(-|x|^2) \\ &= C x^\alpha (1 + f(-|x|^2))^{(\frac{\gamma - 2}{2})} f'(-|x|^2). \end{aligned}$$

En este caso, $P_{11} = 1$ y $P_{ij} = 0$ para todo $ij \neq 11$ y $C = \gamma$, claramente con estos valores se satisface el lema para el caso en que $|\alpha| = 1$. Supongamos ahora que el Lema se satisface para cualquier multi índice β con $|\beta| = k$. Probaremos, entonces que también se satisface para cualquier multi índice α con $|\alpha| = k + 1$. Suponga entonces que $|\alpha| = k + 1$.

Entonces es claro que

$$D^{\alpha} = \frac{\partial}{\partial x_r} D^{\beta},$$

donde $|\beta| = k$ y $r \in \mathbb{N}$ con $1 \leq r \leq n$. Luego

$$\begin{aligned}
& D^{\alpha}\mathcal{M}_{f,\gamma}(x) = \frac{\partial}{\partial x_r}(D^{\beta}\mathcal{M}_{f,\gamma}(x)) \\
= \; & \frac{\partial}{\partial x_r} x^{\beta} \sum_{i=1}^{k} C(k,i)(1+f(-|x|^2))^{(\frac{\gamma-2i}{2})}[(f'(-|x|^2))^{P_{i1}} \dots (f^{(n)}(-|x|^2))^{P_{in}}] \\
= \; & x^{\beta} \sum_{i=1}^{k} C(k,i) \frac{\partial}{\partial x_r} \left((1+f(-|x|^2))^{(\frac{\gamma-2i}{2})} \right) [(f'(-|x|^2))^{P_{i1}} \dots (f^{(n)}(-|x|^2))^{P_{in}}] \\
= \; & x^{\beta} \sum_{i=1}^{k} C(k,i) \Big(C x_r (1+f(-|x|^2))^{(\frac{\gamma-2i-2}{2})} f'(-|x|^2)[(f'(-|x|^2))^{P_{i1}} \dots (f^{(n)}(-|x|^2))^{P_{in}}]) + \\
& +(1+f(-|x|^2))^{(\frac{\gamma-2i}{2})} \frac{\partial}{\partial x_r}[(f'(-|x|^2))^{P_{i1}} \dots (f^{(n)}(-|x|^2))^{P_{in}}] \Big) \\
= \; & x^{\beta} \sum_{i=1}^{k} C(k,i) \Big(C_0 x_r (1+f(-|x|^2))^{(\frac{\gamma-2i-2}{2})} f'(-|x|^2)[(f'(-|x|^2))^{P_{i1}} \dots (f^{(n)}(-|x|^2))^{P_{in}}]) + \\
& +(1+f(-|x|^2))^{(\frac{\gamma-2i}{2})} \sum_{t=1}^{k} [C_1 x_r (f'(-|x|^2))^{P^*_{i1}} \dots (f^{(n)}(-|x|^2))^{P^*_{in}}] \Big) \\
= \; & x^{\beta} x_r \sum_{i=1}^{k} C(k,i) \Big(C_0 (1+f(-|x|^2))^{(\frac{\gamma-2i-2}{2})} [(f'(-|x|^2))^{P_{i1}+1} \dots (f^{(n)}(-|x|^2))^{P_{in}}]) + \\
& +(1+f(-|x|^2))^{(\frac{\gamma-2i}{2})} \sum_{t=1}^{k} [C_t (f'(-|x|^2))^{P^*_{i1t}} (f''(-|x|^2))^{P^*_{i2t}} \dots (f^{(n)}(-|x|^2))^{P^*_{int}}] \Big)
\end{aligned}$$

donde

$$P^*_{ijt} = \begin{cases} P_{ij} - 1 & \text{si} \quad r = j \\ P_{ij} + 1 & \text{si} \quad r = j-1 \\ P_{ij} & \text{otro caso} \end{cases}$$

Con esto, tenemos que

$$
\begin{aligned}
D^\alpha \mathcal{M}_{f,\gamma}(x) &= x^\alpha \Bigg(C(k,1)(1+f(-|x|^2))^{(\frac{\gamma-2}{2})} \sum_{t=1}^{k} C_t (f'(-|x|^2))^{P^*_{11t}} \ldots (f-|x|^2)^{P^*_{1nt}} \\
&\quad + \sum_{i=2}^{k} C_i (1+f(-|x|^2))^{(\frac{\gamma-2i}{2})} \left[(f'(-|x|^2))^{P_{(i-1)1}+1} \ldots (f^{(n)}(-|x|^2))^{P_{(i-1)n}} + \right. \\
&\quad \left. \sum_{t=1}^{k} (f(-|x|^2))^{P^*_{i1t}} (f(-|x|^2))^{P^*_{int}} \right] \\
&\quad + (1+f(-|x|^2))^{(\frac{\gamma-2(k+1)}{2})} (f(-|x|^2))^{P_{k1}+1} (f(-|x|^2))^{P_{k2}} \ldots (f^{(n)}(-|x|^2))^{P_{kn}} \Bigg)
\end{aligned}
$$

Observemos que para todo i, t fijos se tiene que

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} P^*_{ijt} &= P^*_{i1t} + P^*_{i2t} + \ldots + P^*_{irt} + P^*_{i(r+1)t} + \ldots + P^*_{int} \\
&= P_{i1} + P_{i2} + \ldots + P_{ir} - 1 + P_{i(r+1)} + 1 + \ldots + P_{in} \\
&= \sum_{j=1}^{n} P_{ij} \\
&= i
\end{aligned}
$$

Por otra parte, de forma análoga a lo anterior se tiene

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} j(P^*_{ijt}) &= P_{i1} + 2P_{i2} + \ldots + r(P_{ir} - 1) + (r+1)(P_{i(r+1)} + 1) + \ldots + P_{in} \\
&= \left(\sum_{j=1}^{n} jP_{ij} \right) + r + 1 - r \\
&= k + 1
\end{aligned}
$$

Además, para todo $i > 1$ fijo, se tiene que

$$
\begin{aligned}
(P_{(i-1)1} + 1) + P_{(i-1)2} + \ldots + P_{(i-1)n} &= 1 + \sum_{j=1}^{n} P_{(i-1)j} \\
&= 1 + (i-1) \\
&= i
\end{aligned}
$$

Y por otro lado

$$
\begin{aligned}
(P_{(i-1)1} + 1) + 2P_{(i-1)2} + \ldots + jP_{(i-1)j} + \ldots + nP_{(i-1)n} &= 1 + \sum_{j=1}^{n} jP_{(i-1)j} \\
&= 1 + k
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, el Lema se verifica para todo $|\alpha| = k+1$. $\square$

Ahora que ya se tiene una expresión general para la función $D^\alpha \mathcal{M}_{f,\gamma}$, se deben buscar las condiciones que deben satisfacer tanto el símbolo f y las constantes β y γ para que la función $\mathcal{M}_{f,\gamma}$ sea un multiplicador de Fourier para $L^p(\mathbb{R}^n)$. En particular, será de interés considerar el caso $\gamma = -s/2$, donde $s \geq 0$, es decir, se buscarán las condiciones para que la función definida como

$$\mathcal{M}_{f,(\frac{-s}{2})}(x) = (1 + f(-|x|^2))^{-s/2}$$

sea un multiplicador de Fourier para $L^p(\mathbb{R}^n)$.
Las primeras condiciones que se le pedirán al símbolo f coinciden con las exigidas al símbolo f en el capítulo 1, las cuales eran:

G_1. La función $t \mapsto f(-t^2) \geq 0$

G_2. Existen constantes positivas $\beta,\ R,\ M$ tales que

$$M(1+|\xi|^2)^{\frac{\beta}{2}} \leq f(-|\xi|^2), \text{ para todo } \xi \text{ con } |\xi| > R.$$

Ahora se exigirán, adicionalmente, dos condiciones más, una sobre el símbolo f y la otra con respecto a $f^{(k)}$, su derivada de orden k. Estas son:

G_3. Existen constantes positivas $M,\ N$ tales que para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$(1 + f(-|\xi|^2)) \leq M(1+|\xi|^2)^N.$$

G_4. Dado $s \geq 0$, para cada $k \geq 1$ existe una constante positiva $C = C(k,s)$ tales que

$$|f^{(k)}(-|\xi|^2)| \leq C(1+|\xi|^2)^{k\left(\frac{\beta s}{4n}-1\right)+\frac{\beta}{2}},$$

donde β es la constante de la condición G_2.

Definición 2.2.2 *Dado $s \geq 0$, se define la clase $\mathcal{G}_s^\beta$ como las funciones que satisfacen las cuatro condiciones $G_1 - G_4$.*

Observe que de la condición G_2, se deduce para $|x| > R$ existe M tal que

$$\frac{M}{(1+f(-|\xi|^2))} \leq \frac{1}{(1+|\xi|^2)^{\beta/2}}. \tag{2.6}$$

Note que en la condición G_4, si β y s son tales que $\beta s \leq 4n$, entonces existe k_0 suficientemente grande tal que la potencia del lado derecho será negativa para todo $k > k_0$ y eso impone la condición que $|f^{(k)}(-|x|^2)| \leq C$ para todo $k > k_0$.

Proposición 2.2.1 *Si $0 \leq s_1 < s_2$, entonces $\mathcal{G}^{\beta}_{s_1} \subset \mathcal{G}^{\beta}_{s_2}$.*

Demostración: Considere $f \in \mathcal{G}^{\beta}_{s_1}$. Como las condiciones $G_1,\ G_2$, y G_3 no dependen de s, sólo se debe probar que f satisface la condición G_4 para s_2. Pero como $s_1 \leq s_2$, entonces para cada k existe C tal que

$$|f^{(k)}(-|\xi|^2)| \leq C(1+|\xi|^2)^{k\left(\frac{\beta s_1}{4n}-1\right)+\frac{\beta}{2}} \leq C(1+|\xi|^2)^{k\left(\frac{\beta s_2}{4n}-1\right)+\frac{\beta}{2}}$$

por lo tanto $f \in \mathcal{G}^{\beta}_{s_2}$. □

2.3. Ejemplos de símbolos en la clase $\mathcal{G}^{\beta}_{s}$

En esta sección se mostrarán algunos símbolos f que pertenecen a la clase $\mathcal{G}^{\beta}_{s}$. En cada caso, se determinarán los valores de β y s que hacen que tal símbolo sea efectivamente un elemento de esta clase.

El primer símbolo que se considerará en esta parte será $f(x) = -x$. Este símbolo es de suma importancia en este Capítulo, ya que con éste se obtiene la función

$$\mathcal{M}_{f,(\frac{-s}{2})}(x) = (1+|x|^2)^{-s/2}$$

la cual, como se mostró con anterioridad, que si se considera como multiplicador de Fourier, coincide con el potencial de Bessel J_s (ver [34]) y además define los Espacios de Sobolev Generalizados (ver [37, 39]). Para que este símbolo esté en la clase $\mathcal{G}^{\beta}$ será necesario que β sea igual a 2 y que s sea un real no negativo. Esta última propiedad muestra que el símbolo f coincide, ya sea desde el punto de vista del potencial de Bessel como de los elementos de la clase $\mathcal{G}^{\beta}_{s}$. Esto queda expresado en el siguiente lema.

Lema 2.3.1 *Sea $\beta = 2$. Entonces para todo $s \geq 0$, el símbolo $f(x) = -x$ está en la clase $\mathcal{G}^{\beta}_{s}$.*

Demostración: Se debe mostrar que al considerar $\beta = 2$ y $s \geq 0$, el símbolo f satisface las cuatro condiciones de la Definición 2.2.2.
La condición G_1 es clara ya que $f(-t^2) = t^2 \geq 0$.
Ahora, para probar que f satisface la condición G_2, considere $1 \leq |x|$, entonces

$$(1 + |x|^2)^{\beta/2} \leq (|x|^2 + |x|^2) \leq 2^{\beta/2}(|x|^2)^{\beta/2} = 2^{\beta/2}|x|^{\beta},$$

y como $\beta = 2$,

$$\frac{1}{2}(1 + |x|^2) \leq |x|^2 = f(-|x|^2)$$

es decir, f satisface la segunda condición.
La verificación de la condición G_3 es trivial ya que como $f(-|x|^2) = |x|^2$, entonces

$$(1 + f(-|\xi|^2)) = (1 + |\xi|^2)$$

y en este caso basta considerar $M = 1$ y $N = 1$.
Por último, para la condición G_4, como $f(x) = -x$, se tiene que $f'(x) = -1$ y $f^{(k)}(x) = 0$ para todo entero $k > 1$, por lo que sólo es necesario analizar el caso para $k = 1$, es decir, para satisfacer G_4 debe existir C tal que

$$|f'(-|x|^2)| = 1 \leq C(1 + |x|^2)^{k\left(\frac{\beta s}{4n} - 1\right) + \frac{\beta}{2}},$$

es decir, la potencia del lado derecho debe ser positiva, pero al reemplazar $k = 1$ y $\beta = 2$ esta potencia es igual a $s/2 \geq 0$ luego, el símbolo satisface la condición G_4 y por lo tanto $f \in \mathcal{G}_s^{\beta}$. $\square$

A continuación se mostrará que la propiedad que tiene el símbolo $f(x) = -x$, de pertenecer a la clase $\mathcal{G}_s^{\beta}$ para todo $s \geq 0$ y β adecuado, no la tienen todos los símbolos. Se considerará el símbolo $g(x) = -xe^{cx}$, donde $c > 0$, y se verá que en este caso, para β adecuado, el símbolo g está en toda clase $\mathcal{G}_s^{\beta}$, sólo para los valores $s \geq 2n$.

La importancia del símbolo $g(x) = -xe^{cx}$ que se considerará a continuación, radica en que la función $\mathcal{M}_{g,s}$ generada al considerar este símbolo es

$$\mathcal{M}_{g,s}(x) = (1 + |x|^2 e^{-c|x|^2})^{-s/2},$$

que como Multiplicador de Fourier define el espacio $\mathcal{H}^{c,\infty}$ que se define en el artículo [19] y donde se encuentran las soluciones de la ecuación de cuerdas bosónicas generalizadas. Esta ecuación está determinada por el operador $-\Delta e^{c\Delta}$.

Lema 2.3.2 *Sea $\beta = 2$. Entonces para todo $s \geq 2n$, el símbolo $g(x) = -xe^{cx}$, donde $c > 0$, está en la clase $\mathcal{G}_s^\beta$.*

Demostración: Como $g(-t^2) = t^2e^{-ct^2} > 0$, el símbolo g verifica la condición G_1.
Observe ahora que $g(-|x|^2) = |x|^2e^{-c|x|^2} \leq |x|^2$ y por Lema 2.3.1, existen constantes M, R tales que, considerando $\beta = 2$, g satisface condición G_2.
Por otro lado, la desigualdad $g(-|x|^2) = |x|^2e^{-c|x|^2} \leq |x|^2$ verifica de forma inmediata la condición G_3 con $M = N = 1$.
Finalmente, como $s \geq 4n$, se tiene que para todo entero $k > 0$, $k(\frac{s}{4n} - 1) + 1 \geq 1$. Por otro lado, se tiene al usar la regla de Leibnitz para las derivadas que existen constantes $C_1(k) = C_1$ y $C_2(k) = C_2$ tales que

$$g^{(k)}(x) = -C_1e^{cx} - C_2xe^{cx}$$

luego para todo $k > 0$ se tiene que

$$\begin{aligned}
|g^{(k)}(-|x|^2)| &\leq |C_1e^{-c|x|^2} + C_2|x|^2e^{-c|x|^2}| \\
&\leq C_1 + C_2|x|^2 \\
&\leq C(1 + |x|^2) \\
&\leq C(1 + |x|^2)^{k(\frac{s}{4n}-1)+1}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, si $s \geq 4n$ y $\beta = 2$, $g \in \mathcal{G}_s^\beta$. □

El último símbolo que se dará como ejemplo será $f(x) = (-x)^{\alpha/2}$, donde $0 < \alpha < 1$. La función que se genera al reemplazar este símbolo en $\mathcal{M}_{f,(\frac{-s}{2})}$ es $(1 + (-x)^{\alpha/2})^{-s/2}$. Esta función se relaciona al operador $(I + (-\Delta)^{\alpha/2})^{s/2}$ que está determinado por la potencia fraccionaria del Laplaciano. De esta forma se mostrará que si este símbolo está en la clase $\mathcal{G}_s^\beta$ entonces definirá un multiplicador de Fourier y por lo tanto se tendrá el espacio $\mathcal{H}^{s,p}(f)$ de las soluciones de la ecuación lineal definida por el operador $(I + (-\Delta)^{\alpha/2})^{s/2}$. En este caso se mostrará que si $\beta = \alpha$, entonces $f \in \mathcal{G}_s^\beta$ para todo $s \geq 0$.

Lema 2.3.3 *Considere $0 < \alpha < 1$. Si $\alpha = \beta$, entonces el símbolo $f(x) = (-x)^{\alpha/2}$ pertenece a la clase $\mathcal{G}_s^\beta$ para todo $s \geq 0$.*

Demostración: Para probar este lema, primero será necesario demostrar la siguiente estimación que es válida para todo $r \geq 0$

$$|\xi|^r \leq (1 + |\xi|^2)^{r/2} \tag{2.7}$$

Considere $x > 0$, entonces es claro que $x \leq (1+x)$, luego, $x^{r/2} \leq (1+x)^{r/2}$. Ahora al considerar $x = |\xi|^2$, se tiene que $(|\xi|^2)^{r/2} = |\xi|^r \leq (1+|\xi|^2)^{r/2}$ lo que prueba (2.7). A continuación se mostrará que este símbolo satisface las condiciones $G_1 - G_4$.

La condición G_1 es evidente ya que $f(-t^2) = (t^2)^{\alpha/2} = |t|^\alpha \geq 0$.
Para mostrar que f satisface G_2, note que $f(-|x|^2) = |x|^\alpha$. Por otra parte, considere $|x| \geq 1$ y $\alpha = \beta$, entonces

$$\begin{aligned} (1+|x|^2)^{\beta/2} &\leq (|x|^2+|x|^2)^{\beta/2} \\ &\leq 2^{\beta/2}|x|^\beta \\ &= 2^{\beta/2} f(-|x|^2), \end{aligned}$$

por lo tanto f satisface G_2.
La verificación de la condición G_3 es inmediata ya que como $\alpha < 1$, entonces

$$(1+f(-|\xi|^2)) = (1+|\xi|^\alpha) \leq (1+|\xi|^2).$$

Por lo tanto, basta considerer $M = N = 1$ para que f satisfaga la condición G_3.

Por último, para verificar la condición G_4, note que para cada k, existe una constante $C(k) = C$ tal que $f^{(k)}(x) = C(-x)^{(\alpha-2k)/2}$, luego

$$|f(-|x|^2)| = C|x|^{\alpha-2k} \leq C(1+|x|^2)^{\alpha/2-k}.$$

Por otra parte, como $k, \beta, s \geq 0$, entonces $\dfrac{k\beta s}{4n} \geq 0$, luego

$$\left(\frac{\alpha}{2} - k\right) \leq \left(\frac{\alpha}{2} - k + \frac{k\beta s}{4n}\right) = k\left(\frac{\beta s}{4n} - 1\right) + \frac{\alpha}{2}.$$

Finalmente, al considerar $\alpha = \beta$,

$$|f(-|x|^2)| \leq C(1+|x|^2)^{\alpha/2-k} \leq C(1+|x|^2)^{k(\frac{\beta s}{4n}-1)+\frac{\beta}{2}},$$

luego, f satisface la condición G_4 y por lo tanto si $\alpha = \beta$, entonces para todo $s \geq 0$ está en la clase $\mathcal{G}_s^\beta$. $\square$

2.4. Multiplicadores de Fourier generados por símbolos pertenecientes a la clase $\mathcal{G}_s^\beta$

En esta sección se mostrará que si se considera un símbolo f en la clase $\mathcal{G}_s^\beta$, entonces la función generada $\mathcal{M}_{f,(\frac{-s}{2})}$ generada por este símbolo es un multiplicador de Fourier para $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Proposición 2.4.1 *Sean $\beta > 0, s \geq 0$ y $f \in \mathcal{G}_s^\beta$ fijos. Si $1 < p < \infty$, entonces la función $\mathcal{M}_{f,(\frac{-s}{2})}$ es un multiplicador de Fourier para $L^p(\mathbb{R}^n)$.*

Demostración: Como ya se ha indicado con anterioridad, para probar esta Proposición se usará el Teorema 2.1.1, por lo tanto bastará con mostrar que para todo multi índice $\alpha \leq (1, 1, \ldots, 1)$ existe $C(\alpha) = C > 0$ tal que

$$|\xi^\alpha D^\alpha \mathcal{M}_{f,(\frac{-s}{2})}(\xi)| \leq C. \tag{2.8}$$

Por una parte, para cada i con $1 \leq i \leq n$, se tiene que

$$\xi_i^2 < 1 + \xi_i^2 \leq 1 + |\xi|^2,$$

luego

$$|\xi_i| \leq (1 + |\xi|^2)^{1/2}$$

por lo tanto, para cada multi índice α, se tiene

$$|\xi^\alpha| \leq (1 + |\xi|^2)^{\frac{|\alpha|}{2}}.$$

Por otra parte, la condición de elipticidad G_2 exigida para la clase $\mathcal{G}_s^\beta$ nos dice que para todo $|\xi| > R$ existe $M > 0$ tal que

$$M(1 + |\xi|^2)^{\frac{\beta}{2}} \leq f(-|\xi|^2),$$

lo que es equivalente a

$$\frac{M}{f(-|\xi|^2)} \leq (1 + |\xi|^2)^{-\beta/2},$$

por lo tanto, para todo $s \geq 0$ y $|\xi| > R$ se tiene que

$$\frac{M}{(1 + f(-|\xi|^2))^{s/2}} \leq (1 + |\xi|^2)^{-(\beta s)/4}.$$

Ahora, por el Lema (2.2.1) se tiene que

$$D^\alpha \mathcal{M}_{f,(\frac{-s}{2})}(\xi) = \xi^\alpha \sum_{i=1}^{|\alpha|} C(s,i)(1+f(-|\xi|^2))^{-(\frac{s+2i}{2})} \left[(f'(-|\xi|^2))^{P_{i1}}(f''(-|\xi|^2))^{P_{i2}} \dots (f^{(n)}(-|\xi|^2))^{P_{in}}\right]$$

luego, usando el hecho que $f \in \mathcal{G}_s^\beta$, entonces para cada $i = 1..|\alpha|$

$$\begin{aligned} & |\xi|^{2|\alpha|}|C(s,i)(1+f(-|\xi|^2))^{-(\frac{s+2i}{2})}[(f'(-|\xi|^2))^{P_{i1}}(f''(-|\xi|^2))^{P_{i2}} \dots (f^{(n)}(-|\xi|^2))^{P_{in}}] \\ = \;& C(1+|\xi|^2)^{|\alpha|}(1+|\xi|^2)^{-\frac{\beta(s+2i)}{4}}(1+|\xi|^2)^{\sum_{j=1}^n (j(\frac{\beta s}{4n}-1)+\frac{\beta}{2})P_{ij}} \\ = \;& C(1+|\xi|^2)^\gamma \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} \gamma &= |\alpha| - \frac{\beta(s+2i)}{4} + \sum_{j=1}^n \left(j\left(\frac{\beta s}{4n}-1\right)+\frac{\beta}{2}\right)P_{ij} \\ &= |\alpha| - \frac{\beta s}{4} - \frac{\beta i}{2} + \left(\frac{\beta s}{4n}-1\right)\sum_{j=1}^n jP_{ij} + \frac{\beta}{2}\sum_{j=1}^n P_{ij} \\ &= |\alpha| - \frac{\beta s}{4} - \frac{\beta i}{2} + |\alpha|\left(\frac{\beta s}{4n}-1\right) + \frac{\beta i}{2} \\ &= -\frac{\beta s}{4n} + |\alpha|\left(\frac{\beta s}{4n}\right) \\ &= \frac{\beta s}{4}\left(\frac{|\alpha|}{n}-1\right) \end{aligned}$$

luego, como $0 \leq |\alpha| \leq n$ se tiene que

$$-1 \leq \left(\frac{|\alpha|}{n}-1\right) \leq 0$$

y ya que $s, \beta > 0$, se tiene que

$$\gamma = \frac{\beta s}{4}\left(\frac{|\alpha|}{n}-1\right) \leq 0$$

es decir, para cada i se tiene

$$\left|\xi^{2\alpha}C(s,i)(1+f(-|\xi|^2))^{-(\frac{s+2i}{2})}[(f'(-|\xi|^2))^{P_{i1}}(f''(-|\xi|^2))^{P_{i2}} \dots (f^{(n)}(-|\xi|^2))^{P_{in}}]\right| \leq |C(s,i)|$$

por lo tanto, existe $\widetilde{C} > 0$ tal que

$$|\xi^\alpha D^\alpha \mathcal{M}_{f,(\frac{-s}{2})}(\xi)| \leq |\xi^\alpha \sum_{i=1}^{|\alpha|} C(s,i)| \leq \widetilde{C}$$

$\square$

Ahora, se mostrarán algunas propiedades que tiene la función $\mathcal{M}_{f,(\frac{-s}{2})}$ cuando son generadas por símbolos de la clase $\mathcal{G}_s^\beta$. Para tal efecto será conveniente introducir primero la clase $\mathcal{P}$ y señalar algunas de sus propiedades, principalmente la refereridas a las distribuciones temperadas.

Definición 2.4.1 *Sea φ una función continua en $\mathbb{R}^n$. Se dirá que φ está en la clase $\mathcal{P}^0$ si existen constantes positivas C y N tales que para todo $x \in \mathbb{R}^n$*

$$|\varphi(x)| \leq C(1+|x|^2)^N.$$

Ahora bien, si $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, se dirá que φ está en la clase de las funciones con crecimiento polinomial al infinito, denotada por $\mathcal{P}$, si para todo multi índice α, $D^\alpha\varphi \in \mathcal{P}^0$.

Cabe señalar, que a diferencia de lo que ocurre en el espacio de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, donde el producto de dos funciones que pertenecen a ese espacio sigue siendo un elemento de espacio (ver por ejemplo [30]), en el espacio de las distribuciones temperadas $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, esta propiedad no se tiene. Sin embargo, como se muestra en la siguiente Proposición, el producto entre una distribución temperada y un elemento de la clase $\mathcal{P}$ será efectivamente una distribución temperada. La demostración se puede ver en [14, 30, 32, 36].

Proposición 2.4.2 *Sean $\varphi \in \mathcal{P}$ y $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Entonces el producto $\varphi T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ y se define como*

$$(\varphi T)(f) = T(\varphi f), \qquad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

El Lema que se presenta a continuación muestra que si f es un símbolo que pertenece a alguna clase $\mathcal{G}_s^\beta$, entonces para todo γ la función $\mathcal{M}_{f,\gamma}$ es una función que pertenece a la clase $\mathcal{P}$.

Lema 2.4.1 *Considere $\beta > 0$, $s \geq 0$ y $f \in \mathcal{G}_s^\beta$. Si $\mathcal{M}_{f,\gamma}$ es la función definida en (2.4). Entonces para toda $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ se tiene que el producto*

$$\mathcal{M}_{f,\gamma}T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$$

Demostración: Para mostrar esto, de acuerdo a la Proposición 2.4.2 debemos probar que $\mathcal{M}_{f,\gamma} \in \mathcal{P}$, es decir, para todo multi índice α, la derivada $D^\alpha(\mathcal{M}_{f,\gamma}) \in \mathcal{P}^0$. Es claro, que para todo multi índice α, se tiene que

$$D^\alpha\mathcal{M}_{f,\gamma}(x) = \sum_i C(1+f(-|x|^2))^{\gamma_i}(f'(-|x|^2))^{P_1 i}\cdots(f^{(n)}(-|x|^2))^{P_{ni}}$$

donde ésta es una suma de una cantidad finita de términos. Observe que a diferencia del Lema 2.2.1, acá α puede ser cualquier multi índice. Como f es un símbolo de la clase $\mathcal{G}_s^\beta$, por la condición G_3 se tiene que para todo $\gamma_i > 0$ existen constantes C y N tales que

$$(1 + f(-|\xi|^2))^{\gamma_i} \leq C(1 + |\xi|^2)^N,$$

(si $\gamma_i \leq 0$, $(1 + f(-|\xi|^2))^{\gamma_i} \leq 1$), y por la condición G_4, para todo P_{ji}

$$|(f'(-|\xi|^2))^{P_{ij}}| \leq C(1 + |\xi|^2)^{P_{ji}\left(k(\frac{\beta s}{4n}-1)+\frac{\beta}{2}\right)}.$$

Es decir, para todo γ_i se tiene que $(1 + f(-|\xi|^2))^{\gamma_i} \in \mathcal{P}^0$ y para todo P_{ji} se tiene que $|(f'(-|\xi|^2))^{P_{ij}}| \in \mathcal{P}^0$. Por lo tanto, la suma finita de estos productos también estarán en la clase $\mathcal{P}^0$ y con esto se tiene que para todo multi índice α, $D^\alpha \mathcal{M}_{f,\gamma} \in \mathcal{P}^0$, es decir, la función $\mathcal{M}_{f,\gamma}$ pertenece a la clase $\mathcal{P}$ y por la Proposición 2.4.2 para toda $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ se tiene que $(\mathcal{M}_{f,\gamma}T) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, es decir $((1 + f(-|\xi|^2))^\gamma T)$ define una distribución temperada. □

2.5. El espacio $\mathcal{H}^{s,p}(f)$.

Inspirándose en el trabajo de Lions [27], donde generaliza la definición de los espacios de Sobolev a todo $L^p(\mathbb{R}^n)$, en esta sección se extenderá esta definición a los espacios $\mathcal{H}^{s,p}(f)$. Se mostrará que cada multiplicador de Fourier $\mathcal{M}_{f,(\frac{-s}{2})}$ genera un espacio $\mathcal{H}^{s,p}(f)$, pero como se mostró en la sección 2.4, estos multiplicadores está determinados por los símbolos de la clase $\mathcal{G}_s^\beta$, por lo tanto, cada espacio $\mathcal{H}^{s,p}(f)$ también estará determinado por un símbolo $f \in \mathcal{G}_s^\beta$.

Definición 2.5.1 *Sean $\beta > 0$, $s \geq 0$ y $f \in \mathcal{G}_s^\beta$. Para $1 < p < \infty$, definimos el espacio $\mathcal{H}^{s,p}(f)$ como*

$$\mathcal{H}^{s,p}(f) = \{u \in L^p(\mathbb{R}^n) : \mathcal{F}^{-1}((1 + f(-|\xi|^2))^{s/2}\mathcal{F}(u)) \in L^p(\mathbb{R}^n)\} \tag{2.9}$$

Es importante señalar que en esta definición, tanto la transformada de Fourier $\mathcal{F}$ como su inversa $\mathcal{F}^{-1}$ están consideradas en el sentido de las distribuciones temperadas. Claramente se ve que si $s = 0$, entonces $\mathcal{H}^{0,p}(f) = L^p(\mathbb{R}^n)$. Por otro lado, como $u \in L^p(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ (ver [30, 32]), entonces $\mathcal{F}(u) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, además como $f \in \mathcal{G}_s^\beta$ por el Lema 2.4.1 $(1 + f(-|\xi|^2))^{s/2}\mathcal{F}(u) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ y de esta forma se asegura la existencia de su transformada inversa de Fourier y por lo tanto, el espacio $\mathcal{H}^{s,p}(f)$ está bien definido. Finalmente, podemos mencionar que si se considera el símbolo $f(x) = -x$, el cual ya se mostró en el Lema 2.3.1 que pertenece a la clase $\mathcal{G}_s^\beta$ para todo $s \geq 0$, el espacio $\mathcal{H}^{s,p}(f)$ definido por este símbolo coincide con el espacio de Sobolev $H^{s,p}$ que define Lions en el artículo [27].

Ahora que ya se ha probado que la función $\mathcal{M}_{f,(\frac{-s}{2})}$ es un Multiplicador de Fourier, se puede considerar el operador que esta función, como multiplicador, define. Mediante la definición de este operador, que se denotará como T_f^s, será posible probar algunas propiedades que tiene el espacio $\mathcal{H}^{s,p}(f)$ como por ejemplo la completitud y posteriormente también será de utilidad para mostrar en la próxima sección las diferentes inclusiones del espacio $\mathcal{H}^{s,p}(f)$.

Definición 2.5.2 *Sean $\beta > 0, s \geq 0$ y $f \in \mathcal{G}_s^\beta$. Se define el operador T_f^s*

$$T_f^s(g) = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\mathcal{F}(g)}{(1+f(-|\xi|^2))^{s/2}}\right) = \mathcal{F}^{-1}\left(\mathcal{M}_{f,(\frac{-s}{2})}\mathcal{F}(g)\right). \tag{2.10}$$

para todo $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

Observe que, de acuerdo a la definición de Multiplicador de Fourier, la Proposición 2.4.1 es equivalente a decir que dados β, s y f como en la hipótesis, el operador $T_f^s : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)$ definido en (2.10) es acotado.

Proposición 2.5.1 *Sean $\beta > 0, s \geq 0$ y $f \in \mathcal{G}_s^\beta$. El espacio $\mathcal{H}^{s,p}(f)$, provisto de la norma*

$$\|u\|_{\mathcal{H}^{s,p}(f)} = \|\mathcal{F}^{-1}((1+f(-|\xi|^2))^{s/2}\mathcal{F}(u))\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \tag{2.11}$$

es un espacio de Banach.

Demostración: Primero, mostraremos que $\|\cdot\|_{\mathcal{H}^{s,p}(f)}$ define una norma sobre $\mathcal{H}^{s,p}(f)$. En efecto, sea $u \in \mathcal{H}^{s,p}(f)$, entonces claramente $\|u\|_{\mathcal{H}^{s,p}(f)} \geq 0$. Supongamos ahora que $\|u\|_{\mathcal{H}^{s,p}(f)} = 0$, esto implica que $\mathcal{F}^{-1}((1+f(-|\xi|^2))^{s/2}\mathcal{F}(u)) = 0$ y por la inyectividad de la transformada inversa de Fourier se tiene que $(1+f(-|\xi|^2))^{s/2}\mathcal{F}(u) = 0$ pero esto quiere decir que $\mathcal{F}(u) = 0$, es decir $u = 0$.

Consideremos ahora, $u,\ v \in \mathcal{H}^{s,p}(f)$, entonces

$$\begin{aligned}
\|u+v\|_{\mathcal{H}^{s,p}(f)} &= \|\mathcal{F}^{-1}((1+f(-|\xi|^2))^{s/2}\mathcal{F}(u+v))\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\\
&= \|\mathcal{F}^{-1}((1+f(-|\xi|^2))^{s/2}\mathcal{F}(u+v))\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\\
&= \|\mathcal{F}^{-1}((1+f(-|\xi|^2))^{s/2}\mathcal{F}(u)+(1+f(-|\xi|^2))^{s/2}\mathcal{F}(v))\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\\
&= \|\mathcal{F}^{-1}((1+f(-|\xi|^2))^{s/2}\mathcal{F}(u))+\mathcal{F}^{-1}((1+f(-|\xi|^2))^{s/2}\mathcal{F}(v))\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\\
&\leq \|\mathcal{F}^{-1}((1+f(-|\xi|^2)^{s/2}\mathcal{F}(u)))\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}+\\
&\quad\ \|\mathcal{F}^{-1}((1+f(-|\xi|^2)^{s/2}\mathcal{F}(v)))\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\\
&= \|u\|_{\mathcal{H}^{s,p}(f)}+\|v\|_{\mathcal{H}^{s,p}(f)}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, (2.11) define una norma en $\mathcal{H}^{s,p}(f)$. Observemos que en el caso que $p=2$ nuestro espacio $\mathcal{H}^{s,p}(f)$ coincide con el espacio $\mathcal{H}^{\beta}(f)$ definido en [21].

Para probar que $\mathcal{H}^{s,p}(f)$ es un espacio completo, mostraremos que es isométricamente isomoformo a $L^p(\mathbb{R}^n)$, el cual es completo (ver [31]), para esto consideremos el operador

$$T_f^s : L^p(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{H}^{s,p}(f),$$

dado en la Definición 2.5.2

$$T_f^s(g) = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\mathcal{F}(g)}{(1+f(-|\xi|^2))^{s/2}}\right). \tag{2.12}$$

Como se mencionó, este es operador acotado que claramente es lineal ya que tanto la transformada de Fourier como su inversa son operadores lineales. La inyectividad también se tiene por las propiedades de la transformada de Fourier y de su inversa ya que si

$$T_f^s(g) = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\mathcal{F}(g)}{(1+f(-|\xi|^2))^{s/2}}\right) = 0,$$

entonces

$$\frac{\mathcal{F}(g)}{(1+f(-|\xi|^2))^{s/2}} = 0,$$

y esto implica que

$$\mathcal{F}(g) = 0, \text{ luego } g = 0$$

Para probar la sobreyectividad del operador T_f^s, debemos probar que para todo $u \in \mathcal{H}^{s,p}(f)$, existe $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ tal que $u = T_f^s(g)$. Considere $u \in \mathcal{H}^{s,p}(f)$ fijo, de acuerdo a la definición de este espacio

$$\mathcal{F}^{-1}\left((1+f(-|\xi|^2))^{s/2}\mathcal{F}(u)\right) \in L^p(\mathbb{R}^n).$$

Entonces se puede definir $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ como

$$g = \mathcal{F}^{-1}\left((1 + f(-|\xi|^2))^{s/2}\mathcal{F}(u)\right). \tag{2.13}$$

Ahora, se afirma que $u = T_f^s(g)$. Para probar esto, observe que

$$\begin{aligned} T_f^s(g) &= \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\mathcal{F}(g)}{(1 + f(-|\xi|^2))^{s/2}}\right) \\ &= \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{(1 + f(-|\xi|^2))^{s/2}\mathcal{F}(u)}{(1 + f(-|\xi|^2))^{s/2}}\right) \\ &= \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(u)) \\ &= u \end{aligned}$$

Con esto, finalmente, se ha probado que T_f^s es sobreyectivo. Por lo tanto, T_f^s es un isomorfismo.

Notemos que de (2.13)

$$g = \mathcal{F}^{-1}((1 + f(-|\xi|^2))^{s/2}\mathcal{F}(u)),$$

es decir

$$(T_f^s)^{-1}(u) = \mathcal{F}^{-1}((1 + f(-|\xi|^2))^{s/2}\mathcal{F}(u)),$$

luego

$$\|T_f^s(g)\|_{\mathcal{H}^{s,p}(f)} = \left\|\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{(1 + f(-|\xi|^2))^{s/2}\mathcal{F}(g)}{(1 + f(-|\xi|^2))^{s/2}}\right)\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

y

$$\|(T_f^s)^{-1}(u)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \left\|\mathcal{F}^{-1}((1 + f(-|\xi|^2))^{s/2}\mathcal{F}(u))\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \|u\|_{\mathcal{H}^{s,p}(f)}.$$

Por lo tanto T_f^s y $(T_f^s)^{-1}$ son isometrías y esto prueba que $\mathcal{H}^{s,p}(f)$ es un espacio de Banach. $\square$

Observe que de la Definición 2.5.1 y de la demostración anterior, ahora se ve fácilmente que para cada $s \geq 0$

$$\mathcal{H}^{s,p}(f) = T_f^s(L^p(\mathbb{R}^n)). \tag{2.14}$$

A continuación, se mostrará una proposición que permite caracterizar las funciones del espacio $\mathcal{H}^{s,p}(f)$.

Proposición 2.5.2 *Sean $\beta > 0, s \geq 0$ y $f \in \mathcal{G}_s^\beta$ y $p \geq 1$. Entonces $u \in \mathcal{H}^{s,p}(f)$ si y solamente si $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y existe $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ tal que*

$$\mathcal{F}(u) = \frac{\mathcal{F}(g)}{(1 + f(-|\xi|^2))^{s/2}}. \tag{2.15}$$

Aún más,

$$\|u\|_{\mathcal{H}^{s,p}(f)} = \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \tag{2.16}$$

Observe que la igualdad dada en (2.15) se puede escribir como

$$\mathcal{F}(u) = \mathcal{M}_{f,(\frac{-s}{2})}\mathcal{F}(g),$$

donde $\mathcal{M}_{f,\gamma}$ está definido en (2.4) y $\gamma = -s/2$. Por otro lado, tanto u como g pertenecen al espacio $L^p(\mathbb{R}^n)$, por lo tanto pueden ser consideradas como distribuciones temperadas, por esta razón es que se garantiza la existencia de su transformada de Fourier en el sentido de las distribuciones.

Demostración: Sea $u \in \mathcal{H}^{s,p}(f)$ y definamos

$$g = \mathcal{F}^{-1}((1 + f(-|\xi|^2))^{s/2}\mathcal{F}(u)) = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{M}_{f,(\frac{-s}{2})}\mathcal{F}(u))$$

Entonces, por definición de $\mathcal{H}^{s,p}(f)$ se tiene que $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$, luego aplicando la transformada de Fourier, en el sentido de las distribuciones, a ambos lados de igualdad, se tiene

$$\mathcal{F}(g) = (1 + f(-|\xi|^2))^{s/2}\mathcal{F}(u)$$

luego,

$$\frac{\mathcal{F}(g)}{(1 + f(-|\xi|^2))^{s/2}} = \mathcal{F}(u)$$

Para probar el recíproco, supongamos que $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ es tal que se tiene la siguiente igualdad.

$$\mathcal{F}(u) = \frac{\mathcal{F}(g)}{(1 + f(-|\xi|^2))^{s/2}}.$$

Notemos que $\mathcal{F}(g) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ y, como $f \in \mathcal{G}_s^\beta$, por Lema 2.4.1 $\dfrac{\mathcal{F}(g)}{(1 + f(-|\xi|^2))^{s/2}} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, aún más,

$$(1 + f(-|\xi|^2))^{s/2}\mathcal{F}(u) = \mathcal{F}(g).$$

Aplicando transformada inversa de Fourier en el sentido de las distribuciones a ambos lados, tenemos que

$$\mathcal{F}^{-1}((1 + f(-|\xi|^2))^{s/2}\mathcal{F}(u)) = g \in L^p(\mathbb{R}^n).$$

Por lo tanto, $u \in \mathcal{H}^{s,p}(f)$.

Ahora considerando $u \in \mathcal{H}^{s,p}(f)$ y de acuerdo a la representación que acabamos de mostrar, tenemos que existe $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ tal que $\mathcal{F}(u) = \dfrac{\mathcal{F}(g)}{(1+f(-|\xi|^2))^{s/2}}$, luego

$$\begin{aligned}
\|u\|_{\mathcal{H}^{s,p}(f)} &= \|\mathcal{F}^{-1}([1+f(-|\xi|^2)]^{s/2}\mathcal{F}(u))\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&= \left\| \mathcal{F}^{-1}\left([1+f(-|\xi|^2)]^{s/2}\frac{\mathcal{F}(g)}{[1+f(-|\xi|^2)]^{s/2}}\right)\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&= \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}$$

□

Observe que el operador T_f^s se puede definir en términos de la función $\mathcal{M}_{f,(\frac{-s}{2})}$ como

$$T_f^s(g) = \mathcal{F}^{-1}\left(\mathcal{M}_{f,(\frac{-s}{2})}\mathcal{F}(g)\right)$$

A continuación, se enumeran algunas propiedades que tiene el operador T_f^s.

Proposición 2.5.3 *Sean $\beta > 0$, $s, s_1, s_2 \geq 0$ y $f \in \mathcal{G}_{s_0}^{\beta}$ donde $s_0 = \min\{s_1, s_2\}$, entonces*

1. *Si $s = 0$, entonces $T_f^0 = Id$*
2. *$T_f^{s_1}T_f^{s_2} = T_f^{s_1+s_2}$*
3. *$T_f^{s_1} : \mathcal{H}^{s,p}(f) \to \mathcal{H}^{(s+s_1),p}(f)$.*

Demostración: Observe que si $f \in \mathcal{G}_{s_0}^{\beta}$, entonces por la Proposición 2.2.1 $f \in \mathcal{G}_{s_1}^{\beta} \cap \mathcal{G}_{s_2}^{\beta} \cap \mathcal{G}_{s_1+s_2}^{\beta}$ y de esta forma tanto los espacios $\mathcal{H}^{s_1,p}(f)$, $\mathcal{H}^{s_2,p}(f)$ y $\mathcal{H}^{(s_1+s_2),p}(f)$ como los operadores $T_f^{s_1}$, $T_f^{s_2}$ y $T_f^{s_1+s_2}$ están bien definidos. El primer punto de esta proposición es inmediato. Ahora el segundo se prueba fácilmente al hacer la composición de los operadores $T_f^{s_1}$ y $T_f^{s_2}$ ya que

$$\begin{aligned}
T_f^{s_1}T_f^{s_2}(g) &= T_f^{s_1}\left(\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\mathcal{F}(g)}{(1+f(-|\xi|^2))^{s_2/2}}\right)\right) \\
&= \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{(1+f(-|\xi|^2))^{s_1/2}}\frac{\mathcal{F}(g)}{(1+f(-|\xi|^2))^{s_2/2}}\right) \\
&= \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\mathcal{F}(g)}{(1+f(-|\xi|^2))^{(s_1+s_2)/2}}\right) \\
&= T_f^{s_1+s_2}(g).
\end{aligned}$$

Por último, para mostrar el tercer punto de la proposición, como ya se mostró anteriormente en la demostración de la Proposición 2.5.1, el operador T_f^s es un isomorfismo entre $\mathcal{H}^{s,p}(f)$

y $L^p(\mathbb{R}^n)$, por lo tanto si se considera $u \in \mathcal{H}^{s,p}(f)$, existe un único $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ tal que $u = T_f^s(g)$. Luego, al evaluar el operador $T_f^{s_1}$ sobre u se tiene que

$$T_f^{s_1}(u) = T_f^{s_1}\left(T_f^s(g)\right)$$

y de acuerdo al segundo punto de esta proposición que se acaba de probar

$$T_f^{s_1}(u) = T_f^{s_1}\left(T_f^s(g)\right) = T_f^{s_1+s_2}(g),$$

y usando nuevamente el hecho que para todo $s \geq 0$ el operador T_f^s es un isomorfismo entre $L^p(\mathbb{R}^n)$ y $\mathcal{H}^{s,p}(f)$, como $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$, entonces $T_f^{s_1}(u) = T_f^{s+s_1}(g) \in \mathcal{H}^{(s_1+s),p}(f)$. Por lo tanto $T_f^s(u) \in \mathcal{H}^{(s_1+s),p}(f)$. $\square$

Note que de acuerdo a los puntos 1. y 2. de la Proposición 2.5.3, si existe $\beta > 0$ de modo que el símbolo $f \in \mathcal{G}_s^\beta$ para todo $s \geq 0$, entonces la familia $\{T_f^s\}_{s\geq 0}$ es un semigrupo de operadores acotados sobre el espacio de Banach $L^p(\mathbb{R}^n)$ (ver [1, 29]). La profundización de estos temas, como son por ejemplo qué tipo de semigrupo es o bien cuál su generador, son cuestiones que escapan a lo abordado en esta Tesis, sin embargo, quedan como temas propuestos para futuros trabajos de investigación.

Observe que si bien la igualdad (2.14) nos dice que cada $u \in \mathcal{H}^{s,p}(f)$ se puede representar como la imagen de alguna función $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ bajo el operador T_f^s. A continuación se mostrará que para cierto valores de s, los elementos de $\mathcal{H}^{s,p}(f)$ se pueden representar como el producto de convolución de una distribución temperada con una función del espacio de Schwartz. Para esto, primero se mostrarán unas Proposiciones referentes a algunas propiedades cualitativas del operador T_f^s. Con este propósito, primero se presenta una definición que entrega Hörmander en [24] referente a operadores que conmutan con traslaciones.

Si $h \in \mathbb{R}^n$, se denotará por τ_h y por ρ_h a los operadores definido como $(\tau_h u)(x) = u(x-h)$ y $(\rho_h u)(x) = e^{ix\cdot h}u(x)$ respectivamente.

Definición 2.5.3 *Un operador acotado A de $L^p(\mathbb{R}^n)$ en $L^q(\mathbb{R}^n)$ se dice invariante por traslaciones o bien que es invariante por traslaciones si*

$$\tau_h A = A\tau_h.$$

La proposición que se mostrará a continuación, es un resultado muy conocido que indica que la transformada de Fourier conmuta con traslaciones. Para revisar su demostración se puede revisar por ejemplo [30, 32, 35, 36].

Proposición 2.5.4 *Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Entonces las funciones $\tau_h f$, $\rho_h f$ también están en $L^1(\mathbb{R}^n)$ y además*

1. $\mathcal{F}(\tau_h f) = \rho_h \mathcal{F}(f)$
2. $\mathcal{F}(\rho_h f) = \tau_{-h} \mathcal{F}(f)$

Proposición 2.5.5 *El operador T_f^s de la Definición 2.5.2 conmuta con traslaciones.*

Demostración: Usando las igualdades dadas en la Proposición (2.5.4), se tiene para todo $h \in \mathbb{R}^n$ que

$$\begin{aligned} T_f^s(\tau_h g) &= \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{M}_{f,(\frac{-s}{2})}\mathcal{F}(\tau_h g)) \\ &= \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{M}_{f,(\frac{-s}{2})}\rho_h \mathcal{F}(g)) \\ &= \mathcal{F}^{-1}(\rho_h \mathcal{M}_{f,(\frac{-s}{2})}\mathcal{F}(g)) \\ &= \mathcal{F}^{-1}(\rho_h \mathcal{F}(T_f g)) \\ &= \tau_h T_f^s(g) \end{aligned}$$

Por lo tanto $\tau_h T_f^s = T_f^s \tau_h$, es decir, T_f^s conmuta con traslaciones. □

Proposición 2.5.6 *Dados $\beta > 0, s \geq 0$ y $f \in \mathcal{G}_s^\beta$, existe una única $A \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ tal que*

$$T_f^s(g) = A * g, \ \forall \ g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

Demostración: Para los valores de β, s y $f \in \mathcal{G}_s^\beta$ que se están considerando, se sabe por la Definición 2.5.2 que T_f^s es un operador acotado sobre $L^p(\mathbb{R}^n)$, por otro lado, la Proposición 2.5.5 afirma que T_f^s es un operador que conmuta con traslaciones, luego, por el Teorema de Hörmander (ver [25]) se sabe que existe una única $A \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ tal que para todo $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ se tiene

$$T_f^s(g) = A * g \tag{2.17}$$

□

2.6. Inclusiones del espacio $\mathcal{H}^{s,p}(f)$

Las inclusiones del espacio de Sobolev son una herramienta fundamental en la resolución de ecuaciones en derivadas parciales elípticas (ver por ejemplo [15]). En esta sección, se mostrarán algunas inclusiones que se pueden obtener a partir del espacio $\mathcal{H}^{s,p}(f)$. Según la definición del espacio, se tiene que $\mathcal{H}^{s,p}(f) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$, a continuación se muestra que esta inclusión es continua.

Proposición 2.6.1 *Sean $\beta > 0$ $s \geq 0$ y $f \in \mathcal{G}_s^{\beta}$ fijos. Si $p \in (1, \infty)$, entonces $\mathcal{H}^{s,p}(f) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^n)$.*

Demostración: Como la transformada de Fourier es un operador biyectivo sobre el espacio de las distribuciones temperadas, se tiene que para toda $u \in L^p(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned}
\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} &= \|\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(u))\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&= \left\|\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{(1+f(-|\xi|^2))^{s/2}}(1+f(-|\xi|^2))^{s/2}\mathcal{F}(u)\right)\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&= \left\|T_f^s\left[\mathcal{F}^{-1}((1+f(-|\xi|^2))^{s/2}\mathcal{F}(u))\right]\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq A\|\mathcal{F}^{-1}((1+f(-|\xi|^2))^{s/2}\mathcal{F}(u))\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&= A\|u\|_{\mathcal{H}^{s,p}(f)},
\end{aligned}$$

donde A es la constante que se muestra en (2.2) y que corresponde a considerar el multiplicador de Fourier como un operador acotado sobre $L^p(\mathbb{R}^n)$. $\square$

A continuación, se definirá el espacio generalizado de Sobolev $H^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ (ver por ejemplo [37, 39]). Como se mostró anteriormente, este espacio se obtiene como una caso particular de los espacios $\mathcal{H}^{s,p}(f)$ al considerar el símbolo $f(x) = -x$. En este sentido, se mostrará que algunas propiedades que tiene este espacio son consecuencia directa de la generalización de $H^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ a los espacios $\mathcal{H}^{s,p}(f)$. La definición que se presenta a continuación es la que entrega Lions en [27].

Definición 2.6.1 *Dados $s \in \mathbb{R}$ y $p \in [1, \infty]$ se define el espacio generalizado de Sobolev $H^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ como*

$$H^{s,p}(\mathbb{R}^n) = \{u \in L^p(\mathbb{R}^n) : \mathcal{F}^{-1}((1+|\xi|^2)^{s/2}\mathcal{F}(u)) \in L^p(\mathbb{R}^n)\}. \tag{2.18}$$

Como hemos mencionado anteriormente, en el Lema 2.3.1, se mostró que para $s \geq 0$ y $\beta = 2$, el símbolo $f(x) = -x$, está en la clase $\mathcal{G}_s^{\beta}$, luego, fijando este símbolo f se ve fácilmente que el espacio $\mathcal{H}^{s,p}(f)$ generado por este símbolo coincide con el espacio $H^{s,p}(\mathbb{R}^n)$, es por esta razón, que es de suponer que al igual que en el caso del espacio $\mathcal{H}^{s,p}(f)$, los elementos del espacio $H^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ tienen la siguiente representación.

Proposición 2.6.2 *Dado $s \geq 0$ y $p \in (1, \infty)$ se tiene que $u \in H^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ si y solamente si existe $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ tal que*

$$\mathcal{F}(u) = \frac{\mathcal{F}(g)}{(1 + |\xi|^2)^{s/2}}.$$

Aún más, se tiene la siguiente identidad.

$$\|u\|_{H^{s,p}(\mathbb{R}^n)} = \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Demostración: Fijando el símbolo $f(x) = -x$, de acuerdo al Lema 2.3.1, se tiene que $f \in \mathcal{G}_s^\beta$ y

$$\mathcal{H}^{s,p}(f) = H^{s,p}(\mathbb{R}^n),$$

luego por la Proposición 2.5.2 se tiene que $u \in \mathcal{H}^{s,p}(f) = H^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ si y sólo si existe $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\mathcal{F}(u) = \frac{\mathcal{F}(g)}{(1 + f(-|\xi|^2))^{s/2}} = \frac{\mathcal{F}(g)}{(1 + |\xi|^2)^{s/2}}.$$

La igualdad $\|u\|_{H^{s,p}(\mathbb{R}^n)} = \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$ también está garantizada por la Proposición 2.5.2. □

En la Demostración de la Proposición 2.5.1 se mostró que, dado $p \in (1, \infty)$, hay un isomorfismo isométrico entre cada espacio $\mathcal{H}^{s,p}(f)$ y $L^p(\mathbb{R}^n)$. Ahora, si se considera nuevamente el símbolo f del Lema 2.3.1, se tiene como consecuencia que el espacio de Sobolev generalizado $H^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ también es isométricamente isomorfo a $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Proposición 2.6.3 *Sean $s \geq 0$ y $p \in (1, \infty)$. Entonces los espacios $L^p(\mathbb{R}^n)$ y $H^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ son isométricamente isomorfos.*

Demostración: : En la Proposición 2.5.1 se mostró que dados $s \geq 0$ y $\beta > 0$ tales que $f \in \mathcal{G}^\beta$, la aplicación T_f^s es un isomorfismo isométrico entre $L^p(\mathbb{R}^n)$ y el correspondiente espacio $\mathcal{H}^{s,p}(f)$ generado por el símbolo f. Ahora, si se considera $f(x) = -x$, por el Lema 2.3.1, se tiene que $f \in \mathcal{G}^\beta$ para s y β adecuados, luego el espacio $H^{s,p}(\mathbb{R}^n)$, que es el que genera este símbolo, es isométricamente isomorfo a $L^p(\mathbb{R}^n)$ y el isomorfismo está dado por la aplicación

$$T_f^s(g) = \frac{\mathcal{F}(g)}{(1 + |\xi|^2)^{s/2}}.$$

□

La Proposición que sigue, muestra la relación que hay entre los espacios $\mathcal{H}^{s,p}(f)$ y los espacios de Sobolev generalizados $H^{s,p}(\mathbb{R}^n)$.

Proposición 2.6.4 *Sean $s \geq 0, \beta > 0$ y $f \in \mathcal{G}_s^\beta$. Si $p \in (1, \infty)$ es tal que $sp < n$, entonces $\mathcal{H}^{s,p}(f) \subset H^{-s, \frac{np}{n-sp}}$.*

Demostración: Considere $u \in \mathcal{H}^{s,p}(f)$, se mostrará que $u \in H^{-s, \frac{np}{n-sp}}$. Esto, según Definición 2.6.1, es equivalente a mostrar que

$$\mathcal{F}^{-1}((1 + |\xi|^2)^{-s/2}\mathcal{F}(u)) \in L^{\frac{np}{n-sp}}(\mathbb{R}^n). \tag{2.19}$$

Primero, denote por $\widetilde{p} = \dfrac{np}{n - sp}$. Como p es tal que $sp < n$, entonces es claro que $0 < n - sp < n$, luego, al multiplicar por p, se tiene que $0 < p(n - sp) < np$, finalmente, al depejar se tiene

$$0 < p < \frac{np}{n - sp} = \widetilde{p}.$$

Por otro lado, observe que de la Proposición 2.5.2, como $u \in \mathcal{H}^{s,p}(f)$, se tiene que existe $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\mathcal{F}(u) = \frac{\mathcal{F}(g)}{(1 + f(-|\xi|^2))^{s/2}},$$

luego, si se reemplaza esto en (2.19) se obtiene que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}((1 + |\xi|^2)^{-s/2}\mathcal{F}(u)) &= \mathcal{F}^{-1}\left((1 + |\xi|^2)^{-s/2}\frac{\mathcal{F}(g)}{(1 + f(-|\xi|^2))^{s/2}}\right) \\ &= \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{(1 + f(-|\xi|^2))^{s/2}}\frac{\mathcal{F}(g)}{(1 + |\xi|^2)^{s/2}}\right). \end{aligned}$$

Observe que como $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$, entonces por la Proposición 2.6.2, se tiene que el término $\dfrac{\mathcal{F}(g)}{(1 + |\xi|^2)^{s/2}} = \mathcal{F}(v)$ donde $v \in H^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ y por Proposición 6.4 de [39], se tiene que para estos valores de s y p $H^{s,p}(\mathbb{R}^n) \subset L^{\widetilde{p}}(\mathbb{R}^n)$, por lo tanto $v \in L^{\widetilde{p}}(\mathbb{R}^n)$ se tiene que

$$\mathcal{F}^{-1}((1 + |\xi|^2)^{-s/2}\mathcal{F}(u)) = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{(1 + f(-|\xi|^2))^{s/2}}\mathcal{F}(v)\right) = T_f^s(v),$$

donde T_f^s es el operador definido en (2.10), pero para $p \in (1, \infty)$ T_f^s es un operador acotado sobre $L^p(\mathbb{R}^n)$ es particular para $\widetilde{p}$, es decir

$$\mathcal{F}^{-1}((1 + |\xi|^2)^{-s/2}\mathcal{F}(u)) \in L^{\frac{np}{n-sp}}.$$

$\square$

Lema 2.6.1 *Si $\beta > 0$, $s \geq 0$ y $f \in \mathcal{G}_s^\beta$, entonces la función m definida como*

$$m(x) = \frac{(1 + |x|^2)^{r/2}}{(1 + f(-|x|^2))^{\frac{1}{2}(s + 2r/\beta)}} \tag{2.20}$$

es un multiplicador de Fourier para $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Demostración: Para demostrar este Lema se usará nuevamente el Teorema 2.1.1. Para ello se mostrará que que bajo estas hipótesis, existe una constante C tal que $|x^\alpha D^\alpha m(x)| \leq C$, para todo multi índice $\alpha \leq (1,\ldots,1)$. Usando la regla de Leibnitz se tiene que

$$\begin{aligned}
& x^\alpha D^\alpha m(x)\\
= \; & x^\alpha D^\alpha \left((1+|x|^2)^{r/2}\mathcal{M}_{f,-(2+2r/\beta)}\right)\\
= \; & x^\alpha \sum_{\gamma\leq\alpha} C_0 \left(D^\gamma (1+|x|^2)^{r/2}\right)\left(D^{\gamma-\alpha}\mathcal{M}_{f,-(2+2r/\beta)}\right)\\
= \; & x^\alpha \sum_{\gamma\leq\alpha} C_0 \left(x^\gamma (1+|x|^2)^{r/2-|\gamma|}\right)\\
& \left(x^{\alpha-\gamma}\sum_{i=1}^{|\alpha-\gamma|} C_1 (1+f(-|x|^2))^{-\frac{1}{2}(s+2r/\beta)-i}[f'(-|x|^2)^{P_{i1}}\ldots f^{(n)}(-|x|^2)^{P_{in}}]\right)\\
= \; & x^{2\alpha}\sum_{\gamma\leq\alpha}\sum_{i=1}^{|\alpha-\gamma|} C_2(1+|x|^2)^{r/2-|\gamma|} \qquad (2.21)\\
& (1+f(-|x|^2))^{-\frac{1}{2}(s+2r/\beta)-i}[f'(-|x|^2)^{P_{i1}}\ldots f^{(n)}(-|x|^2)^{P_{in}}].
\end{aligned}$$

Fijando un $\gamma \leq \alpha$ y un $i = 1,\ldots,|\alpha-\gamma|$, tenemos que

$$\begin{aligned}
& \left|x^{2\alpha}(1+|x|^2)^{r/2-|\gamma|}(1+f(-|x|^2))^{-\frac{1}{2}(s+2r/\beta)-i}[f'(-|x|^2)^{P_{i1}}\ldots f^{(n)}(-|x|^2)^{P_{in}}]\right|\\
\leq \; & (1+|x|^2)^{|\alpha|}(1+|x|^2)^{r/2-|\gamma|}(1+|x|^2)^{-\frac{\beta}{4}(s+2r/\beta)-\frac{\beta i}{2}}(1+|x|^2)^{\sum_{j=1}^{i}\left[j\left(\frac{\beta s}{4n}-1\right)+\frac{\beta}{2}\right]P_{ij}}\\
= \; & (1+|x|^2)^K
\end{aligned}$$

donde

$$K = |\alpha| + \frac{r}{2} - |\gamma| - \frac{\beta}{4}\left(s+\frac{2r}{\beta}\right) - \frac{\beta i}{2} + |\alpha-\gamma|\left(\frac{\beta s}{4n}-1\right) + \frac{\beta i}{2} \qquad (2.22)$$

pero como $\gamma \leq \alpha$ es evidente que $|\alpha|-|\gamma| = |\alpha-\gamma|$, luego, la igualdad mostrada en (2.22) se puede reescribir como

$$\begin{aligned}
K &= |\alpha-\gamma|\left(\frac{\beta s}{4n}\right) - \frac{\beta s}{4}\\
&= \frac{\beta}{4}\left(\frac{|\alpha-\gamma|s}{n}-1\right) \qquad (2.23)
\end{aligned}$$

y como $0 \leq \dfrac{|\alpha-\gamma|}{n} \leq 1$, se tiene de (2.23) que $K \leq 0$. Por lo tanto, para los valores de γ e i fijos, se tiene que existe una constante positiva $\widetilde{C}(\gamma,i) = \widetilde{C}$ tal que

$$\left|x^{2\alpha}(1+|x|^2)^{r/2-|\gamma|}(1+f(-|x|^2))^{\frac{-1}{2}(s+\frac{2r}{\beta}+2i)}[f'(-|x|^2)^{P_{i1}}\ldots f^{(n)}(-|x|^2)^{P_{in}}]\right| \leq \widetilde{C},$$

luego por (2.21) se tiene que existe C tal que $|x^\alpha D^\alpha m(x)| \leq C$. Como esta estimación se tiene para todo multi índice $\alpha \leq (1, \ldots, 1)$, entonces se tiene que la función m es un multiplicador de Fourier para $L^p(\mathbb{R}^n)$. □

Como se acaba de probar, si β, r, s satisfacen las hipótesis del Lema, la función m definida en (2.20) es un multiplicador de Fourier, por lo tanto para cada $p \in (1, \infty)$ esta función define un operador acotado sobre $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Definición 2.6.2 *Sean $\beta > 0$, $s \geq 0$, $f \in \mathcal{G}_s^\beta$ y m la función definida en (2.20). Para cada $p \in (1, \infty)$ se define el operador acotado $\Lambda : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)$ como*

$$\Lambda g = \mathcal{F}^{-1}(m(x)\mathcal{F}(g)).$$

Proposición 2.6.5 *Sean $\beta > 0$, $s \geq 0$ y $f \in \mathcal{G}_s^\beta$. Si se define $\overline{s} = s + \frac{2r}{\beta}$, entonces*

$$\mathcal{H}^{\overline{s},p}(f) \hookrightarrow H^{r,p}(\mathbb{R}^n) \tag{2.24}$$

Demostración: Note primero que si $r = 0$, entonces $\overline{s} = s$ y $H^{0,p}(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n)$, entonces esta proposición indica que

$$\mathcal{H}^{s,p}(f) \hookrightarrow H^{0,p} = L^p(\mathbb{R}^n)$$

como ya se había probado en la Proposición 2.6.1. Por otro lado observe que si $f \in \mathcal{G}_s^\beta$, entonces como $s < \overline{s}$ por la Proposición 2.2.1 se asegura que $f \in \mathcal{G}_{\overline{s}}^\beta$ y por lo tanto, el espacio $\mathcal{H}^{\overline{s},p}(f)$ está bien definido, luego

$$\begin{aligned}
\|u\|_{H^{r,p}(\mathbb{R}^n)} &= \|\mathcal{F}^{-1}((1+|x|^2)^{r/2}\mathcal{F}(u))\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&= \|\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{(1+|x|^2)^{r/2}}{(1+f(-|x|^2))^{\frac{1}{2}(s+\frac{2r}{\beta})}}(1+f(-|x|^2))^{\frac{1}{2}(s+\frac{2r}{\beta})}\mathcal{F}(u)\right)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&= \|\mathcal{F}^{-1}(m(x)(1+f(-|x|^2))^{\frac{1}{2}(s+\frac{2r}{\beta})}\mathcal{F}(u))\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq A\|\mathcal{F}^{-1}(1+f(-|x|^2))^{\frac{1}{2}(s+\frac{2r}{\beta})}\mathcal{F}(u)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq A\|u\|_{\mathcal{H}^{\overline{s},p}(f)}
\end{aligned}$$

donde A es la constante del multiplicador de Fourier m, como operador acotado sobre $L^p(\mathbb{R}^n)$ definida en (2.2). □

Proposición 2.6.6 *Sean $\beta > 0$, $s \geq 0$ y $f \in \mathcal{G}_s^\beta$. Para cada $\delta > 0$ y para cada $p \in (1, \infty)$ se tiene que*

$$\mathcal{H}^{s,p}(f) \hookrightarrow \mathcal{H}^{2s+\delta,p}(f)$$

Demostración: Observe nuevamente que si $f \in \mathcal{G}_s^\beta$, como $s < 2s + \delta$, entonces por la Proposición 2.2.1 $f \in \mathcal{G}_{2s+\delta}^\beta$ y de esta forma el espacio $\mathcal{H}^{2s+\delta,p}(f)$ está bien definido. Por otra parte

$$\begin{aligned}
\|u\|_{\mathcal{H}^{2s+\delta,p}(f)} &= \|\mathcal{F}^{-1}((1+f(-|\xi|^2))^{s+\delta/2}\mathcal{F}(u))\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&= \left\|\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{(1+f(-|\xi|^2))^{s+\delta/2}}{(1+f(-|\xi|^2))^{s/2}}(1+f(-|\xi|^2))^{s/2}\mathcal{F}(u)\right)\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&= \left\|\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{(1+f(-|\xi|^2))^{(s+\delta)/2}}(1+f(-|\xi|^2))^{s/2}\mathcal{F}(u)\right)\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},
\end{aligned}$$

pero como $s + \delta > s$, esta última expresión se puede escribir como la imagen del operador $T_f^{s+\delta}$ actuando sobre $\mathcal{F}^{-1}((1+f(-|\xi|^2))^{s/2}\mathcal{F}(u))$, y como $T_f^{s+\delta}$ es acotado sobre $L^p(\mathbb{R}^n)$ se tiene, de acuerdo a (2.2) que existe una constante A tal que

$$\begin{aligned}
\|u\|_{\mathcal{H}^{2s+\delta,p}(f)} &= \|T_f^{2s+\delta}(\mathcal{F}^{-1}((1+f(-|\xi|^2))^{s/2}\mathcal{F}(u)))\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq A\|\mathcal{F}^{-1}((1+f(-|\xi|^2))^{s/2}\mathcal{F}(u))\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&= A\|u\|_{\mathcal{H}^{s,p}(f)}
\end{aligned}$$

□

2.7. La ecuación no lineal.

El objetivo principal de esta sección es mostrar existencia, unicidad y propiedades de regularidad que tiene la solución de la ecuación no lineal definida como

$$f(\Delta)u = U(\cdot, u). \tag{2.25}$$

donde el operador $f(\Delta)$ está determinado por el símbolo f que pertenece a la clase $\mathcal{G}_s^\beta$, para ciertos valores dados de β y s. Con este objetivo, primero estudiaremos una ecuación lineal la cual nos permitirá, en forma posterior, resolver la ecuación (2.25) y mostrar las propiedades ya mencionadas que posee la solución.

Como se vio en el Capítulo 1 e inspirándose en los artículos [18,21], $f(\Delta)$ es un operador lineal que se puede definir mediante

$$f(\Delta)u = \mathcal{F}^{-1}(f(-|\xi|^2)\mathcal{F}(u)), \qquad u \in \mathcal{H}^{s,p}(f).$$

Por otra parte, si $u \in \mathcal{H}^{s,p}(f)$, por la Proposición 2.6.1 se tiene que $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y por lo tanto $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, luego por la biyectividad de la transformada de Fourier sobre $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ se puede escribir $u = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(u))$, donde tanto la transformada como la transformada inversa de Fourier están consideradas en el sentido de las distribuciones. Ahora, se define el operador lineal L_0 como $L_0 = f(\Delta) + Id$. Claramente L_0 es un operador lineal ya que es la suma de dos operadores lineales y se puede escribir como

$$\begin{aligned} L_0 u &= (f(\Delta) + Id)u \\ &= f(\Delta)u + u \\ &= \mathcal{F}^{-1}(f(-|\xi|^2)\mathcal{F}(u)) + \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(u)) \\ &= \mathcal{F}^{-1}((1 + f(-|\xi|^2))\mathcal{F}(u)). \end{aligned}$$

Finalmente, dado $s \in \mathbb{R}$ fijo, definimos el operador lineal L_s como

$$L_s u = L_0^{s/2} u = \mathcal{F}^{-1}((1 + f(-|\xi|^2))^{s/2}\mathcal{F}(u)) \tag{2.26}$$

A continuación se mostrará que para todo $s \geq 0$, la ecuación lineal definida por el operador L_s que se acaba de definir, tiene una única solución en el espacio $\mathcal{H}^{s,p}(f)$.

Teorema 2.7.1 *Sean $\beta > 0, s \geq 0$ y $f \in \mathcal{G}_s^\beta$ fijos. Dada $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$, la ecuación lineal*

$$L_s u = g, \tag{2.27}$$

tiene una única solución $u_s \in \mathcal{H}^{s,p}(f)$. Aún más, se tiene que

$$\|u_s\|_{\mathcal{H}^{s,p}(f)} = \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \tag{2.28}$$

Demostración: Considerando $s \geq 0$ y usando la definición del operador L_s dada en (2.26), se ve claramente que la ecuación

$$L_s u = g$$

se puede reescribir como

$$\mathcal{F}^{-1}((1 + f(-|\xi|^2))^{s/2}\mathcal{F}(u)) = g,$$

como $g \in L^p(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, su transformada de Fourier $\mathcal{F}(g)$ en el sentido de las distribuciones está bien definida, entonces es posible aplicar la transformada de Fourier a ambos lados de la ecuación y así obtener

$$(1 + f(-|\xi|^2))^{s/2}\mathcal{F}(u) = \mathcal{F}(g).$$

Observe que esta es una igualdad de distribuciones temperadas, luego, por el Lema (2.4.1) al multiplicar ambos lados de la igualdad por $\mathcal{M}_{f,(\frac{-s}{2})}$ se obtiene una nueva igualdad de distribuciones temperadas

$$\mathcal{F}(u) = \frac{\mathcal{F}(g)}{(1 + f(-|\xi|^2))^{s/2}}, \tag{2.29}$$

por lo tanto, se puede aplicar nuevamente, a ambos lados, la transformada de Fourier en el sentido de las distribuciones,y de esta forma obtener la solución de la ecuación

$$u = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\mathcal{F}(g)}{(1 + f(-|\xi|^2))^{s/2}}\right) \tag{2.30}$$

Esta última igualdad muestra explícitamente la solución u_s de la Ecuación Lineal $L_s u = g$. Por otra parte, la igualdad (2.29), junto con la Proposición 2.5.2 aseguran que $u_s \in \mathcal{H}^{s,p}(f)$ y que $\|u_s\|_{\mathcal{H}^{s,p}(f)} = \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$.
Notemos que la unicidad de solución está garantizada por la inyectividad de la transformada de Fourier en el sentido de las distribuciones. $\square$

Ahora ya se puede enfrentar el objetivo principal de este capítulo que es estudiar la ecuación no lineal

$$f(\Delta)u = U(\cdot, u).$$

Se definirá el tipo de no-linealidad U para la cual esta ecuación tendrá solución, además se verán las propiedades que posee esta solución.

En este sentido, a modo de ejemplo, se podría considerar el símbolo $f(x) = (-x)^{\alpha/2}$, con $0 < \alpha < 1$. Como se mostró en el Lema 2.3.1, para todo $s \geq 0$ este símbolo genera un multiplicador de Fourier, en particular $s = 2$. De esta forma podríamos considerar ecuaciones determinadas por la potencia fraccionaria del laplaciano, en concreto se puede considerar el siguiente problema estudiado por ejemplo en los siguientes artículos [11,33].

$$(-\Delta)^{\alpha/2}u = g(u), \qquad 0 < \alpha < 1$$

Lema 2.7.1 *Sean $\beta > 0$, $s \geq 0$ y $f \in \mathcal{G}_s^\beta$. Suponga que para $p \in (1, \infty)$ y q su exponente conjugado, la función $V : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ es tal que $V(\cdot, 0) \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y que existe $h \in L^{pq}(\mathbb{R}^n)$ tal que $|V(x, y_1) - V(x, y_2)| \leq h(x)|y_1 - y_2|^{1/p}$, entonces:*

1. *Para todo $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ se tiene que $V(\cdot, u) \in L^p(\mathbb{R}^n)$.*

2. *Si $u_1, u_2 \in \mathcal{H}^{s,p}(f)$ entonces se tiene que*

$$\|V(\cdot, u_1) - V(\cdot, u_2)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u_1 - u_2\|_{\mathcal{H}^{s,p}(f)} \tag{2.31}$$

donde $C = A\|h\|_{L^{pq}(\mathbb{R}^n)}$ y A corresponde a la constante de la inclusión $\mathcal{H}^{s,p}(f) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^n)$ que indica la Proposición 2.6.1.

Demostración: Para probar el punto (1), notemos primero que de la definición de V se tiene que

$$\begin{aligned} |V(x, y)| &\leq |V(x, y) - V(x, 0)| + |V(x, 0)| \\ &\leq h(x)|y|^{1/p} + |V(x, 0)|. \end{aligned}$$

Luego, para $p \in (1, \infty)$ existe $C(p) > 0$ tal que

$$|V(x, y)|^p \leq C(p)(|h(x)|^p|y| + |V(x, 0)|^p).$$

Entonces, ocupando esta desigualdad tenemos que

$$\begin{aligned} \|V(\cdot, u)\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} &= \int_{\mathbb{R}^n} |V(x, u(x))|^p dx \\ &\leq C(p)\left(\int_{\mathbb{R}^n} |h(x)|^p|u(x)|dx + \int_{\mathbb{R}^n} |V(x, 0)|^p dx\right) \quad (2.32) \\ &\leq C(p)\left(\|h\|_{L^{pq}}\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|V(\cdot, 0)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\right) < \infty. \quad (2.33) \end{aligned}$$

Notemos que en (2.32) usamos la desigualdad de Hölder en la primera integral.
Ahora probaremos el punto (2) del Lema, para ello, considerando $u_1,\ u_2 \in \mathcal{H}^{s,p}(f)$, tenemos que

$$\begin{aligned} \|V(\cdot, u_1) - V(\cdot, u_2)\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} &= \int_{\mathbb{R}^n} |V(x, u_1(x)) - V(x, u_2(x))|^p dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |h(x)|^p|u_1(x) - u_2(x)|dx \\ &\leq \|h\|_{L^{pq}(\mathbb{R}^n)}\|u_1 - u_2\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq \|h\|_{L^{pq}(\mathbb{R}^n)}A\|u_1 - u_2\|_{\mathcal{H}^{s,p}(f)} \end{aligned}$$

Teorema 2.7.2 *Sean $\beta > 0$, $s \geq 0$ y $f \in \mathcal{G}_s^\beta$. Suponga que $p \in (1, \infty)$ y que $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Suponga además que la función $V : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ es tal que $V(\cdot, 0) \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y que existe $h \in L^{pq}((\mathbb{R}^n)$ tal que $|V(x, y_1) - V(x, y_2)| \leq h(x)|y_1 - y_2|^{1/p}$. Si se define $U : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ como $U(x, y) = -y + \delta V(x, y)$ entonces para $\delta < (A\|h\|_{L^{pq}(\mathbb{R}^n)})^{-1}$ la ecuación no lineal*

$$f(\Delta)u = U(\cdot, u) \tag{2.34}$$

tiene una única solución $u \in \mathcal{H}^{s,p}(f)$.

Acá nuevamente A es la constante correspondiente a la inclusión $\mathcal{H}^{s,p}(f) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^n)$ señalada en la Proposición 2.6.1.

Demostración: Al considerar la función $U(x, y) = -y + \delta V(x, y)$, tenemos que la ecuación (2.34) se puede reescribir de la siguiente manera

$$f(\Delta)u = -u + \delta V(\cdot, u).$$

Es decir, (2.34) es equivalente a

$$L_0 u = \delta V(\cdot, u).$$

Definamos ahora $\mathcal{R} : \mathcal{H}^{s,p}(f) \to \mathcal{H}^{s,p}(f)$ como $\mathcal{R}(u) = w$, donde w es la única solución de la ecuación lineal definida por

$$L_0(w) = V(\cdot, u). \tag{2.35}$$

Observe que si $u \in \mathcal{H}^{s,p}(f)$, en particular $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y por el primer punto del Lema (2.7.1) se tiene que $V(\cdot, u) \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Luego el Teorema (2.7.1) asegura que la ecuación lineal (2.35) tiene una única solución $w \in \mathcal{H}^{s,p}(f)$, por lo tanto el operador $\mathcal{R}$ está bien definido.

Por otro lado, si $u_1,\ u_2 \in \mathcal{H}^{s,p}(f)$, entonces $\mathcal{R}(u_i) = w_i$ y donde w_i es la única solución de la ecuación lineal $L(w_i) = \delta V(\cdot, u_i)$, para $i = 1, 2$ y por la linealidad de L_0 se tiene que

$$\begin{aligned} L_0(w_1 - w_2) &= L_0(w_1) - L_0(w_2) \\ &= \delta V(\cdot, u_1) - \delta V(\cdot, u_2) \\ &= \delta(V(\cdot, u_1) - V(\cdot, u_2)) \end{aligned}$$

Luego, por (2.28) tenemos que

$$\|w_1 - w_2\|_{\mathcal{H}^{s,p}(f)} = \delta\|V(\cdot, u_1) - V(\cdot, u_2)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

Entonces para el operador $\mathcal{R}$, usando la segunda parte del Lema (2.7.1) se tiene que

$$\begin{aligned}\|\mathcal{R}(u_1)-\mathcal{R}(u_2)\|_{\mathcal{H}^{s,p}(f)} &= \|w_1-w_2\|_{\mathcal{H}^{s,p}(f)}\\ &= \delta\|V(\cdot,u_1)-V(\cdot,u_2)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\\ &\leq \delta A\|u_1-u_2\|_{\mathcal{H}^{s,p}(f)},\end{aligned}$$

donde, como se señaló anteriormente, A es la constante de la inclusión $\mathcal{H}^{s,p}(f)\hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^n)$ vista en la Proposición 2.6.1. Ahora, si se escoge δ suficientemente pequeño, de modo que $\delta A<1$, el operador $\mathcal{R}$ será una contracción sobre el espacio $\mathcal{H}^{s,p}(f)$ que como se mostró en la Proposición 2.5.1 es un espacio de Banach. Finalmente por el Teorema del punto fijo de Banach (ver [30]) existe una única solución $u\in\mathcal{H}^{s,p}(f)$ tal que

$$\mathcal{R}(u)=u$$

es decir, existe una única $u\in\mathcal{H}^{s,p}(f)$ que es solución de la ecuación

$$L(u)=\delta V(\cdot,u)$$

por lo tanto, u es solución de la ecuación no lineal (2.34). □

A continuación, se procederá a resolver la ecuación no lineal

$$f(\Delta)u=U(\cdot,u). \tag{2.36}$$

En este caso, a diferencia de lo que se acaba de desarrollar, se considerarán otras condiciones más débiles sobre la no linealidad U. Es importante señalar que esta Proposición es la generalización a $L^p(\mathbb{R}^n)$ del Teorema 3.3 del artículo [21]. La estructura de la demostración es la misma. En el presente trabajo se consideran términos más generales que coincidirán con lo mostrado en [21] al considerar $p=2$.

Proposición 2.7.1 *Suponga que para $\beta>0$, $s\geq 0$ y $1<p<n$ tales que $\dfrac{n}{p}<\dfrac{\beta s}{2}$ el símbolo $f\in\mathcal{G}_s^\beta$. Además considere la función U_δ, con $\delta>0$ definida por*

$$U_\delta(x,y)=-y+\delta\varphi(x)V(x,y), \tag{2.37}$$

donde $\varphi\in C_0^\infty$ y $V\in C^1(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R})$. Asuma que existe una constante $\alpha\geq 1$, una constante positiva C y una función $h\in L^p(\mathbb{R}^n)$ tal que para la función V se satisfacen las siguientes desigualdades

$$|V(x,y)|+\left|\frac{\partial}{\partial x_i}V(x,y)\right|\leq C(h(x)+|y|^\alpha),\qquad i=1,\dots,n, \tag{2.38}$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial y}V(x,y)\right| \leq C(1+|y|^{\alpha}). \tag{2.39}$$

Entonces, para δ suficientemente pequeño, existe una solución $u \in \mathcal{H}^{s,p}(f)$ a la ecuación (2.36) donde la no linealidad U está dada por (2.37).

Demostración: Observe que al plantear la ecuación no lineal (2.36) con la no linealidad U dada en (2.37) se tiene que la ecuación a resolver es

$$f(\Delta)u = -u + \delta V(\cdot, u).$$

Note que el resolver esta ecuación es equivalente a resolver la siguiente

$$f(\Delta)u + u = \delta V(\cdot, u).$$

Es decir, se busca u tal que

$$L_0 u = \delta V(\cdot, u),$$

donde L_0 es el operador definido en (2.26). Primero, se probará que si $u \in H^{r,p}(\mathbb{R}^n)$ entonces bajo las hipótesis que establece el Teorema para la función $V(\cdot, u)$, se tendrá que $\delta V(\cdot, u) \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

Escogiendo $r \in \left(\frac{n}{p}, \frac{\beta s}{2}\right)$ se tiene por las inclusiones de Sobolev (ver por ejemplo [39]), que

$$H^{r,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{\infty}(\mathbb{R}^n). \tag{2.40}$$

Por otra parte, definiendo $r_\alpha = \dfrac{n(\alpha-1)}{p\alpha}$ se tiene claramente que $r_\alpha < \dfrac{n}{p} < r$, por lo tanto,

$$H^{r,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^{r_\alpha,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{q}(\mathbb{R}^n), \tag{2.41}$$

donde $q = \dfrac{np}{n - r_{\alpha p}} = \alpha p$, por lo tanto de (2.41) se tiene que

$$H^{r,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^{r_\alpha,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{\alpha p}(\mathbb{R}^n). \tag{2.42}$$

De esta última inclusión, sabemos que existe $\widetilde{C}(\alpha, p, r) = \widetilde{C} > 0$ tal que

$$\|u\|_{H^{r,p}(\mathbb{R}^n)} \leq \widetilde{C}\|u\|_{L^{\alpha p}(\mathbb{R}^n)}. \tag{2.43}$$

Con esta desigualdad, se probará ahora que bajo las hipótesis de la Proposición 2.7.1, si $u \in H^{r,p}(\mathbb{R}^n)$, entonces se tiene que $V(\cdot, u) \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Observe que usando (2.38) se tiene que

$$\begin{aligned}\|V(\cdot,u)\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} &= \int_{\mathbb{R}^n}|V(x,u(x))|^p dx\\ &\leq C\int_{\mathbb{R}^n}|h(x)+|u(x)|^\alpha|^p dx\\ &\leq C(p)\int_{\mathbb{R}^n}|h(x)|^p+|u(x)|^{\alpha p}dx\\ &= C(p)\left(\|h\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)}+\|u\|^p_{L^{\alpha p}(\mathbb{R}^n)}\right)\\ &\leq C(p)\left(\|h\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)}+\widetilde{C}\|u\|^{\alpha p}_{H^{r,p}(\mathbb{R}^n)}\right).\end{aligned}$$

Es decir, si $u \in H^{r,p}(\mathbb{R}^n)$, entonces existe $C(p) > 0$ tal que

$$\|V(\cdot,u)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C(p)\left(\|h\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}+\widetilde{C}\|u\|^{\alpha}_{H^{r,p}(\mathbb{R}^n)}\right) \tag{2.44}$$

Observe que la constante $\widetilde{C}$ que aparece en la expresión (2.44) es la constante de la inclusión descrita en (2.43). Por otra parte, como

$$\|\delta\varphi V(\cdot,u)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \delta\|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\|V(\cdot,u)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

por (2.44) se tiene que si $u \in H^{r,p}(\mathbb{R}^n)$, entonces la función $\delta\varphi V(\cdot,u) \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y

$$\|\delta\varphi V(\cdot,u)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C(p)\delta\|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\left(\|h\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}+\widetilde{C}\|u\|^{\alpha}_{H^{r,p}(\mathbb{R}^n)}\right). \tag{2.45}$$

Considerando ahora $u \in H^{r,p}(\mathbb{R}^n)$ y el operador lineal L_0 definido en (2.26), si se plantea la ecuación lineal

$$L_0 w = \delta\varphi V(\cdot,u),$$

como $\delta\varphi V(\cdot,u) \in L^p(\mathbb{R}^n)$, el Teorema (2.7.1) garantiza la existencia y unicidad de la solución $w \in \mathcal{H}^{s,p}(f)$ para esta ecuación. De esta forma, se puede definir el conjunto $\mathcal{A}_\delta = \{u \in H^{r,p}(\mathbb{R}^n) : \|u\|_{H^{r,p}(\mathbb{R}^n)} \leq 1\}$ y la aplicación $\mathfrak{R} : \mathcal{A}_\delta \to \mathcal{A}_\delta$ como

$$\mathfrak{R}(u) = w,$$

donde w es la única solución de la ecuación lineal

$$Lw = \delta\varphi V(\cdot,u).$$

Observe que si existe $u_0 \in \mathcal{A}_0$ tal que sea punto fijo del operador no lineal $\mathfrak{R}$, entonces se tendría que

$$\mathfrak{R}(u_0) = u_0,$$

es decir

$$L_0(u_0) = \delta\varphi V(\cdot, u_0),$$

y por lo tanto

$$f(\Delta)u_0 = U(\cdot, u_0),$$

y así, u_0 sería solución de la ecuación no lineal (2.36). Por lo tanto, mostraremos a continuación que el operador $\mathfrak{R}$ está bien definido y tiene al menos un punto fijo en $\mathcal{H}^{s,p}(f)$, para ello, se usará el Teorema de punto fijo de Schauder, por lo que se debe probar que $\mathfrak{R} : \mathcal{A}_0 \to \mathcal{A}_0$ es compacto y continuo.
Primero se verá que $\mathfrak{R}$ está bien definido, para ello observe que de (2.28), (2.44) y como $\mathcal{H}^{s,p}(f) \hookrightarrow H^{r,p}(\mathbb{R}^n)$ se tiene que si $u \in \mathcal{A}_0 \subset H^{r,p}(\mathbb{R}^n)$, entonces

$$\begin{aligned}
\|\mathfrak{R}(u)\|_{H^{r,p}(\mathbb{R}^n)} &= \|w\|_{H^{r,p}(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq C\|w\|_{\mathcal{H}^{s,p}(f)} \\
&= C\|\delta\varphi V(\cdot, u)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&= C\delta\|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\|V(\cdot, u)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq C\delta\|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\left(C(p)\|h\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \widetilde{C}\|u\|_{H^{r,p}(\mathbb{R}^n)}\right).
\end{aligned}$$

Luego, como $u \in \mathcal{A}_\delta$, se tiene que

$$\|\mathfrak{R}(u)\|_{H^{r,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C\delta\|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\left(C(p)\|h\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \widetilde{C}\right),$$

por lo tanto, como el lado derecho de esta desigualdad no depende de u, para δ suficientemente pequeño, se tendrá que $\|\mathfrak{R}(u)\|_{H^{r,p}(\mathbb{R}^n)} \leq 1$ y por lo tanto $\mathfrak{R}$ estará bien definido.
Para ver la continuidad, se reproducirá el mismo argumento del artículo [21], para esto note primero que

$$\begin{aligned}
|V(x, u_1(x)) - V(x, u_2(x))| &= \left|\int_0^1 \frac{d}{dt}\left(V(x, tu_1(x) + (1-t)u_2(x))\right)dt\right| \\
&= \left|\int_0^1 D_yV(x, tu_1(x) + (1-t)u_2(x))(u_1(x) - u_2(x))dt\right| \\
&\leq |u_1(x) - u_2(x)|\int_0^1 |D_yV(x, tu_1(x) + (1-t)u_2(x))dt| \\
&\leq |u_1(x) - u_2(x)|C\int_0^1 |1 + |tu_1(x) + (1-t)u_2(x)|^\alpha|dt \\
&\leq C(\alpha)|u_1(x) - u_2(x)|\int_0^1 |1 + t|u_1(x)|^\alpha + (1-t)|u_2(x)|^\alpha|dt \\
&\leq C(\alpha)|u_1(x) - u_2(x)|\int_0^1 1 + |u_1(x)|^\alpha + |u_2(x)|^\alpha dt \\
&= C(\alpha)|u_1(x) - u_2(x)|(1 + |u_1(x)|^\alpha + |u_2(x)|^\alpha)
\end{aligned}$$

Luego, usando esta desigualdad, se puede estimar lo siguiente

$$\begin{aligned}\|V(\cdot,u_1)-V(\cdot,u_2)\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} &= \int_{\mathbb{R}^n} |V(x,u_1(x))-V(x,u_2(x))|^p dx \\ &\leq C(\alpha)\int_{\mathbb{R}^n} |u_1(x)-u_2(x)|^p\left(1+|u_1(x)|^\alpha+|u_2(x)|^\alpha\right)dx \\ &\leq C(\alpha)\|u_1-u_2\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\left(1+\|u_1\|_{L^{\alpha p}(\mathbb{R}^n)}+\|u_2\|_{L^{\alpha p}(\mathbb{R}^n)}\right),\end{aligned}$$

luego, por las inclusiones mostradas en (2.42) y en (2.40) se tiene que

$$\|V(\cdot,u_1)-V(\cdot,u_2)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \widetilde{C}\|u_1-u_2\|_{H^{r,p}(\mathbb{R}^n)}\left(1+\|u_1\|_{H^{r,p}(\mathbb{R}^n)}+\|u_2\|_{H^{r,p}(\mathbb{R}^n)}\right).$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\|\mathfrak{R}(u_1)-\mathfrak{R}(u_2)\|_{H^{r,p}(\mathbb{R}^n)} &= \|w_1-w_2\|_{H^{r,p}(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq C\|w_1-w_2\|_{H^{s,p}(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq \delta\|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\|V(\cdot,u_1)-V(\cdot,u_2)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq \delta\|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\|u_1-u_2\|_{H^{r,p}(\mathbb{R}^n)}\left(1+\|u_1\|_{H^{r,p}(\mathbb{R}^n)}+\|u_2\|_{H^{r,p}(\mathbb{R}^n)}\right).\end{aligned}$$

Por lo tanto, si $\|u_1-u_2\|_{H^{r,p}(\mathbb{R}^n)} \to 0$ entonces $\|\mathfrak{R}(u_1)-\mathfrak{R}(u_2)\|_{H^{r,p}(\mathbb{R}^n)} \to 0$, esto prueba que el operador $\mathfrak{R}$ es continuo. A continuación se mostrará que $\mathfrak{R}$ es compacto. Para ello, dada una sucesión $\{u_k\}$ acotada en $H^{r,p}(\mathbb{R}^n)$, se probará que la sucesión $\{\mathfrak{R}(u_k)\}$ posee una subsucesión convergente en $H^{r,p}(\mathbb{R}^n)$. Como $\varphi \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, existe $R>0$ tal que $supp(\varphi) \subset B(0,R)$. Definamos ahora, para cada $k \in \mathbb{N}$

$$g_k(x) = \begin{cases} \delta\varphi(x)V(x,u_k(x)) & \text{si } x \in B(0,R) \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R}^n \setminus B(0,R). \end{cases}$$

A continuación, se mostrará que la sucesión $\{g_k\}_k$ es acotada en $H^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.
Como

$$\begin{aligned}\|g_k\|_{H^{1,p}(\mathbb{R}^n)} &= \delta\|\varphi V(\cdot,u_k)\|_{H^{1,p}(B)} \\ &= \delta\left(\|\varphi V(\cdot,u_k)\|_{L^p(B)}+\sum_{i=1}^n \|D_i\varphi V(\cdot,u_k)\|_{L^p(B)}\right)^{1/p},\end{aligned}$$

pero para cada se tiene que $u_k \in H^{r,p}(\mathbb{R}^n)$ y por la desigualdad mostrada en (2.45) se tiene que $\|\varphi V(\cdot,u_k)\|_{L^p(B)} < \infty$, por lo tanto sólo basta mostrar que $\sum_{i=1}^n \|D_i\varphi V(\cdot,u_k)\|_{L^p(B)} < \infty$, pero observe que para cada $i = 1\ldots n$ se tiene, usando la regla de la cadena que

$$\begin{aligned}D_i\left(\varphi(x)V(x,u_k(x))\right) &= D_i(\varphi(x))V(x,u_k(x))+\varphi(x)D_i\left(V(x,u_k(x))\right) \\ &= D_i(\varphi(x))V(x,u_k(x))+\varphi(x)\left[D_iV(x,u_k(x))+D_yV(x,u_k(x))D_iu_k(x)\right]\end{aligned}$$

luego, se tiene que

$$
\begin{aligned}
&\|D_i\varphi V(\cdot,u_k)\|_{L^p(B)}^p \\
= \;& \int_B |D_i(\varphi(x))V(x,u_k(x)) + \varphi(x)\left[D_iV(x,u_k(x)) + D_yV(x,u_k(x))D_iu_k(x)\right]|^p\,dx \\
\leq \;& C(p)\left[\int_B |D_i(\varphi(x))V(x,u_k(x))|^p\,dx + \int_B |\varphi(x)|^p|D_iV(x,u_k(x)) + D_yV(x,u_k(x))D_iu_k(x)|^p\right] \\
\leq \;& C(p)\Big[\|D_iV(\cdot,u_k)\|_{L^p(B)}^p\|V(\cdot,u_k)\|_{L^p(B)}^p + \\
& C(p)\|\varphi\|_{L^p(B)}^p\left(\|D_iV(\cdot,u_k)\|_{L^p(B)}^p + \|D_yV(\cdot,u_k)D_iu_k\|_{L^p(B)}^p\right)\Big]\,.
\end{aligned}
$$

Por una parte, observe que de (2.38) se tiene que

$$
\begin{aligned}
\|D_iV(\cdot,u_k)\|_{L^p(B)}^p &= \int_B |D_iV(x,u_k(x))|^p dx \\
&\leq C\int_B |h(x)|^p + |u_k(x)|^{\alpha p} \\
&= C\left(\|h\|_{L^p(B)}^p + \|u_k\|_{L^{\alpha p}}^{\alpha p}\right) \\
&\leq C\left(\|h\|_{L^p(B)}^p + \widetilde{C}\|u\|_{H^{r,p}(B)}^{\alpha}\right),
\end{aligned} \tag{2.46}
$$

donde la constante $\widetilde{C}$ que aparece en la última desigualdad corresponde a la inclusión $H^{r,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{\alpha p}(\mathbb{R}^n)$ descrita en (2.42). Por otra parte, observe que por (2.39) se tiene que

$$
\begin{aligned}
\|D_yV(\cdot,u_k)D_iu_k\|_{L^p(B)}^p &= \int_B |D_yV(x,u_k(x))D_iu_k(x)|^p dx \\
&\leq C\int_B |(1+|u_k(x)|^{\alpha})D_iu_k(x)|^p dx \\
&= C\int_B |D_iu_k(x) + |u_k(x)|^{\alpha}D_iu_k(x)|^p dx \\
&\leq C(p)\left(\|D_iu_k\|_{L^p(B)} + \||u_k|^{\alpha p}\|_{L^\infty(B)}\|D_iu_k\|_{L^p(B)}^p\right) \\
&= C(p)\|D_iu_k\|_{L^p(B)}^p\left(1 + \||u|^{\alpha p}\|_{L^\infty(B)}\right).
\end{aligned} \tag{2.47}
$$

De esta desigualdad, como $u \in H^{r,p}(\mathbb{R}^n)$ se tiene que $\|D_iu_k\|_{L^p(B)}^p < \infty$ y además por (2.40) se tiene que $\left(1 + \||u|^{\alpha p}\|_{L^\infty(B)}\right) < \infty$. Por lo tanto por (2.47) se tiene que

$$\|D_yV(\cdot,u_k)D_iu_k\|_{L^p(B)} < \infty.$$

Esto implica que $\{g_k\}$ es una sucesión acotada en $H^{1,p}(B)$ y por Teorema de Rellich-Kondrachov, si $p < n$ la inclusión $H^{1,p}(B) \hookrightarrow L^q(B)$ es compacta para todo $q < p^*$ en particular, como $p < p^*$ se tiene que la inclusión $H^{1,p}(B) \hookrightarrow L^p(B)$ es compacta, por lo tanto la sucesión $\{g_k\}_k$ tiene una subsucesión $\{g_{k_i}\}$ que converge fuertemente en $L^p(B)$. Si se denota por $g_0 \in L^p(B)$ al límite de g_{k_i}, y se define la función g como

$$g(x) = \begin{cases} g_0(x) & \text{si} \quad x \in B, \\ 0 & \text{si} \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus B. \end{cases}$$

Es fácil observar que la sucesión $\{w_{k_i}\} = \mathfrak{R}(u_{k_i})$ es una sucesión de Cauchy en $H^{r,p}(\mathbb{R}^n)$, ya que como $r < \dfrac{\beta s}{2}$ por Proposición 2.6.5 se tiene la inclusión $\mathcal{H}^{s,p}(f) \hookrightarrow H^{r,p}(\mathbb{R}^n)$ y por lo tanto

$$\begin{aligned} \|w_{k_i} - w_{k_j}\|_{H^{r,p}(\mathbb{R}^n)} &\leq C\|w_{k_i} - w_{k_j}\|_{\mathcal{H}^{s,p}(f)} \\ &= C\|\delta\varphi V(\cdot, u_{k_i}) - \delta\varphi V(\cdot, u_{k_j})\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq C\|g_{k_i} - g_{k_j}\|_{L^p(B)}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la sucesión $\{\mathfrak{R}(u_{k_i})\}$ es convergente en el espacio de Banach $H^{r,p}(\mathbb{R}^n)$. Y esto muestra que $\mathfrak{R}$ es compacto, finalmente por Teorema de Schauder, existe $u_0 \in \mathcal{H}^{s,p}(f)$ punto fijo de $\mathfrak{R}$ que es solución de la ecuación no lineal (2.36) con la no linealidad (2.37). $\square$

Apéndice A

Transformada de Fourier y Distribuciones Temperadas

Una herramienta fundamental que se ha usado en el desarrollo de esta tesis ha sido la transformada de Fourier. En el Capítulo 1 se trabajó fuertemente con la transformada de Fourier definida sobre el espacio $L^2(\mathbb{R}^n)$ y sus propiedades como la identidad de Parseval, mientras que el desarrollo del Capítulo 2 contempla la transformada de Fourier definida sobre distribuciones temperadas. En este Capítulo, se darán las definiciones básicas tanto de la transformada de Fourier como de los espacios donde ésta actúa y además se mostrarán las propiedades que se usaron en el desarrollo de esta tesis, para mayor información se recomienda consultar [14, 25, 30, 32, 36]. En la primera parte se definen el espacio de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ y la transformada de Fourier sobre este espacio y luego, en la segunda parte, se extiende esta definición al espacio de las distribuciones temperadas $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.
Primero, se dará la notación básica usada en este Capítulo.

Definición A.0.1 *Un multi índice $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_n)$ es una n-tupla de enteros no negativos, es decir α es un elemento del conjunto $\mathbb{Z}_+^n$. El largo del multi índice α es el número entero $|\alpha|$ definido como*

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i.$$

Sean α, β multi índices, entonces diremos que $\alpha \leq \beta$ si y solamente si $|\alpha| = |\beta| = n$ y para cada $i = 1 \ldots n$ se tiene que $\alpha_i \leq \beta_i$.
Si $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$, entonces se define x^α como

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}.$$

Por último, si α es un multi índice, se define el operador diferencial D^α como

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Definición A.0.2 *El espacio de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ o también llamado espacio de las funciones de decrecimiento rápido, está formado por todas funciones $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tales que para todo par de multi índices α, β la semi norma*

$$\|\phi\|_k = \sup_{|\alpha+\beta|\leq k} \|x^\alpha D^\beta \phi(x)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} < \infty.$$

Observe que con esta notación la norma $\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$ corresponde a la seminorma $\|f\|_0$.

Proposición A.0.2 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$ *para todo* $p \in [1, \infty]$.

Note que por definición, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Por lo tanto sólo es necesario probar la proposición para $1 \leq p < \infty$. Se mostrará primero el caso $n = 1$.
Suponga que $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, entonces $f \in L^1(\mathbb{R})$ ya que

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^1(\mathbb{R})} &= \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)} \left((1+x^2)|f(x)|\right) dx \\
&\leq \|(1+x^2)f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} \\
&\leq \pi(\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} + \|x^2 f\|_{L^\infty(\mathbb{R})}) \\
&\leq \pi(\|f\|_0 + \|f\|_2) \\
&\leq 2\pi\|f\|_2
\end{aligned}$$

y como $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, esta expresión es finita. Ahora se mostrará que $f \in L^p(\mathbb{R})$, para esto considere $p > 1$, entonces

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^p(\mathbb{R})}^p &= \int_{\infty}^{\infty} |f(x)|^p dx \\
&= \int_{\infty}^{\infty} |f(x)||f(x)|^{p-1} dx \\
&\leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R})} \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^{p-1}. \qquad \text{(A.1)}
\end{aligned}$$

Este término también es finito ya que si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, como se acaba de mostrar $f \in L^1(\mathbb{R})$.
El caso para $n > 1$ es similar, ya que si f es una función que pertenece a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, entonces

$f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ya que

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^{n}(1+x_i^2)|f(x)|\frac{1}{\prod_{i=1}^{n}(1+x_i^2)}dx \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{dx}{\prod_{i=1}^{n}(1+x_i^2)}\right)\left\|\prod_{i=1}^{n}(1+x_i^2)f\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq \pi^n\left(2^n \sup_{|\alpha|\leq 2n} \|x^\alpha f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\right) \\
&\leq (2\pi)^n(\|f\|_{2n})
\end{aligned}$$

y claramente este término es finito ya que $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Ahora, para probar que $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ se usa el mismo argumento de la desigualdad (A.1), además, un cálculo sencillo muestra que

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq (2\pi)^n\|f\|_{2n}. \tag{A.2}$$

Definición A.0.3 *El espacio de las distribuciones temperadas es el espacio dual topológico de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, que se denota por $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.*

Note que para que un funcional T lineal definido sobre $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ esté en el espacio $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ debe existir una seminorma $\|\cdot\|_{k,m}$ tal que para toda $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ se tenga

$$|T(f)| \leq C\|f\|_{m,k}.$$

Con esto, se ve claramente que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ ya que para cada $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, se puede considerar el funcional $T_f : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$, definido como

$$T_f(g) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)dx.$$

Claramente T_f es lineal. Por otro lado, para todo $g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

$$|T_f(g)| \leq \int |f(x)g(x)|dx \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$$

y como $\|\cdot\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$ corresponde a la seminorma $\|\cdot\|_0$, el funcional T_f es continuo. De esta forma, cada $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ define un funcional lineal y continuo $T_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Proposición A.0.3 *Para cada $q \in [1,\infty]$, $L^q(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.*

Demostración: Cada $\phi \in L^q(\mathbb{R}^n)$ define un funcional lineal en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ que actúa sobre cada $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ de forma natural como

$$\phi(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)dx,$$

entonces de esta forma

$$|\phi(f)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\phi(x)g(x)| \leq \|\phi\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \|f\|_{L^{q'}(\mathbb{R}^n)},$$

donde $1/q + 1/q' = 1$. Luego, tomando el supremo sobre todos los $f \in L^{q'}(\mathbb{R}^n)$ con $\|f\|_{L^{q'}(\mathbb{R}^n)} \leq 1$ se prueba que la inclusión es continua. $\square$

Hasta ahora se han considerado sólo distribuciones temperadas definidas por funciones, pero este espacio es mucho más grande que esto. A continuación se mostrarán un par de ejemplos que muestran distribuciones temperadas que no provienen de funciones. Por simplicidad, en unos ejemplos sólo se considerará el caso $n = 1$ ya que la extensión a $n > 1$ resulta evidente.

La función delta. Sea $b \in \mathbb{R}^n$. Se define sobre $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ el funcional lineal δ_b como

$$\delta_b(f) = f(b), \qquad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

Note que

$$|\delta_b(f)| = |f(b)| \leq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_0,$$

y como esta última expresión es una seminorma para f, la función $\delta_b \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Medidas polinomialmente acotadas. Considere μ una medida finita sobre $\mathbb{R}$ y el funcional lineal T_μ definido como

$$T_\mu(f) = \int_\infty^\infty f(x)d\mu.$$

Claramente para cada $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

$$|T_\mu(f)| \leq \int_{-\infty}^\infty |f(x)|d\mu \leq \mu(\mathbb{R})\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = \mu(\mathbb{R})\|f\|_0.$$

Entonces, como $\|\cdot\|_0$ es una seminorma para f, el funcional $T_\mu \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ y evidentemente no proviene de alguna función.

Si bien, el producto entre una distribución temperada y una función cualquiera podría no estar definido como una distribución, a continuación se definirá una clase de funciones satisfacen que al multiplicarlas por una distribución temperada, este producto es efectivamente una distribución.

Definición A.0.4 *Se define la clase $\mathcal{P}^0$ como todas las funciones continuas ψ que satisfacen*

$$|\psi(x)| \leq C(1+|x|^2)^N,$$

para ciertas constantes C y N, y se define la clase $\mathcal{P}$ de las funciones con crecimiento polinomial al infinito, como todas las funciones $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tales que $\partial^\alpha \psi \in \mathcal{P}^0$, para todo multi índice α.

Proposición A.0.4 *Sean $F \in \mathcal{P}^0$ y $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Entonces $FT \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ y se define como*

$$(FT)(f) = T(Ff), \qquad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

***Demostración**: Si se considera $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ y $F \in \mathcal{P}^0$, es evidente que el producto $fF \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ (ver [14,30,32,36]) y de esta forma, la distribución temperada fF está bien definida.*

Definición A.0.5 *Sea $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Se define la transformada de Fourier de f, como la función $\mathcal{F}(f)$ dada por*

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} f(x)dx. \tag{A.3}$$

De forma similar, se define la transformada de Fourier inversa de f, denotada por $\mathcal{F}^{-1}(f)$, a la función

$$\mathcal{F}^{-1}(f)(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi\cdot x} f(\xi)d\xi. \tag{A.4}$$

Note que por la Proposición A.0.2, el espacio $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ es un subconjunto de cada $L^p(\mathbb{R}^n)$, en particular es un subconjunto de $L^1(\mathbb{R}^n)$ por lo que las integral dadas en (A.3) y en (A.4) están bien definidas.

Ejemplo: Considere la función $\varphi(x) = e^{-|x|^2/2}$, su transformada de Fourier es

$$\mathcal{F}(\varphi)(\xi) = (2\pi)^{n/2} e^{-|\xi|^2/2} \tag{A.5}$$

Esto se ve claramente, ya que al aplicar la definición de la transformada de Fourier de la función φ

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\varphi)(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi\cdot x} e^{-|x|^2/2} dx \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-ix_1\xi_1} e^{-x_1^2/2} dx_1\right) \cdots \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-ix_n\xi_n} e^{-x_n^2/2} dx_n\right)\end{aligned}$$

por lo que el trabajo se reduce al cálculo de n integrales sobre $\mathbb{R}$, pero el valor de cada una de estas integrales es fácil de determinar luego de factorizar de forma adecuada el exponente, ya que

$$\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-ix_i\xi_1} e^{-x_i^2/2} dx_i\right) = e^{-\xi_i^2/2} \int_{\mathbb{R}} e^{(x+i\xi)^2/2} dx = e^{-\xi_i^2/2} (2\pi)^{1/n}.$$

Finalmente, al realizar este producto se prueba lo deseado. $\square$

Para el siguiente lema y con el objeto de simplificar la notación, se considerará el siguiente operador diferencial

$$\partial^\alpha = (-i)^{|\alpha|} D^\alpha = (-i)^{|\alpha|} \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

para todo multi índice α. Además se usará la siguiente notación $u_-(x) = u(-x)$.

Lema A.0.2 *La transformada de Fourier $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ es una aplicación continua. Además para cada $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ se satisface lo siguiente:*

1. *Para todo $\alpha \in \mathbb{Z}^n$, $\mathcal{F}(\partial_x^\alpha \varphi)(\xi) = \xi^\alpha \mathcal{F}(\varphi)(\xi)$ y $\mathcal{F}(x^\alpha \varphi)(\xi) = -(\partial_\xi)^\alpha \mathcal{F}(\varphi)(\xi)$*
2. *Para todo $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ $\int \mathcal{F}(u)(x)\overline{\varphi(x)} dx = \int u_-(x)\overline{\mathcal{F}\varphi(x)} dx$,*
3. *$\mathcal{F}(\mathcal{F}(\varphi)) = (2\pi)^n \varphi_-$*
4. *Para cada $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ $\int \mathcal{F}(\varphi)(x)\overline{\mathcal{F}(\psi)(x)} dx = (2\pi)^n \int \varphi(x)\overline{\psi(x)} dx.$*

La propiedad mostrada en el punto 4. es conocida como la identidad de Parseval.

Demostración: Claramente la transformada de Fourier es una aplicación lineal de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Para probar la continuidad, note que si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, entonces $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y de este modo $\mathcal{F}(\varphi)$ es una función acotada ya que para cada $\xi \in \mathbb{R}^n$, usando la desigualdad (A.2)

$$|\mathcal{F}(\varphi)(\xi)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |e^{-ix\xi}\varphi(x)| dx \leq \|\varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq (2\pi)^n \|\varphi\|_{2n}, \tag{A.6}$$

esto muestra que $\mathcal{F}:\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\to\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ es una aplicación continua. Note ahora que la función $e^{-ix\cdot\xi}\varphi(x)\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, luego, se puede integrar por partes y derivar bajo la integral, de esta forma para todo multi índice α

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\partial_x^\alpha\varphi)(\xi) &= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi}(\partial_x^\alpha\varphi(x))dx\\
&= -\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}(\partial_x^\alpha e^{-ix\cdot\xi})\varphi(x)dx\\
&= \frac{\xi^\alpha}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi}\varphi(x)dx\\
&= \xi^\alpha\mathcal{F}(\varphi)(\xi)
\end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(x^\alpha\varphi)(\xi) &= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi}(x^\alpha\varphi(x))dx\\
&= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}\partial_\xi^\alpha(e^{-ix\cdot\xi})\varphi(x)dx\\
&= \frac{1}{(2\pi)^n}\partial_\xi^\alpha\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi}\varphi(x)dx\\
&= \partial_\xi^\alpha\mathcal{F}(\varphi)(\xi)
\end{aligned}$$

esto muestra la afirmación del punto 1. Además, esto indica que $\xi^\alpha\partial_\xi^\beta\mathcal{F}(\varphi)(\xi)$ es la transformada de Fourier de alguna función de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ y por lo mostrado en (A.6)

$$\|\xi^\alpha\partial_\xi^\beta\mathcal{F}(\varphi)\|_0=\|\mathcal{F}(\partial_x^\alpha)x^\beta\varphi\|_0=(2\pi)^n\|x^\beta\varphi\|_{2n+|\alpha|}\leq(8\pi)^n2^{|\alpha|}\beta!\|\varphi\|_{2n+|\alpha+\beta|},$$

es decir, existe una constante C tal que

$$\|\varphi\|_k\leq C\|\varphi\|_{2n+k},$$

esto muestra que $\mathcal{F}(\varphi)\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ y que esta aplicación es continua. (Para mayores detalles sobre estos cálculos se recomienda consultar [30, 32, 36]). Para probar el segundo punto, considere $u\in L^1(\mathbb{R}^n)$, como $\varphi\overline{u}\in L^1(\mathbb{R}^{2n})$ por el Teorema de Fubini y luego de un cambio de variables

$$\begin{aligned}
\int\mathcal{F}(u)(\xi)\overline{\varphi(\xi)}d\xi &= \int\left(\int e^{-ix\cdot\xi}u(x)dx\right)\overline{\varphi(\xi)}d\xi\\
&= \int u(-x)\overline{\left(\int e^{-ix\cdot\xi}\varphi(\xi)d\xi\right)}dx\\
&= \int u_-(x)\overline{\mathcal{F}(\varphi)(x)}dx.
\end{aligned}$$

Para probar el tercer punto y el objeto poder aplicar el Teorema de Fubini considere $\psi(\xi) = e^{-|\xi|^2/2}$, luego

$$\begin{aligned}\int \psi(\epsilon\xi)\mathcal{F}(\varphi)(\xi)e^{ix\cdot\xi}d\xi &= \iint \psi(\epsilon\xi)\varphi(y)e^{i(x-y)\cdot\xi}dyd\xi \\ &= \iint \psi(\zeta)\varphi(x+\epsilon z)e^{-ix\cdot\zeta}dzd\zeta \\ &= \int \mathcal{F}(\varphi)(z)\varphi(x+\epsilon z)dz\end{aligned}$$

Ahora, al hacer $\epsilon \to 0$, por el teorema de la convergencia dominada se tiene

$$\psi(0)\int \mathcal{F}(\varphi)(\xi)e^{ix\cdot\xi}d\xi = \varphi(x)\int \mathcal{F}(\varphi)(z)dz = \varphi(x)\mathcal{F}(\mathcal{F}\varphi)(0)$$

y de acuerdo a lo que se mostró en (A.5) esto es equivalente a

$$\mathcal{F}(\mathcal{F}(\varphi_{-}))(x) = (2\pi)^n\varphi(x).$$

Finalmente, la fórmula de Parseval ahora resulta evidente del punto 2 y del punto 3. $\square$

Corolario A.0.1 *Sea $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, entonces*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2dx = \int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{F}(f)(\xi)|^2d\xi$$

Teorema A.0.3 (Plancherel) *La transformada de Fourier se extiende de manera única a una aplicación unitaria de $L^2(\mathbb{R}^n)$ sobre $L^2(\mathbb{R}^n)$. La transformación inversa se extiende de manera única a su adjunta.*

Demostración: El corolario A.0.1 establece que si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, entonces

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|\mathcal{F}(f)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Por un lado se sabe que el espacio $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ es denso en $L^2(\mathbb{R}^n)$, de esta manera se puede extender de manera única la transformada de Fourier a todo $L^2(\mathbb{R}^n)$ (ver Teorma I.7 de [30]). Por otra parte, como $\mathcal{F}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)) = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, la extensión de la transformada de Fourier sobre $L^2(\mathbb{R}^n)$ será una isometría sobreyectiva. $\square$

A continuación se extiende la definición de la transformada de Fourier al espacio de las distribuciones temperadas $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Definición A.0.6 *Sea $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. La transformada de Fourier de T, que se denotará como $\mathcal{F}T$, es definida como la distribución temperada dada por*

$$(\mathcal{F}T)(f) = T(\mathcal{F}(f)), \qquad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \tag{A.7}$$

Observe que si f y f_n son funciones del espacio $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tales que $f_n \to f$ en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, por la continuidad de la transformada de Fourier en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ se tendrá que $\mathcal{F}(f_n) \to \mathcal{F}(f)$ en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Ahora, para toda $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

$$T(\mathcal{F}(f_n)) \to T(\mathcal{F}(f))$$

y de acuerdo a la Definición A.0.6, esto es equivalente a

$$\mathcal{F}T(f_n) \to \mathcal{F}T(f),$$

por lo tanto $\mathcal{F}T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Teorema A.0.4 *La transformada de Fourier es una biyección lineal de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$*

Demostración: De la definición A.0.6 se ve fácilmente que $\mathcal{F} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ es una aplicación lineal y continua. A continuación mostraremos la sobreyectividad. Para esto considere el operador $A : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ definido por $A(f) = f_-$, donde $f_-(x) = f(-x)$. Es claro que para todo $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $TA \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.
Por otra parte, si $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ y $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, de acuerdo al tercer punto del Lema A.0.2

$$\mathcal{F}^2(T)(f) = \mathcal{F}(T)(\mathcal{F}f) = T(\mathcal{F}^2 f) = TA(f)$$

es decir,

$$\mathcal{F}(\mathcal{F}TA) = T.$$

Esto muestra la sobreyectividad de la transformada de Fourier sobre $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. $\square$

Ejemplo:A continuación se muestra un ejemplo de como actúa la transformada de Fourier sobre la distribución temperada δ_0, recuerde que ésta es una distribución que no proviene de una función. Consideremos $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, luego

$$\begin{aligned}
(\mathcal{F}\delta_0)(f) &= \delta_0(\mathcal{F}f) \\
&= \mathcal{F}f(0) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx \\
&= 1_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)}(f),
\end{aligned}$$

donde $1_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)}$ es la función constante igual a 1. Por lo tanto, $\mathcal{F}\delta = 1$ y esto es equivalente a decir que

$$\mathcal{F}1 = (2\pi)^{-n}\delta_0.$$

Bibliografía

[1] Arendt, W., Batty, C., Hiebber, M., and Neubrander, F. *Vector-Valued Laplace Transforms and Cauchy Problems*. Birkhauser, 2011.

[2] Barnaby, N. A new formulation of the initial value problem for nonlocal theories. *Nuclear Physics B 845* (2011).

[3] Barnaby, N., Biswas, T., and Cline, J. $p-$adic inflation. *J. High Energy Physics Paper 056*, 04 (2007), 35.

[4] Barnaby, N., and Kamran, N. Dynamics with infinitely many derivatives: the initial value problem. *J. High Energy Physics*, 02 (2008), 40 pp.

[5] Barnaby, N., and Kamran, N. Dynamics with infinitely many derivatives: variable coefficient equations. *J.*, 12 (2008), 27 pp.

[6] Bergh, J., and Löfström, J. *Interpolation Spaces. An Introduction*. Springer Verlag, 1976.

[7] Bravo, M. Nonlinear equations of infinite order defined by an elliptic symbol. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences 2014*, Article ID 656959 (2014), 7pp.

[8] Brezis, H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations.* Springer, 2011.

[9] Calcagni, G., Montobbio, M., and Nardelli, G. Route to nonlocal cosmology. *Physical Review D-Particles, Fields, Gravitation ans Cosmology 76*, 12 (2007).

[10] Calcagni, G., Montobbio, M., and Nardelli, G. Localization of nonlocal theories. *Physics Letters, B:Nuclear, Elementary Particle and High-Energy Physics 662*, 3 (2008).

[11] Carbré, X., and Sire, Y. Nonlinear equations for fractional laplacians I: Regularity, maximum principles, and hamiltonian estimates. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 31*, 1 (2014), 23–53.

[12] Conway, J. *A course in functional ana*. Springer, 1997.

[13] DaPrato, G., Kunstmann, P., Lasiecka, I., Lunardi, A., Schnaubelt, R., and Weis, L. *Functional Analytic Methods for Evolution Euations.* Springer, 2004.

[14] Duistermaat, J., and Kolck, J. *Distributions*. Cornerstones, 2010.

[15] Evans, L. *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society., 1998.

[16] Ghoshal, D., and Sen, A. Tachyon condensation and brane descent relations in p-adic string theory. *Nuclear Physics B 584*, 1-2 (2000), 300–312.

[17] Górka, P., Prado, H., and Reyes, E. Functional calculus via laplace transform and equations with infinitely many derivatives. *Journal of Mathematical Physics 51* (2010), 103512.

[18] Górka, P., Prado, H., and Reyes, E. Nonlinear equations with infinitely many derivatives. *Complex Anal. Oper. Theory 5* (2011), 313–323.

[19] Górka, P., Prado, H., and Reyes, E. Generalized euclidean bosonic string equations. vol. 224 of *Oper. Theory Adv. Appl., 224*. Springer Basel AG, 2012, pp. 147–169.

[20] Górka, P., Prado, H., and Reyes, E. The initial value problem for ordinary differential equations with infinitely many derivatives. *Class. Quantum Grav. 29* (2012), 065017.

[21] Górka, P., Prado, H., and Reyes, E. On a general class of nonlocal equations. *Ann. Henri Poincare 14* (2013), 947–966.

[22] Guidetti, D. Vector valued fourier multipliers and applications. *Bruno Pini Math. Anal* (2010).

[23] Haase, M. *The functional calculus for sectorial operators*, vol. 224. Birkhäuser Verlag, 2006.

[24] Hörmander, L. Estimates for translation invariant operators in L_p. *Acta Math. 104* (1960), 93–140.

[25] Hörmander, L. *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I. Distribution Theory and Fourier Analysis*. Springer, Berlin, Germany, 2003.

[26] Hörmander, L. *The Analysis of Linear Partial Differential Operators III. Pseudo DIfferential Operators*. Springer, Berlin, Germany, 2007.

[27] Lions, P.-L. Symétrie et compacité dans les espaces de Sobolev. *Journal of Functional Analysis 49* (1982), 315–334.

[28] Martínez, C., and Sanz, M. *The Theory of Fractional Powers of Operators*. Elsevier, 2001.

[29] Pazy, A. *Semigroups of Linear Operators And Applications to Partial Differential Equations*. pringer Verlag, New York, 1983.

[30] Reed, M., and Simon, B. *Methods of Modern Mathemathical Physics Vol. I: Functional Analysis.* Academic Press., 1980.

[31] Rudin, W. *Real and Complex Analysis*. McGraw-Hill, 1974.

[32] Saint-Raymond, X. *Elementary Introduction to the Theory of Pseudodifferential Operators*. CRC Press, 1991.

[33] Sire, Y., and Valdinoci, E. Fractional laplacian phase transitions and boundary reactions: a geometric inequality and a symmetry result. *J. Funct. Anal. 256*, 6 (2009), 1842–1864.

[34] Stein, E. *Singular Integrals and Differentiabilities Properties of Functions*. Princeton University Press., 1970.

[35] Stein, E., and Weiss, G. *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*. Princeton University Press, 1971.

[36] Strichartz, R. *A Guide to Distribution Theory and Fourier Transforms.* World Scientific, 2003.

[37] Taylor, M. *Partial Differential Equations I. Basic Theory*. Springer, New York, USA, 2010.

[38] Taylor, M. *Partial Differential Equations II. Qualitative Studies of Linear Equations.* Springer, New York, USA, 2010.

[39] Taylor, M. *Partial Differential Equations III. Nonlinear Equations*. Springer, New York, USA, 2010.

[40] Triebel, H. *Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators.* North-Holland Publishing Company, 1978.

[41] Vladimirov, V. The equation pf the p-adic open string for the scalar tachyon field. *Investiya Mathematics 69*, 5 (2005), 487–512.

[42] Vladimirov, V., and Volovich, Y. Nonlinear dynamics equations in p-adic string theory. *Teoreticheskaya i Matematicheskaya Fizika 138* (2004), 355–368.

[43] Vladimirov, V., Volovich, Y., and Zelenov, E. *P-adic Analysis and Mathematical Physics*. Word Scientific, Singapore, 1994.

[44] Wong, M. W. *An Introduction to Pseudo-Differential Operators*. Word Scientific, 1991.

[45] Wong, M. W. M-elliptic pseudo-differential operator on $L^p(\mathbb{R}^n)$. *Math. Nachr 279*, 3 (2006), 319–326.