UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y C.C.

MAPEOS CONVEXOS Y MEDIDAS DE ALEKSANDROV

Por

Rodrigo Vargas

Profesor Guía : Andrés Navas – Universidad de Santiago de Chile.
Martin Chuaqui – Universidad Católica de Chile.

Santiago - Chile
2015

Índice general

Resumen

Se dice que f es una función convexa si mapea conformemente el disco unitario $\mathbb{D}$ sobre una región convexa. Si $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ es una función convexa con las normalizaciones $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, entonces la función

$$g(z) = 1 + z\frac{f''(z)}{f'(z)}$$

tiene parte real positiva en $\mathbb{D}$. Recordando la fórmula de Herglotz, toda función g con parte real positiva puede ser representada como una integral de Poisson-Stieljes

$$g(z) = \int_0^{2\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} d\mu(t)$$

donde $d\mu$ es una medida de Borel positiva y $\int d\mu(t) = 1$. Una consecuencia del Teorema de descomposición de Lebesgue, es que toda medida de Borel μ se puede descomponer de la forma

$$\mu = \mu_{ab} + \mu_s + \mu_\delta$$

donde μ_{ab} es la parte absolutamente continua, μ_s es la parte singular continua y μ_δ es una medida discreta. El objetivo principal de este trabajo es entender la relación entre la descomposición de la medida de Borel en relación con las propiedades geométricas de las imágenes convexas.

En el primer capítulo se exponen las definiciones y resultados necesarios para que una persona con conocimientos básicos en análisis complejo tenga una compresión cabal del trabajo.

En el segundo capítulo probamos una caracterización para que la medida de Borel asociada a un mapeo convexo sea absolutamente continua con respecto a la medida de Borel.

En el capítulo 3 estableceremos la descomposición de Lebesgue para la medida de Borel asociada a mapeos conformes del disco unitario sobre polígonos con una cantidad finita de lados mediante el mapeo de Schwarz-Christoffel. Se establece que la medida en este caso es discreta y tiene masa en cada pre-vértice del polígono. Además, se utilizan generalizaciones de mapeos de Schwarz-Christoffel para obtener la descomposión de sus respectivas medidas. Cabe señalar que existe una caracterización debida a Nevalinna (ver [**23**]) para determinar cuando las medidas de Borel tienen átomos y que empleamos para determinar los puntos masa para las generalizaciones de mapeos de Schwarz-Christoffel.

En el último capítulo estudiamos algunas propiedades en espacios de Hardy para funciones analítica del disco en disco. Se da una demostración alternativa de la desigualdad de Schwarz-Pick utilizando medidas de Borel asociadas a mapeos convexos. Además se determina la dimensión de Hardy para un mapeo convexo sobre un polígono de infinitos lados generalizando un resultado debido a Koepf [**19**]. Por último determinamos cuando las funciones φ que satisfacen la relación

$$\frac{f''(z)}{f'(z)} = \frac{2\varphi(z)}{1 - z\varphi(z)}$$

donde f es una función convexa sobre un dominio que es un polígono de lados curvilíneos son funciones internas.

Capítulo 1

Introducción

1. Medidas de Borel

Definición 1.1.

(i) Una medida de Borel (finita) μ sobre $\partial\mathbb{D}$ es una función que asigna a cada conjunto de Borel $X \subset \partial\mathbb{D}$ un número complejo $\mu(X)$ y que satisface

 (i) $\mu(\varnothing) = 0$,

 (ii) $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(X_n)$,

 donde $(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \partial\mathbb{D}$ es una sucesión de conjuntos de Borel dos a dos disjuntos.

(ii) Diremos que una medida μ es positiva y lo denotaremos por $\mu \geqslant 0$ si $\mu(X) \geqslant 0$ para todo conjunto de Borel $X \subset \partial\mathbb{D}$.

Teorema 1.1 (Teorema de descomposición de Jordan)**.**
Cualquier medida de Borel se puede escribir como

$$\mu = (\mu_1 - \mu_2) + i(\mu_3 - \mu_4)$$

donde cada medida μ_k es una medida positiva para $k = 1, 2, 3, 4$.

Definición 1.2. Para cada medida μ sobre $\partial\mathbb{D}$ definimos la variación total de μ por

$$\|\mu\| = \sup\left\{\sum_{k=1}^{n} |\mu(X_k)| \ : \ \{X_1, \ldots, X_k\} \quad \text{es una partición de} \quad \partial\mathbb{D}\right\}.$$

Es sencillo ver que el conjunto de todas las medidas de Borel sobre $\partial\mathbb{D}$ dotado con la norma de variación total definida arriba es un espacio de Banach.
Al conjunto de todas las medidas de Borel sobre $\partial\mathbb{D}$ lo denotaremos por $M_{\mathbb{D}}$.

Definición 1.3.

(i) Diremos que una medida $\mu \in M_{\mathbb{D}}$ es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue m y escribiremos $\mu \ll m$, si $\mu(X) = 0$ donde X es un conjunto de Borel con $m(X) = 0$.

(ii) Una medida μ es singular con respecto a la medida de Lebesgue y escribiremos $\mu \perp m$, si existen conjuntos de Borel A y B tales que $A \cup B = \partial\mathbb{D}$ y $\mu(A) = m(B) = 0$.

Teorema 1.2 (Teorema de Radon-Nikodym)**.** *Una medida de Borel $\mu \in M_{\mathbb{D}}$ es absolutamente continua con respecto a la medida de Borel m si y sólo si $d\mu = f dm$ para alguna función $f \in L^1$, esto es, si*

$$\mu(E) = \int_E f\, dm\,,$$

para todo conjunto de Borel $E \subset \partial\mathbb{D}$.

Es usual llamar a la función f la derivada de Radon-Nikodym de μ y es denotada por $\dfrac{d\mu}{dm} = f$.

Para cada $\zeta \in \partial\mathbb{D}$ y $\theta > 0$ definimos

$$A(\zeta, \theta) = \{\zeta e^{it} \mid -\theta < t < \theta\}$$

el arco del círculo unitario subextendido entre los puntos $\zeta e^{-i\theta}$ y $\zeta e^{i\theta}$. Si $\mu \in M_{\mathbb{D}}$ es real, definimos para cada $\zeta \in \partial\mathbb{D}$,

$$\begin{aligned}
\triangle_\theta(\zeta) &= \frac{\mu(A(\zeta,\theta))}{m(A(\zeta,\theta))} \\
(\underline{D}\mu)(\zeta) &= \liminf_{\theta\to 0^+} \triangle_\theta(\zeta) \\
(\overline{D}\mu)(\zeta) &= \limsup_{\theta\to 0^+} \triangle_\theta(\zeta)
\end{aligned}$$

Cuando $(\underline{D}\mu)(\zeta) = (\overline{D}\mu)(\zeta)$ decimos que μ es diferenciable en ζ y denotamos este valor por $(D\mu)(\zeta)$. Para una medida compleja $\mu = \mu_1 + i\mu_2$ donde μ_1 y μ_2 son medidas reales, diremos que $(D\mu)(\zeta)$ existe si $(D\mu_1)(\zeta)$ y $(D\mu_2)(\zeta)$ existen.

Teorema 1.3 (Teorema de Diferenciación de Lebesgue)**.** *Para cada $\mu \in M_{\mathbb{D}}$, $(D\mu)(\zeta)$ existe para casi todo punto $\zeta \in \partial\mathbb{D}$ y*

$$(D\mu)(\zeta) = \frac{d\mu}{dm}(\zeta) \qquad\qquad m - c.t.p.$$

Teorema 1.4 (Teorema de Descomposición de Lebesgue)**.** *Cualquier $\mu \in M_{\mathbb{D}}$ se puede descomponer únicamente como*

$$\mu = \mu_a + \mu_s$$

donde $\mu_a, \mu_s \in M_{\mathbb{D}}$ con $\mu_a \ll m$ y $\mu_s \perp m$.

Para una medida positiva $\mu \in M_{\mathbb{D}}$ y $n \in \mathbb{N}$, sea $F_n = \{\zeta \in \partial\mathbb{D} : \mu(\{\zeta\}) > 1/n\}$ y observe que, como μ es una medida finita entonces F_n es un conjunto finito. Notemos que

$$\{\zeta \in \partial\mathbb{D} \,:\, \mu(\{\zeta\}) > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$$

y luego el conjunto de átomos de una medida (esto es, $\zeta \in \partial\mathbb{D}$ para los cuales $\mu(\{\zeta\}) > 0$) es a lo más un conjunto numerable.

Definición 1.4.

(i) Para $\mu \in M_{\mathbb{D}}$, considere la unión $\mathcal{U}$ de todos los subconjuntos abiertos $U \subseteq \partial\mathbb{D}$ para los cuales $\mu(U) = 0$. El conjunto $\partial\mathbb{D} - \mathcal{U}$ es un llamado el soporte de μ.

(ii) Si existe un conjunto de Borel $A \subseteq \partial\mathbb{D}$ para el cual $\mu(A \cap B) = \mu(B)$ para todo conjunto de Borel $B \subseteq \partial\mathbb{D}$ entonces diremos que μ está concentrado en A.

(iii) Diremos que una medida $\mu \in M_{\mathbb{D}}$ es una medida discreta si μ está concentrado en un conjunto que es a loa más numerable.

(iv) Una medida $\mu \in M_D$ es continua si $\mu(\{\zeta\}) = 0$ para todo $\zeta \in \partial\mathbb{D}$.

(v) Para cualquier conjunto $X \subseteq \partial\mathbb{D}$, δ_x, denota la masa puntual en x, que es la medida de probabilidad sobre X concentrada por $\{x\}$. Esto es,

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A\,, \\ 0 & \text{si } x \notin A\,. \end{cases}$$

Ciertamente, el soporte es un concentrado pero un concentrado no necesariamente es un soporte. De hecho, el concentrado no es necesariamente cerrado. Por ejemplo, si f es continua en $\partial\mathbb{D}$ y $d\mu = f dm$ entonces un conjunto concentrado de μ es $\partial\mathbb{D} - f^{-1}(\{0\})$ (el cual es abierto) mientras que el soporte de μ es el cierre de este conjunto.

Con estas definiciones se obtiene un refinamiento del teorema de descomposición de Lebesgue.

Teorema 1.5. *Si* $\mu \in M_{\mathbb{D}}$ *entonces*

$$\mu = \mu_a + \mu_c + \mu_d$$

donde $\mu_a \ll m$, $\mu_c, \mu_d \perp m$, μ_c *es continua y* μ_d *es discreta. Más aún,* μ_a, μ_c, μ_d *son dos a dos singulares.*

Teorema 1.6 (Teorema de Representación de Riesz)**.** *Si* $C(\partial\mathbb{D})$ *es el espacio de Banach de funciones continuas sobre* $\partial\mathbb{D}$ *con la norma del supremo, entonces el dual* $C(\partial\mathbb{D})^*$ *de* $C(\partial\mathbb{D})$ *es isométrico a* M_D *vía*

$$\langle g, \mu \rangle = \int f d\mu \,.$$

Corolario 1.1. *Si*

$$\widehat{\mu}(n) = \int \overline{\zeta}^n d\mu(\zeta), \qquad n \in \mathbb{Z}\,,$$

es el n*-ésimo coeficiente de Fourier de* $\mu \in M_{\mathbb{D}}$*, es igual a cero para todo* $n \in \mathbb{Z}$*, entonces* $\mu \equiv 0$*.*

2. Funciones univalentes

Consideramos las funciones que son analíticas en el disco unidad $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z| < 1\}$. Una función es llamada univalente en un dominio $\Omega \subset \mathbb{C}$ si es inyectiva. El teorema del mapeo de Riemann garantiza la existencia de una función univalente $f : \mathbb{D} \to \Omega$ para cada dominio simplemente conexo Ω distinto de $\mathbb{C}$. Más aún, f está únicamente determinada excepto por la composición con rotaciones $\varphi(z) = e^{i\alpha}z$ de $\mathbb{D}$.

Si $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de dominios simplemente conexos con $a \in \Omega_n$, $n \in \mathbb{N}$, entonces el mayor dominio Ω que contiene a a y que tiene la propiedad que cada subconjunto compacto $K \subset \Omega$ satisface que $K \subset \Omega_n$ para todo n salvo finitos es llamado el kernel de $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En el caso en que un dominio como este no existe entonces el kernel es $\{a\}$. Se dice que la sucesión $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge al kernel Ω, si toda subsucesión de $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene el mismo kernel y escribimos $\Omega_n \to \Omega$. El teorema de convergencia de Carathéodory establece que una sucesión

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones univalentes con $f_n(0) = a$ y $f_n'(0) > 0$ converge localmente uniforme a f, si y sólo si $f_n(\mathbb{D})$ converge a $f(\mathbb{D})$.

Definición 1.5. Sea $\mathcal{S}$ la clase de todas las funciones univalentes (analíticas e inyectivas) en $\mathbb{D}$ con las normalizaciones $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1$.

Si f es cualquier función univalente en $\mathbb{D}$ y $g(z) = (f(z) - f(0))/f'(0)$, entonces $g \in \mathcal{S}$, así el estudio de la clase $\mathcal{S}$ proporciona información acerca de cualquier función univalente en $\mathbb{D}$.
Una función f en la clase $\mathcal{S}$ tiene un desarrollo en serie de potencias de la forma

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots, \quad z \in \mathbb{D}.$$

La clase $\mathcal{S}$ no es cerrada bajo la adición y la multiplicación, sin embargo es invariante o cerrada bajo una de serie de transformaciones:

i) Conjugación:
Si $f \in \mathcal{S}$ entonces $g(z) = \overline{f(\overline{z})} = z + \overline{a_2} z^2 + \ldots + \overline{a_n} z^n + \ldots \in \mathcal{S}$.

ii) Rotación:
Si $f \in \mathcal{S}$ entonces $g(z) = e^{-i\theta} f(e^{i\theta} z) \in \mathcal{S}$.

iii) Dilatación:
Si $f \in \mathcal{S}$ entonces $g(z) = \dfrac{1}{r} f(rz) \in \mathcal{S}$ para todo $0 < r \leq 1$.

iv) Raíz Cuadrada:
Si $f \in \mathcal{S}$ entonces $g(z) = \sqrt{f(z^2)} \in \mathcal{S}$.

v) Valor Omitido:
Si $f \in \mathcal{S}$ y $w \notin f(\mathbb{D})$ entonces $g(z) = \dfrac{w f(z)}{w - f(z)} \in \mathcal{S}$.

vi) Transformación de Koebe:
Si $f \in \mathcal{S}$ para cada $|a| < 1$

$$g(z) = \frac{f\left(\frac{z+a}{1+\overline{a}z}\right) - f(a)}{(1 - |a|^2) f'(a)} \in \mathcal{S}.$$

Un ejemplo importante de una función que pertenece a la clase $\mathcal{S}$ lo constituye la función de Koebe

$$k(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = z + 2z^2 + \ldots + nz^n + \ldots \ ,$$

la cual mapea $\mathbb{D}$ a todo el plano complejo salvo el segmento cerrado del eje real comprendido entre $-\infty$ a $-1/4$, y juega un papel extremal en la clase $\mathcal{S}$.

Por ejemplo, Bieberbach probó que si $f \in \mathcal{S}$ con $f(z) = z + a_2 z + \ldots + a_n z^n + \ldots$ entonces $|a_2| \leq 2$ y si hay igualdad entonces f es una rotación de la función de Koebe. Una consecuencia de esta desigualdad es el Teorema $\frac{1}{4}$ de Koebe, que establece que toda $f \in \mathcal{S}$ cubre al menos un disco en torno al origen de radio $1/4$ y si además no cubre ningún disco de radio mayor entonces f es una rotación de la función de Koebe. Otra consecuencia de la desigualdad $|a_2| \leq 2$ es el siguiente teorema de distorsión.

Teorema 1.7. *Si $f \in \mathcal{S}$ entonces*

$$\left| \frac{f''}{f'}(z) - \frac{2\overline{z}}{1-|z|^2} \right| \leq \frac{4}{1-|z|^2} \ . \tag{1.1}$$

Usando este teorema es posible deducir el teorema de distorsión de Koebe.

Teorema 1.8. *Si $f \in \mathcal{S}$ entonces*

$$\frac{1-|z|}{(1+|z|)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1+|z|}{(1-|z|)^3}. \tag{1.2}$$

Si hay igualdad para algún $z_0 \neq 0$ en alguna de las desigualdades entonces f es una rotación de la función de Koebe.

Mediante una apropiada integración de la desigualdad (1.2) se obtiene el teorema de crecimiento de Koebe.

Teorema 1.9. *Si $f \in \mathcal{S}$ entonces*

$$\frac{|z|}{(1+|z|)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{|z|}{(1-|z|)^2}. \tag{1.3}$$

Si hay igualdad para algún $z_0 \neq 0$ en alguna de las desigualdades entonces f es una rotación de la función de Koebe.

Las demostraciones de estos teoremas y otros resultados de funciones univalentes pueden ser hallados en el libro de Peter Duren [**11**].

Algunas condiciones necesarias y otras suficientes para la univalencia de una función analítica y localmente inyectiva en $\mathbb{D}$ dependen del tamaño de la derivada Schwarziana. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función analítica y localmente univalente. Se define la derivada Schwarziana de f por

$$Sf(z) = \left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)^2 = \frac{f'''(z)}{f'(z)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)^2.$$

La Schwarziana es invariante bajo composición por la izquierda con transformaciones de Möbius

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \qquad ad-bc=1, \tag{1.4}$$

es decir, $S(T \circ f) = Sf$. Esto es un caso particular de la regla de composición para la Schwarziana. Si f es cualquier función analítica y localmente univalente en el rango de g, entonces

$$S(f \circ g) = (Sf \circ g)(g')^2 + Sg.$$

Por consiguiente si f es una transformación de Möbius entonces $Sf = 0$. Es posible demostrar que para cualquier f localmente univalente se tiene que

$$\frac{d^2}{dz^2} f'(z)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} f'(z)^{-\frac{1}{2}} Sf(z).$$

Esto sugiere que existe una relación entre la Schwarziana y ecuaciones diferenciales de segundo orden. En efecto, si $Sf = 2p$ y $u = (f')^{-1/2}$ entonces

$$u'' + pu = 0. \tag{1.5}$$

Recíprocamente, si u_1, u_2 son soluciones linealmente independientes de (1.5) y $f = u_1/u_2$ entonces $Sf = 2p$. Debido a que la derivada Schwarziana es invariante bajo composición por la izquierda con transformaciones de Möbius la solución f no es única. Se sigue que si f y g son funciones analíticas en $\mathbb{D}$ y $Sf = Sg$, entonces existe una transformación de Möbis T tal que $g = T \circ f$. El siguiente resultado es la caracterización fundamental de univalencia en términos de la Schwarziana

Teorema 1.10. *Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función analítica y localmente univalente. Entonces la función f es univalente en Ω si y sólo si toda solución no trivial de $u'' + (Sf/2)u = 0$ se anula en Ω a lo más una vez.*

El siguiente teorema fue demostrado en 1949 por Nehari.

Teorema 1.11. *Si $f \in \mathcal{S}$ entonces*

$$|Sf(z)| \leq \frac{6}{(1-|z|^2)^2}. \tag{1.6}$$

Recíprocamente, si $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ es analítica y localmente univalente tal que

$$|Sf(z)| \leq \frac{2}{(1-|z|^2)^2}, \tag{1.7}$$

entonces $f \in \mathcal{S}$.

Una subclase de la clase $\mathcal{S}$ lo constituyen las funciones convexas $\mathcal{C}$.

Definición 1.6. Se dice que f es una función convexa si mapea conformemente el disco unitario $\mathbb{D}$ sobre una región convexa.

Recordemos el importante Lema de Schwarz

Teorema 1.12. *Si $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ es analítica con $f(0) = 0$ entonces $|f'(0)| \leqslant 1$ y $|f(z)| \leqslant |z|$ para todo $z \in \mathbb{D}$. Ambas desigualdades son estrictas, a menos que f sea una rotación del disco unitario.*

Parte de la conclusión es que f es una rotación, o bien f acerca cada $z \in \mathbb{D} - \{0\}$ al origen más de lo que inicialmente estaba. Es posible obtener muchas variantes del Lema de Schwarz, como el lema de Schwarz-Pick que establece que

$$\frac{|f'(z)|}{1-|f(z)|^2} \leqslant \frac{1}{1-|z|^2}$$

para cada $z \in \mathbb{D}$ y para toda función analítica que satisface las hipótesis del Lema de Schwarz. En el capítulo 4 daremos una demostración del lema de Schwarz-Pick apelando a una desigualdad triangular.

Definición 1.7. *Sean $f, g : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ analíticas. Decimos que f está subordinada a g, y escribiremos $f \prec g$, si existe una función* *analítica (no necesariamente univalente)* $\omega : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ *con* $\omega(0) = 0$ *tal que*

$$f(z) = g(\omega(z))$$

para todo $z \in \mathbb{D}$.

Si $f \prec g$, como $\varphi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ y $\varphi(0) = 0$ se sigue que $f(\mathbb{D}) \subset g(\mathbb{D})$ y $f(0) = g(0)$. Por el Lema de Schwarz, para todo $r \in]0,1[$ se cumple que

$$\{f(z) \ : \ |z| < r\} \subset \{g(z) \ : \ |z| < r\}$$

y se sigue que $\max\limits_{|z|\leqslant r} |f(z)| \leqslant \max\limits_{|z|\leqslant r} |g(z)|$.

Definición 1.8. *Denotamos por* $\mathcal{P}$ *la clase de funciones* $g : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ *con* $g(0) = 1$ *y* $Re\{g(z)\} > 0$ *para todo* $z \in \mathbb{D}$.

El siguiente teorema relaciona las funciones de la clase $\mathcal{C}$ con funciones en la clase $\mathcal{P}$.

Teorema 1.13. *Sea* $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ *analítica con* $f(0) = 0$ *y* $f'(0) = 1$. *Entonces, se tiene que* $f \in \mathcal{C}$ *si y sólo si la función*

$$g(z) = 1 + z\frac{f''(z)}{f'(z)} \in \mathcal{P} \ .$$

Para la demostración de este último teorema véase, por ejemplo [6].

Se sigue que si f mapea el disco conformemente sobre una región convexa, entonces $g(z) = 1 + zf''(z)/f'(z)$ está en la clase $\mathcal{P}$ entonces está subordinada al mapeo del plano superior $\ell(z) = \dfrac{1+z}{1-z}$, luego existe $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ analítica con $\omega(0) = 0$ tal que $g(z) = \ell(\omega(z))$ para alguna función ω que satisface las hipótesis del Lema de Schwarz. En otras palabras,

$$\frac{zf''(z)}{f'(z)} = \frac{1+\omega(z)}{1-\omega(z)} - 1 = \frac{2\omega(z)}{1-\omega(z)} \ ,$$

donde ω es analítica y tiene la propiedad $|\omega(z)| \leqslant |z|$ en $\mathbb{D}$. Con la notación $\varphi(z) = \omega(z)/z$, nos da la representación

$$\frac{f''(z)}{f'(z)} = \frac{2\varphi(z)}{1 - z\varphi(z)} \tag{1.8}$$

para la pre-Schwarziana, donde φ es analítica y satisface $|\varphi(z)| \leqslant 1$ en $\mathbb{D}$.

Recordando la fórmula de Herglotz, toda función p con parte real positiva puede ser representada como una integral de Poisson-Stieljes

Teorema 1.14. *Si $g : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ analítica con $g(0) = 1$. Entonces, se cumple que $g \in \mathcal{P}$ si y sólo si existe una medida positiva $\mu \in M_{\mathbb{D}}$ tal que*

$$g(z) = \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} d\mu(\zeta) \tag{1.9}$$

con $\displaystyle\int_{\partial\mathbb{D}} d\mu(\zeta) = 1$.

Sea $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ analítica con $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1$. Entonces,

$$\begin{aligned} f \in \mathcal{C} &\Longleftrightarrow g(z) = 1 + z\frac{f''(z)}{f'(z)} \in \mathcal{P} \\ &\Longleftrightarrow \text{Existe una medida positiva } \mu \in M_{\mathbb{D}} \text{ tal que} \\ &\qquad g(z) = \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{\xi + z}{\xi - z} d\mu(\xi) \quad \text{con} \quad \int_{\partial\mathbb{D}} d\mu(\xi) = 1\,. \end{aligned} \tag{1.10}$$

3. Espacios de Hardy

Para una función f analítica en el disco unitario $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ del plano complejo $\mathbb{C}$ y $0 < r < 1$ considere

$$\begin{aligned} M_p(r, f) &= \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta\right)^{1/p}, \quad 0 < p < \infty\,, \\ M_\infty(r, f) &= \max_{|z|=r} |f(re^{i\theta})|\,. \end{aligned}$$

Estas cantidades, usualmente llamados integral media de orden p cuando $0 < p < \infty$, expresan diferentes formas de medir el crecimiento de la función cerca del borde de $\mathbb{D}$. La acotación uniforme de estas cantidades para $0 < r < 1$ da lugar a los conocidos espacios de Hardy H^p (véase, por ejemplo, en [5]). Más explícitamente, para $0 < p \leqslant \infty$ el espacio de Hardy H^p consiste de todas las funciones f analíticas en $\mathbb{D}$ para la cuales

$$\|f\|_{H^p} := \sup_{0<r<1} M_p(r, f) < \infty\,.$$

Definición 1.9. *(i) Una función exterior para la clase H^p es una función de la forma*

$$F(z) = e^{i\gamma} \exp\left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} \log \psi(t)\, dt \right\} ,$$

donde $\gamma \in \mathbb{R}$, $\psi(t) \geqslant 0$, $\log \psi(t) \in L^1$ y $\psi(t) \in L^p$.

(ii) Una función interna es cualquier función $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ que tiene la propiedad que $|f(e^{i\theta})| = 1$ c.t.p.

El teorema de Factorización de Riesz garantiza que toda función interna tiene la factorización $e^{i\gamma}B(z)S(z)$, donde $B(z)$ es un producto de Blaschke y

$$S(z) = \exp\left\{ - \int_0^{2\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} d\nu(t) \right\}$$

donde ν es una medida no negativa singular con respecto a la medida de Lebesgue. Ver [5] para una descripción completa de estas funciones y sus propiedades.

El Teorema de Riesz se puede refinar obteniendo el clásico teorema de factorización canónica

Teorema 1.15. *Toda función $f \in H^p$ $(p > 0)$ no idénticamente cero tiene una única factorización de la forma*

$$f(z) = B(z)S(z)F(z) , \tag{1.11}$$

donde $B(z)$ es un producto de Blaschke, $S(z)$ es una función interna singular, y $F(z)$ es una función exterior para la clase H^p.

Específicamente, si $\{a_n\}$ son los ceros de f en $\mathbb{D} - \{0\}$ con $0 < |a_n| < 1$, asumiendo que $\sum(1 - |a_n|) < \infty$, la función definida por

$$B(z) = cz^k \prod \frac{|a_n|}{a_n} \frac{a_n - z}{1 - \overline{a_n} z}$$

es un producto de Blaschke, donde c es una constante de modulo uno y k es el orden del cero de f en el origen.

El teorema de subordinación de Littlewood establece que si $f \prec g$ entonces $M_p(r, f) \leqslant M_p(r, g)$ para todo $p \in]0, \infty]$ y $r \in [0, 1]$.

Existen algunos criterios geométricos para que una función pertenezca a la clase H^p. Si el rango de una función analítica f está contenido en un sector angular α $(0 < \alpha \leqslant 2\pi)$, entonces se sigue del teorema de subordinación de Littlewood que $f \in H^p$ para todo $p < \pi/\alpha$ (ver [5], página 13). Como la función de Koebe tiene rango en todo $\mathbb{C}$ salvo el segmento cerrado del eje real comprendido entre $-\infty$ a $-1/4$, tenemos que en el caso en que la función f pertenezca a la clase $\mathcal{S}$ entonces $f \in H^p$ para $p < 1/2$. Por lo tanto, f posee una factorización de la forma (1.11) y se sabe que en este caso su factor singular es $S(z) \equiv 1$.

Un resultado bien conocido en espacios de Hardy es el siguiente teorema que tiene una demostración sencilla usando el teorema de subordinación de Littlewood

Teorema 1.16. *Si $f \in \mathcal{P}$, entonces $f \in H^p$ para todo $0 < p < 1$.*

Demostración. Tenemos que f está subordinada a la función $\ell(z) = \dfrac{1+z}{1-z}$. Se sigue del teorema de subordinación de Littlewood que

$$\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta \leqslant \int_0^{2\pi} |\ell(re^{i\theta})|^p d\theta < \infty$$

para cualquier $p \in]0,1[$. $\square$

Para $f \in H^p$ el límite radial

$$f(e^{i\theta}) = \lim_{r \to 1} f(re^{i\theta})$$

existe para casi todo $\theta \in [0, 2\pi]$ y está en $L^p(\partial\mathbb{D})$ y

$$M_p(1,f) = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^p d\theta \right)^{1/p} = \lim_{r \to 1} M_p(r,f) \, .$$

Toda función que tiene su derivada en H^1 es continua es continua en $\overline{\mathbb{D}}$ y absolutamente continua en $\partial\mathbb{D}$. En particular, $f' \in H^1$ implica que $f \in H^\infty$. Este último resultado tiene una interesante generalización debida a Hardy y Littlewood

Teorema 1.17. *Si $f' \in H^p$ para algún $p < 1$, entonces $f \in H^q$, donde $q = p/(1-p)$. Para cada valor de p, el índice q es óptimo.*

El recíproco de este teorema es falso y además si $f \in S$ mapea $\mathbb{D}$ sobre algún dominio de Jordan acotado, entonces

$$f' \in H^1 \Longleftrightarrow \partial f(\mathbb{D}) \text{ es rectificable}\,.$$

4. Funciones con borde rotacional acotado

Definición 1.10. *Diremos que β es una función regular sobre el intervalo $[a,b]$ si existen los límites laterales*

$$\beta(t-) = \lim_{s\to t-} \beta(s) \qquad y \quad \beta(t+) = \lim_{s\to t+} \beta(s)$$

para $a \leqslant t \leqslant b$.

La función β es regular si y sólo si se puede aproximar uniformemente por funciones escalón, esto es, si para todo $\varepsilon > 0$ existe $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ y constantes $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ tales que

$$|\beta(t) - \gamma_k| < \varepsilon \qquad \text{para} \quad t_{k-1} < t < t_k\,,\;\; k = 1, 2, \ldots, n\,.$$

Tenemos $\beta(t+) = \beta(t-)$ excepto para posiblemente un número contable t.

En lo que sigue, asumiremos que Ω es un dominio de Jordan y que f mapea $\mathbb{D}$ conformemente sobre Ω, luego f se puede extender como un homeomorfismo de $\overline{\mathbb{D}}$ sobre $\overline{\Omega}$. Usaremos la parametrización conforme

$$\Gamma = \partial\Omega \;:\; w(t) = f(e^{it})\,, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi\,,$$

esta curva puede tener muchos puntos múltiples y puede pasar a través de ∞.

Presentamos tres definiciones ligeramente modificadas a partir de [**24**], que a nosotros respecta, con dominios de Jordan.

Definición 1.11. *Diremos que $\partial\Omega$ tiene una esquina de abertura $\alpha\pi$, $(0 \leqslant \alpha \leqslant 2)$ en $f(e^{i\zeta}) \neq \infty$, $(\zeta \in [0, 2\pi])$ si*

$$\arg[f(e^{it}) - h(e^{i\zeta})] \to \begin{cases} \beta & \textit{cuando } t \to \zeta+\,, \\ \\ \beta + \alpha\pi & \textit{cuando } t \to \zeta-\,\,. \end{cases}$$

Decimos también que $\partial\Omega$ tiene una semi-tangente hacia adelante de ángulo β y una semi-tangente hacia atrás de ángulo $\beta + \alpha\pi$ en este caso. Una esquina en ∞ podemos definirla por medio de una inversión. Decimos que $\partial\Omega$ tiene una esquina de abertura $\alpha\pi$ en ∞ si la imagen de Ω bajo $w \mapsto \frac{1}{w}$ tiene una esquina de abertura $\alpha\pi$ en 0. Semi-tangentes en ∞ son definidas de manera análoga.

Definición 1.12. *Un dominio de Jordan Ω es llamado un dominio regular si*

$$\beta(t) = \begin{cases} \lim\limits_{s\to t+} \arg(w(s) - w(t)) & \text{para } w(t) \neq \infty \\ \\ \lim\limits_{s\to t+} \arg(w(s)) + \pi & \text{para } w(t) = \infty \end{cases}$$

existe para todo t y define una función regular.

El límite $\beta(t)$ es la dirección del ángulo de la tangente hacia adelante de Γ en $w(t)$. Luego un dominio es regular si está acotada por una curva Γ con tangentes regulares. Como β es continua excepto para un número numerable de saltos se sigue que Γ tiene una tangente excepto para al menos un número contable de cúspides o esquinas.

Si $w(t) \neq \infty$ es una esquina determinamos el argumento por $\beta(t+) - \beta(t-) = \pi(1 - \alpha)$, si $w(t) = \infty$ definimos $\beta(t+) - \beta(t-) = \pi(1 + \alpha)$.

Definición 1.13. *Un dominio regular Ω es de borde rotacional acotado si $\beta(t)$ tiene variación acotada, es decir si*

$$\int_0^{2\pi} |d\beta(t)| = \sup \sum_{k=1}^{n} |\beta(t_k) - \beta(t_{k-1})| < \infty$$

donde el supremo es tomada sobre todas las particiones $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 2\pi$.

Teorema 1.18 (Paatero)**.** *Si f mapea $\mathbb{D}$ conformemente sobre un dominio Ω de borde rotacional acotado, entonces*

$$\log h'(z) = \log h'(0) - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \log(1 - e^{-it}z)\, d\beta(t)$$

para todo $z \in \mathbb{D}$.

Esta es una integral de Stieltjes y el brazo del logaritmo está determinado tal que $|\arg(1-e^{-it}z)| < \frac{\pi}{2}$ para $z \in \mathbb{D}$.

Toda función de variación acotada se puede escribir como

$$\beta = \beta_{salto} + \beta_{sing} + \beta_{abs}$$

donde β_{salto} es constante excepto por una cantidad numerable de saltos, β_{sing} es continua y $\beta'_{sing} = 0$ para casi todo t, y β_{abs} es absolutamente continua, es decir, la integral indefinida de su derivada.

Ahora vamos a considerar el caso en que hay solo un número finito de saltos y que $\beta_{sing} = 0$.

Corolario 1.2. *Si β es absolutamente continua excepto por los saltos $\pi\sigma_k$ en t_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ entonces*

$$f'(z) = f'(0)\prod_{k=1}^{n}(1-e^{-it_k}z)^{-\sigma_k}e^{h(z)}. \tag{1.12}$$

donde $h(z) = -\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\log(1-e^{-it}z)\beta'(t)dt.$

Esta es la generalización de la fórmula de Schwarz-Christoffel.

Todo dominio convexo es regular y más aún de borde rotacional acotado. El ángulo $\beta(t)$ de la semi-tangente hacia adelante es creciente y satisface $\beta(2\pi) - \beta(0) = 2\pi$ en otras palabras $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\beta'(t)dt = 1$. Se sigue del Teorema de Paatero que, si f es convexa, entonces

$$z\frac{f''(z)}{f'(z)} = 1 + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{2e^{-it}z}{1-e^{-it}z}\,d\beta(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\,d\beta(t) \tag{1.13}$$

para $z \in \mathbb{D}$. Como $d\beta(t) \geqslant 0$ concluimos que

$$\operatorname{Re}\left\{1 + z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right\} > 0 \tag{1.14}$$

para $z \in \mathbb{D}$. Recíprocamente, si $f'(z) \neq 0$ y (1.14) se satisface entonces f es convexa y (1.13) se satisface.

5. Límites no-tangenciales y derivada angular

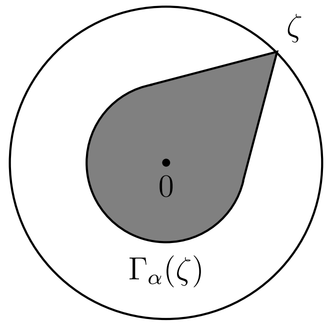
Para una función analítica f sobre $\mathbb{D}$ y $\zeta \in \partial\mathbb{D}$, decimos que f tiene un límite radial K en ζ, si

$$\lim_{r\to 1} f(r\zeta) = L\,.$$

Para $\zeta \in \partial\mathbb{D}$ y $\alpha > 1$, sea

$$\Gamma_\alpha(\zeta) = \{z \in \mathbb{D} \,:\, |z - \zeta| < \alpha(1 - |z|)\}$$

una región de aproximación no tangencial, llamado región de Stoltz. Note que $\Gamma_\alpha(\zeta)$ es una región triangular con un vértice en ζ.



Definición 1.14. *Decimos que f tiene un límite no-tangencial A en ζ, y escribimos*

$$\angle \lim_{z\to\zeta} f(z) = A\,,$$

si $f(z) \to A$ cuando $z \to \zeta$ dentro de cualquier región de aproximación no-tangencial $\Gamma_\alpha(\zeta)$.

Vamos a mencionar algunos resultados conocidos sobre límites no-tangenciales (una discusión sobre estos conceptos se puede hallar en [**23**])

Teorema 1.19 (Fatou)**.** *Si f es una función analítica acotada sobre $\mathbb{D}$, entonces el límite no-tangencial de f existe y es finito para casi todo $\zeta \in \partial\mathbb{D}$.*

Para funciones analíticas acotadas, la existencia del límite radial implica la existencia del límite no-tangencial.

Teorema 1.20 (Lindelöf)**.** *Si f es una función analítica acotada sobre $\mathbb{D}$ y $f(z) \to A$ cuando $z \to \zeta$ a lo largo de algún arco situado en $\mathbb{D}$ y que termina en $\zeta \in \partial\mathbb{D}$, entonces*

$$\angle \lim_{z\to\zeta} f(z) = A\,.$$

Definición 1.15. *Para una función analítica $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ y un punto $\zeta \in \partial\mathbb{D}$, decimos que φ tiene una derivada angular en $\zeta \in \partial\mathbb{D}$ si para algún $\eta \in \partial\mathbb{D}$,*

$$\angle \lim_{z\to\zeta} \frac{\varphi(z) - \eta}{z - \zeta}$$

existe y es finito. Denotamos el límite de arriba, cuando existe, por $\varphi'(\zeta)$.

Note que la existencia de la derivada angular implica que

$$\angle \lim_{z\to\zeta} \varphi(z) = \eta$$

y que $|\eta| = 1$. El siguiente resultado es la clave para la comprensión de la derivada angular. Una demostración de este teorema puede ser hallada en [**2**].

Teorema 1.21 (Julia-Carathéodory)**.** *Para una función analítica $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ y $\zeta \in \partial\mathbb{D}$ las siguientes afirmaciones son equivalentes*

(i)

$$\liminf_{z\to\zeta} \frac{1 - |\varphi(z)|}{1 - |z|} = \delta < \infty \,,$$

(ii)

$$\angle \lim_{z\to\zeta} \frac{\varphi(z) - \eta}{z - \zeta} = \varphi'(\zeta)$$

existe para algún $\eta \in \partial\mathbb{D}$,

(iii)

$$\angle \lim_{z\to\zeta} \varphi'(z)$$

existe y

$$\angle \lim_{z\to\zeta} \varphi(z) = \eta \in \partial\mathbb{D}\,.$$

Más aún,

1. $\delta > 0$ en (i).

2. Los puntos η en (ii) y (iii) son los mismos.

3. $\varphi'(\zeta) = \overline{\zeta}\eta\delta$ y

$$\angle \lim_{z\to\zeta} \varphi'(z) = \varphi'(\zeta)\,.$$

4. Si cualquiera de las condiciones de arriba se cumple, entonces

$$\delta = \angle \lim_{z\to\zeta} \frac{1 - |\varphi(z)|}{1 - |z|}\,.$$

6. Integrales de Poisson

Definición 1.16. *Definimos el kernel de Poisson*

$$P_z(\zeta) = Re\left\{\frac{\zeta + z}{\zeta - z}\right\} = \frac{1 - |z|^2}{|\zeta - z|^2}\,, \quad \zeta \in \partial\mathbb{D}\,, \quad z \in \mathbb{D}$$

y la kernel conjugado de Poisson

$$Q_z(\zeta) = Im\left\{\frac{\zeta + z}{\zeta - z}\right\} = \frac{2Im\{\overline{\zeta}z\}}{|\zeta - z|^2}\,, \quad \zeta \in \partial\mathbb{D}\,, \quad z \in \mathbb{D}$$

Para $\zeta \in \partial\mathbb{D}$ fijo, las funciones $z \mapsto P_z(\zeta)$ y $z \mapsto Q_z(\zeta)$ son armónicas sobre $\mathbb{D}$ y para $\mu \in M_{\mathbb{D}}$, la integral de Poisson

$$(P\mu)(z) := \int_{\partial\mathbb{D}} P_z(\zeta)d\mu(\zeta)$$

y la integral conjugada de Poisson

$$(Q\mu)(z) := \int_{\partial\mathbb{D}} Q_z(\zeta)d\mu(\zeta)$$

son armónicas en $\mathbb{D}$. Relacionado con estos kernel se encuentra el kernel de Herglotz

$$H_z(\zeta) = \frac{\zeta + z}{\zeta - z} = P_z(\zeta) + iQ_z(\zeta)$$

el cual es una función analítica sobre $\mathbb{D}$ con $\mathrm{Re}\{H_z(\zeta)\} = P_z(\zeta) > 0$ y luego la integral de Herglotz

$$(H\mu)(z) = \int_{\partial\mathbb{D}} H_z(\zeta)d\mu(\zeta)$$

es analítica en $\mathbb{D}$ y tiene parte real positiva para toda $\mu \in M_{\mathbb{D}}$.

Algunos hechos estándar sobre integrales de Poisson pueden ser hallados en texto de Hoffman [**15**] y un resultado importante que utilizaremos es el Teorema de Fatou

Teorema 1.22 (Fatou). *Si $\mu \in M_{\mathbb{D}}$ y $(D\mu)(\zeta)$ existe, entonces*

$$\lim_{r\to 1^-}(P\mu)(r\zeta) = (D\mu)(\zeta)\,.$$

A continuación daremos algunos resultados técnicos que son cuidadosamente elaborados en [**25**]

Proposición 1.1. Para $\mu \in M_{\mathbb{D}}$ positiva se cumple

(i) $\underline{D}\mu = \overline{D}\mu$ c.t.p (m)

(ii) Para cada $\xi \in \partial\mathbb{D}$,

$$(\underline{D}\mu)(\xi) \leqslant \liminf_{r\to 1}(P\mu)(r\xi) \leqslant \limsup_{r\to 1}(P\mu)(r\xi) \leqslant (\overline{D}\mu)(\xi)\,.$$

(iii) Si $\mu = \mu_a + \mu_s$, donde $\mu_a \ll m$ y $\mu_s \perp m$, es la descomposición de Lebesgue entonces $D\mu_s = 0$ y $D\mu_a = D\mu$ c.t.p (m).

(iv) μ_s está concentrado en $\{\underline{D}\mu = \infty\}$.

(v) μ_a está concentrado en $\{0 < \underline{D}\mu < \infty\}$.

Observación 1.1. Por el teorema de diferenciación de Lebesgue, $D\mu = \dfrac{d\mu}{dm}$ en casi todo punto y luego el límite radial de la integral de Poisson es igual a la derivada de Radon-Nikodyn en casi todo punto.

Observación 1.2. Si $\mu \perp m$, o equivalentemente, $D\mu = \dfrac{d\mu}{dm} = 0$ en casi todo punto, entonces el límite en el teorema es cero.

Observación 1.3. El límite radial en el teorema de Fatou se puede reemplazar por un límite no-tangencial, es decir,

$$\angle \lim_{z\to\zeta}(P\mu)(z) = (D\mu)(\zeta)$$

cuando $(D\mu)(\zeta)$ exista.

7. Medidas de Aleksandrov

Definición 1.17. *Para una función analítica $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ y un punto $\alpha \in \partial\mathbb{D}$, la función*

$$u_\alpha(z) = Re\left\{\frac{\alpha + \varphi(z)}{\alpha - \varphi(z)}\right\} = \frac{1 - |\varphi(z)|^2}{|\alpha - \phi(z)|^2}$$

es una función armónica positiva sobre $\mathbb{D}$. Por el Teorema de Herglotz, $u_\alpha = P\mu_\alpha$ para alguna medida $\mu_\alpha \in M_{\mathbb{D}}$. Definimos la familia

$$\mathcal{A}_\varphi = \{\mu_\alpha \mid \alpha \in \partial\mathbb{D}\}$$

como las medidas de Aleksandrov asociadas con φ.

Si μ es cualquier medida en $M_{\mathbb{D}}$, la transformada de Herglotz de μ

$$g(z) = \int\limits_{\partial\mathbb{D}} \frac{\zeta + z}{\zeta - z}\, d\mu(\zeta)\,,$$

satisface Re $\{g(z)\} > 0$. Como g está subordinada al mapeo del plano superior $\ell(z) = (1+z)/(1-z)$, existe $\omega : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ analítica con $\omega(0) = 0$ tal que

$$g(z) = \frac{1+\omega(z)}{1-\omega(z)}$$

y luego

$$(P\mu)(z) = \mathrm{Re}\,\{g(z)\} = \frac{1-|\omega(z)|^2}{|1-\omega(z)|^2}\,.$$

Luego μ es una medida de Aleksandrov para ω, esto es, $\mu = \mu_1 \in \mathcal{A}_\varphi$.

Definición 1.18. Diremos que $\mu \in M_{\mathbb{D}}$ es la medida de Aleksandrov asociada a f si se satisface (1.10).

En adelante, salvo que se diga lo contrario, cada vez que se haga mención de las funciones f, g y la medida $\mu \in M_{\mathbb{D}}$ supondremos que satisfacen la relación dada en (1.10).

Definición 1.19. *Para $\mu_\alpha \in \mathcal{A}_\varphi$, sea*

$$d\mu_\alpha = \psi dm + d\sigma\,, \quad \psi \in L^1\,, \quad \sigma \perp m\,,$$

la descomposición de Lebesgue de μ_α con respecto a m.

Observe que por el teorema de diferenciación de Lebesgue $\psi = D\mu_\alpha$ en casi todo punto.

Proposición 1.2. *Para casi todo $\zeta \in \partial\mathbb{D}$,*

$$\psi(\zeta) = \frac{1-|\varphi(\zeta)|^2}{|\alpha-\varphi(\zeta)|^2}\,.$$

Demostración. Usando el teorema de Fatou, vemos que para casi todo $\zeta \in \partial\mathbb{D}$

$$\begin{aligned}\psi(\zeta) &= (D\mu_\alpha)(\zeta)\\ &= \lim_{r\to 1^-}(P\mu_\alpha)(r\zeta)\\ &= \lim_{r\to 1^-}\frac{1-|\varphi(r\zeta)|^2}{|\alpha-\varphi(\zeta)|^2}\\ &= \frac{1-|\varphi(\zeta)|^2}{|\alpha-\varphi(\zeta)|^2}\end{aligned}$$

□

Usando este hecho, vemos que $(D\nu)(\zeta) = 0$ en casi todo punto implica que $\nu \perp m$, y obtenemos el siguiente corolario

Corolario 1.3. *Si φ es una función interna, entonces $\mu_\alpha \perp m$ para alguna $\mu_\alpha \in \mathcal{A}_\varphi$.*

Los átomos de las medidas de Aleksandrov están relacionados con las derivadas angulares de la función φ. Una discusión de este concepto se puede ver en [**23**] donde, en particular se puede encontrar el siguiente teorema debido a Nevanlinna, que utilizaremos en el capítulo 3, cuya demostración incluimos.

Teorema 1.23 (Nevanlinna)**.** *Si $\mu_\alpha \in \mathcal{A}_\varphi$ y $\zeta \in \partial\mathbb{D}$, entonces $\mu_\alpha(\{\zeta\}) > 0$ si y sólo si*

$$\angle \lim_{z\to\zeta} \varphi(z) = \alpha \quad y \quad |\varphi'(\zeta)| < \infty\,.$$

Más aún, en este caso,

$$\mu_\alpha(\{\zeta\}) = \frac{1}{|\varphi'(\zeta)|}\,.$$

Demostración. Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $\varphi(0) = 0$. Primero observe que

$$\frac{\alpha + \varphi(z)}{\alpha - \varphi(z)} = \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{\xi + z}{\xi - z} d\mu_\alpha(\xi)\,.$$

Para $\xi \in \partial\mathbb{D}$ fijo, multiplicamos a ambos lados en la igualdad de arriba por $(\zeta - z)$ y obtenemos

$$(\alpha + \varphi(z)) \cdot \frac{(\zeta - z)}{\alpha - \varphi(z)} = \int_{\partial\mathbb{D}} (\xi + z)\frac{\zeta - z)}{(\xi - z)} d\mu_\alpha(\xi)\,.$$

Notemos que para cualquier $\xi \in \partial\mathbb{D}$ y cualquier z en un dominio de Stolz fijo con vértice en ζ

$$\left|\frac{\zeta - z}{\xi - z}\right| \leqslant \frac{|\zeta - z|}{1 - |z|} \leqslant c$$

para algún $c > 0$ que depende sólo de la abertura de el dominio de Stolz. Como

$$\angle \lim_{z\to\zeta}(\xi+z)\frac{\zeta-z}{\xi-z} = \begin{cases} 2\zeta & \text{si } \xi=\zeta \\ \\ 0 & \text{si } \xi\neq\zeta \end{cases}$$

podemos aplicar el teorema de convergencia dominada de Lebesgue para obtener

$$\angle \lim_{z\to\zeta}\int_{\partial\mathbb{D}}(\xi+z)\frac{\zeta-z}{\xi-z}d\mu_\alpha(\xi) = 2\zeta\mu_\alpha(\{\zeta\})\,.$$

Se sigue que

$$\angle \lim_{z\to\zeta}(\alpha+\varphi(z))\frac{\zeta-z}{\alpha-\varphi(z)} = 2\zeta\mu_\alpha(\{\zeta\})\,. \tag{1.15}$$

Ahora bien, si $\mu_\alpha(\{\zeta\})>0$ por la ecuación (1.15) vemos que

$$\angle \lim_{z\to\zeta}\varphi(z)=\alpha$$

y luego

$$\varphi'(z) = \angle \lim_{z\to\zeta}\frac{\varphi(z)-\alpha}{z-\zeta} = \frac{\alpha\overline{\zeta}}{\mu_\alpha(\{\zeta\})}\,.$$

Por lo que $|\varphi'(\zeta)|<\infty$. Recíprocamente, si $|\varphi'(\zeta)|<\infty$, vemos por el teorema de Julia-Carathéodory que $\varphi'(\zeta)\neq 0$. Si asumimos que

$$\angle \lim_{z\to\zeta}\varphi(z)=\alpha$$

vemos por (1.15) que

$$0\neq\frac{1}{\varphi'(\zeta)} = \overline{\alpha}\zeta\mu_\alpha(\{\zeta\})\,.$$

$\square$

Capítulo 2

Medidas de Aleksandrov absolutamente continuas

1. Introducción

Resulta natural preguntar bajo que condiciones es posible obtener las distintas descomposiciones de la medida de Aleksandrov asociadas a mapeos convexos del disco. En este sentido es algún interés decidir para que tipo de suavidad en el borde del disco son típicos de la parte absolutamente continua y singular continua con respecto a la medida de Lebesgue. En este capítulo estableceremos una condición necesaria y suficiente para que la medida de Aleksandrov μ asociada a un mapeo convexo f sea absolutamente continua.

Existe un resultado parcial debido a Koepf [**19**] para determinar cuando aparece la parte absolutamente continua de la medida bajo una hipótesis de regularidad en el borde para el caso en que f es una función de borde rotacional acotado.

El borde rotacional de un polígono es el cambio total de la dirección tangente cuando es recorrida el borde del polígono una vez y podemos calcularlo como la suma de los valores absolutos de los ángulos exteriores

$$\mathrm{br}\,(P) = \sum_{k=1}^{n} 2|\alpha_k|\pi\ .$$

El borde rotacional de un mapeo de Schwarz-Christoffel es definido como el borde rotacional de la imagen del polígono. Una función f tiene borde rotacional $K\pi$, si se puede aproximar por mapeos de Schwarz-Christoffel con respecto a la convergencia local uniforme, es decir, si

$$\frac{f''(z)}{f'(z)} = 2\int\limits_{\partial\mathbb{D}} \frac{d\mu(\zeta)}{\zeta - z} \tag{2.1}$$

donde μ es una medida sobre $\partial\mathbb{D}$ con las propiedades

$$\int_{\partial\mathbb{D}} d\mu(x) = 1$$

y

$$\mathrm{br}\,(f) = 2\pi \int_{\partial\mathbb{D}} |d\mu(\zeta)| = K\pi\ .$$

Denotaremos por $V(K)$ la familia de funciones de borde rotacional a lo más $K\pi$ que son normalizadas por $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1$. El teorema de Koepf establece lo siguiente

Teorema 2.1 (Koepf)**.** *Sea $f \in V(K)$ con $f(\mathbb{D}) = \Omega$ tal que $\partial\Omega$ es analítica excepto por un número numerable de puntos donde $\partial\Omega$ tiene una dirección tangente. Entonces, la medida μ asociada a f por la relación (2.1) es absolutamente continua.*

El resultado anterior es una condición necesaria, pero no suficiente para que la medida sea absolutamente continua. La condición de regularidad geométrica parece insuficiente para obtener una caracterización. Otro aspecto interesante sería clasificar las partes singulares de la medida de Aleksandrov que no son puntos masa, sin embargo, este problema parece ser muy complejo y no se dispone de ningún resultado realmente relevante significativo en esta dirección.

2. Preliminares

Comenzaremos estableciendo algunos elementos provenientes del análisis funcional para funciones pertenecientes a L^p y para sucesiones de medidas de Borel

Proposición 2.1. *Si $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de medidas de Borel definidas en $\partial\mathbb{D}$ que converge a μ débil-$*$ entonces*

$$\sup_n \|\mu_n\| < \infty$$

y

$$\|\mu\| \leqslant \liminf_{n\to\infty} \|\mu_n\|\ .$$

Demostración. Por el Principio de Acotación Uniforme, sabemos que

$$\sup_n \|\mu_n\| < \infty\,.$$

Sea $L = \liminf_{n\to\infty} \|\mu_n\|$ y elegimos una subsucesión $(\mu_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} \|\mu_{n_k}\| = L\,.$$

Dado $\varepsilon > 0$, existe $K \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|\mu_{n_k}\| \leqslant L + \varepsilon \qquad \forall\, k \geqslant K\,.$$

Como

$$\|\mu\| = \sup\left\{\left|\int g d\mu\right| \,:\, g \in B(C(\partial\mathbb{D}))\right\}$$

entonces existe $g \in B(C(\partial\mathbb{D}))$ tal que

$$\|\mu\| - \varepsilon < \left|\int g d\mu\right|\,.$$

Por la convergencia débil-$*$, podemos asumir, sin pérdida de generalidad que

$$\|\mu\| - \varepsilon < \left|\int g d\mu_{n_k}\right| \qquad \forall\, k \geqslant K\,.$$

Por otro lado, como $g \in B(C(\partial\mathbb{D}))$, tenemos que

$$\left|\int g d\mu_{n_k}\right| \leqslant \|\mu_{n_k}\|$$

y luego para todo $k \leqslant K$, se tiene $\|\mu\| - \varepsilon \leqslant \|\mu_{n_k}\| \leqslant L + \varepsilon$. $\square$

Proposición 2.2. *Suponga que $p > 1$ y $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones en L^p con $\|g_n\|_p \leqslant C$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Si $g_n \to g$ para casi todo punto cuando $n \to \infty$, entonces $g \in L^p$ y $g_n \to g$ débil cuando $n \to \infty$.*

Demostración. Por el Lema de Fatou

$$\int\limits_{\partial\mathbb{D}} |g|^p dm = \int\limits_{\partial\mathbb{D}} \liminf_{n\to\infty} |g_n|^p dm \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int\limits_{\partial\mathbb{D}} |g_n|^p dm \leqslant C^p < \infty$$

y luego $h \in L^p$.

Por otro lado, dado $\varepsilon > 0$ y $g \in L^q$ con $1/p + 1/q = 1$, entonces existe

$\delta > 0$ tal que para cualquier conjunto medible $A \subseteq \partial\mathbb{D}$ con $m(A) < \delta$ se cumple que

$$\left(\int\limits_A |g|^q dm \right)^{1/q} < \varepsilon \,.$$

Por el Teorema de Egorov, existe un conjunto $E \subseteq \partial\mathbb{D}$ con $m(\partial\mathbb{D} - E) < \delta$ tal que $h_n \to h$ uniformemente sobre E. Entonces, tenemos que

$$\begin{aligned} \left| \int\limits_{\partial\mathbb{D}} (h_n - h) g dm \right| &\leqslant \left| \int\limits_E (h_n - h) g dm \right| + \left| \int\limits_{\partial\mathbb{D}-E} (h_n - h) g dm \right| \\ &\leqslant \left| \int\limits_E (h_n - h) g dm \right| + \|g_n - h\|_p \left(\int\limits_{\partial\mathbb{D}-E} |g|^q \right)^{1/q} \\ &\leqslant \left| \int\limits_E (h_n - h) g dm \right| + (C + \|h\|_q)\varepsilon \,. \end{aligned}$$

La última integral converge a cero como $h_n \to h$ uniformemente sobre E. Por lo que, hemos obtenido que

$$\limsup_{n\to\infty} \left| \int\limits_{\partial\mathbb{D}} (h_n - h) g dm \right| \leqslant (C + \|h\|_p)\varepsilon$$

y como ε es arbitrario, el resultado se sigue. □

3. Espacios de Hardy y clase $\mathcal{P}$

Por una técnica estándar se puede obtener explícitamente una cota para $\|f\|_{H^p}$ cuando f está en la clase $\mathcal{P}$.

Proposición 2.3. *Si* $f \in \mathcal{P}$ *entonces para* $0 < r < 1$ *y* $0 < p < 1$ *se tiene que*

$$\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta \leqslant A_p$$

donde

$$A_p = O\left(\frac{1}{1-p} \right), \qquad p \to 1^- \,.$$

Demostración. Si $f \in P$ entonces $f(z) = |f(z)|e^{i\alpha}$ con $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Como f no tiene ceros en el disco, la función $g(z) = f(z)^p$ es analítica en $\mathbb{D}$ y

$$g(z) = |f(z)|^p(\cos(p\alpha) + i\,\mathrm{sen}(p\alpha))\,.$$

Para $0 < p < 1$ se tiene que

$$\mathrm{Re}\,\{g(z)\} = |f(z)|^p\cos(p\alpha) \geqslant |f(z)|^p\cos\left(\frac{p\pi}{2}\right)\,.$$

Se sigue que

$$\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta \leqslant A_p \int_0^{2\pi} \mathrm{Re}\,\{g(z)\}d\theta = A_p\mathrm{Re}\,\{g(0)\} = A_p$$

en donde hemos usado el hecho que la función $\mathrm{Re}\,\{g(z)\}$ es armónica.

$\square$

Observación 2.1. Note que $A_p = \dfrac{1}{\cos(p\pi/2)} = O\left(\dfrac{1}{1-p}\right)$, $p \to 1^-$.

Definición 2.1. *Para $0 < p < 1$ definimos la función G_p sobre $\mathbb{C}$ dada por*

$$G_p(z) = \begin{cases} |z|^p\cos(p\theta(z)) & si\, z \neq 0\,, \\ 0 & si\, z = 0\,. \end{cases}$$

donde

$$\theta(z) = \begin{cases} \arctan(y/|x|) & x \neq 0\,, \\ \pi/2 & x = 0\,,\ y > 0\,, \\ -\pi/2 & x = 0\,,\ y < 0\,. \end{cases}$$

Note que $|\theta(z)| \leqslant \pi/2$ y que $G_p \geqslant 0$.
El siguiente lema puede hallarse en [**15**]

Lema 2.1. *La función G_p es subarmónica sobre $\mathbb{C}$.*

El siguiente teorema puede encontrarse en [**5**] incluimos la demostración

Teorema 2.2. *Suponga que $f \in H^p$ para todo $0 < p < 1$, $f(0) \in \mathbb{R}$, Re $\{f(\zeta)\} = 0$ en m-casi todo punto $\zeta \in \partial\mathbb{D}$ y*

$$\liminf_{p \to 1^-} (1-p)\|f\|_p^p < \infty\,. \tag{2.2}$$

Entonces

$$f(z) = \int\limits_{\partial\mathbb{D}} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} d\mu(\zeta)$$

para alguna medida $\mu \in M_{\mathbb{D}}$ *que satisface*

$$\|\mu\| \leqslant \frac{\pi}{2} \liminf_{p \to 1^-} (1-p) \|f\|_p^p \,.$$

Demostración. Para $q \in (1, 1/p)$ y $r \in (0,1)$ se tiene que

$$\begin{aligned} \int\limits_{\partial\mathbb{D}} (G_p \circ f) f(r\zeta)^q dm(\zeta) &= \int\limits_{\partial\mathbb{D}} |f(r\zeta)|^{pq} (\cos(p\theta(f(r\zeta))))^q dm(\zeta) \\ &\leqslant \int\limits_{\partial\mathbb{D}} |f(r\zeta)|^p q dm(\zeta) \\ &= \|f\|_{pq}^{pq} \end{aligned}$$

la cual es finita como $0 < pq < 1$. Luego la función $G_p \circ f$ es subarmónica sobre $\mathbb{D}$ con integral media uniformemente acotada en L^q. Por la desigualdad de Hölder, esta integral media está uniformemente acotada en L^1. Por el lema 1 la función que a cada número complejo a le asigna

$$\lim_{r \to 1^-} \int\limits_{\partial\mathbb{D}} P_a(\zeta)(G_p \circ f)(r\zeta) dm(\zeta)$$

es por lo menos una mayorante armónica para $G_p \circ f$. Entonces para todo $a \in \mathbb{D}$, se tiene

$$(G_p \circ f)(a) \leqslant \lim_{r \to 1^-} \int\limits_{\partial\mathbb{D}} P_a(\zeta)(G_p \circ f)(r\zeta) dm(\zeta)\,.$$

Como $\lim_{r \to 1^-} f(r\zeta) = f(\zeta)$ en casi todo punto y G_p es continua obtenemos que $\lim_{r \to 1^-} (G_p \circ f)(r\zeta) = (G_p \circ f)(\zeta)$ en casi todo punto. Esto, junto con la cota uniforme de la integral media de $(G_p \circ f)$ en L^q, usando la proposición 1, vemos que $(G_p \circ f)(r\zeta) \to G_p \circ f$ débil en L^q. Luego,

$$\begin{aligned} (G_p \circ f)(a) &\leqslant \int\limits_{\partial\mathbb{D}} P_a(\zeta)(G_p \circ f)(\zeta) dm(\zeta) \\ &= \int\limits_{\partial\mathbb{D}} P_a(\zeta)|f(\zeta)|^p \cos\left(\frac{p\pi}{2}\right) dm(\zeta), \quad a \in \mathbb{D}\,. \end{aligned}$$

Note que en la integral de arriba, hemos utilizado el hecho que $\mathrm{Re}\{f(\zeta)\} = 0$ y luego $\arg f(\zeta) = \pm\frac{\pi}{2}$. Ahora bien, como $\cos(p\pi/2) \cong (1-p)$, podemos usar la hipótesis (2.2) y observar que

$$\liminf_{p\to 1^-} \int\limits_{\partial\mathbb{D}} |f(\zeta)|^p \cos\left(\frac{p\pi}{2}\right) dm(\zeta) < \infty\,.$$

Esto último significa que para alguna sucesión p_n que converge a 1, la medida

$$d\nu_{p_n} = |f|^{p_n} \cos\left(\frac{p_n\pi}{2}\right) dm$$

satisface

$$\lim_{n\to\infty} \|\nu_{p_n}\| = \liminf_{p\to 1^-} \int\limits_{\partial\mathbb{D}} |f(\zeta)|^p \cos\left(\frac{p\pi}{2}\right) dm(\zeta) \tag{2.3}$$

Como estas medidas son uniformemente acotadas en norma de variación total, ellas tienen un punto de acumulación $d\nu$ débil-$*$. Además, de la definición de G_{p_n} vemos que

$$0 \leqslant \lim_{n\to\infty} (G_{p_n} \circ f)(a) = |f(a)| \cos(\arg f(a)) = \mathrm{Re}\,\{f(a)\}\,.$$

De la estimación

$$0 \leqslant (G_{p_n} \circ f)(a) \leqslant \int\limits_{\partial\mathbb{D}} P_a(\zeta)|f(\zeta)|^{p_n} \cos\left(\frac{p_n\pi}{2}\right) dm(\zeta)\,,$$

a partir de la convergencia débil-$*$ que

$$0 \leqslant \mathrm{Re}\,\{f(a)\} \leqslant \int\limits_{\partial\mathbb{D}} P_a(\zeta) d\nu(\zeta)\,. \tag{2.4}$$

Más aún,

$$\begin{aligned}
\|\nu\| &= \lim_{n\to\infty} \|\nu_{p_n}\| \\
&= \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\partial\mathbb{D}} |f(\zeta)|^{p_n} \cos\left(\frac{p_n\pi}{2}\right) dm(\zeta) \\
&\leqslant \liminf_{p\to 1^-} \int\limits_{\partial\mathbb{D}} |f(\zeta)|^p \cos\left(\frac{p\pi}{2}\right) dm(\zeta) \\
&= \liminf_{n\to\infty} \frac{\cos(p\pi/2)}{1-p}(1-p)\|f\|_p^p \\
&= \frac{\pi}{2} \liminf_{n\to\infty} (1-p)\|f\|_p^p\,.
\end{aligned}$$

Por la ecuación (2.4), $\operatorname{Re}\{f\}$ es una función armónica positiva que es mayorada por una integral de Poisson de medida positiva. Luego la sucesión de medidas positivas

$$\{\operatorname{Re}\{f(r_n\zeta)\}dm(\zeta)\ :\ r_n \to 1\} \tag{2.5}$$

satisface

$$\begin{aligned} \|\operatorname{Re}\{f(r_n\zeta)dm(\zeta)\| &= \int_{\partial\mathbb{D}} \operatorname{Re}\{f(r_n\zeta)dm(\zeta) \\ &\leqslant \int_{\partial\mathbb{D}}\int_{\partial\mathbb{D}} P_{r_n\zeta}(w)d\nu(w)dm(v) = \|\nu\| \end{aligned}$$

y luego es uniformemente acotada en r. Tomando $d\mu$ como el punto de acumulación débil-$*$ de la sucesión definida en (2.5) concluimos que

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\{f(a)\} &= \liminf_{r\to 1^-} \operatorname{Re}\{f(ra)\} \\ &= \lim_{r\to 1^-} \int_{\partial\mathbb{D}} \operatorname{Re}\{f(r\zeta)\}P_a(\zeta)dm(\zeta) \\ &= \int_{\partial\mathbb{D}} P_a(\zeta)d\mu(z)\,. \end{aligned}$$

Además, por la proposición 1 tenemos que

$$\begin{aligned} \|\mu\| &\leqslant \liminf_{n\to\infty} \|\operatorname{Re}\{f(r_n\zeta)dm(\zeta)\| \\ &\leqslant \|\nu\| \\ &\leqslant \frac{\pi}{2}\liminf_{p\to 1^-}(1-p)\|f\|_p^p \end{aligned}$$

Como $f(0) \in \mathbb{R}$ la conjugada armónica de $\operatorname{Re}\{f\}$ es

$$\operatorname{Im}\{f(a)\} = \int_{\partial\mathbb{D}} Q_a(\zeta)d\mu(\zeta)$$

y luego

$$f(a) = \operatorname{Re}\{f(a)\} + i\operatorname{Im}\{f(a)\} = \int_{\partial\mathbb{D}} (P_a(\zeta) + iQ_a(z))d\mu(\zeta) = \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{\zeta+z}{\zeta-z}d\mu(\zeta).$$

$\square$

4. Resultado

Antes de dar el resultado necesitamos un lema previo que demostraremos usando un conocido teorema de Smirnov [**29**] (ver también [**11**]): Si $\mu \in M_{\mathbb{D}}$ entonces

$$\|K\mu\| \leq c_p \|\mu\|$$

donde $K(\mu)(z) = \int\limits_{\partial\mathbb{D}} \frac{1}{1-\overline{\xi}z} d\mu(\xi)$ es la transformada de Cauchy y además $c_p = O((1-p)^{-1})$. Observe que el núcleo de Herglotz está relacionado con el núcleo de la transformada de Cauchy mediante la relación

$$\frac{\xi+z}{\xi-z} = \frac{2}{1-\overline{\xi}z} - 1 = 2\sum_{n=0}^{\infty}(\overline{\xi}z)^n - 1$$

Lema 2.2. *Si $\mu \ll m$ entonces*

$$\liminf_{p\to 1^-}(1-p)\|H\mu\|_p^p = 0\ .$$

Demostración. Por el teorema de Radon-Nikodym existe $\psi \in L^1$ tal que $d\mu = \psi dm$. Dado $\varepsilon > 0$, consideremos una aproximación de Cesàro polinomial

$$p(\xi) = \sum_{n=-N}^{N} a_n \xi^n\ , \qquad \xi \in \partial\mathbb{D}\ ,$$

tal que $\|\psi - p\|_1 < \varepsilon$ donde $a_n = \int\limits_{\partial\mathbb{D}} \overline{\xi}^n p(\xi) d\xi$ es el n-ésimo coeficiente de Fourier de pdm. Observe que

$$\begin{aligned}
H(pdm)(z) &= \int\limits_{\partial\mathbb{D}} \frac{\xi+z}{\xi-z} p(\xi) d\xi \\
&= 2\sum_{n=0}^{\infty} z^n \int\limits_{pd} \overline{\xi}^n p(\xi) d\xi + C_0 \\
&= 2\sum_{n=0}^{\infty} z^n \sum_{k=-N}^{N} a_k \int\limits_{\partial\mathbb{D}} \xi^{k-n} d\xi + C_0 \\
&= 2\sum_{n=0}^{N} a_n z^n + C_0\ .
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\|H(pdm)\|_p^p &\leqslant \left\|\sum_{n=0}^{N} a_n z^n\right\|_p^p + C_1 \\
&\leqslant \left\|\sum_{n=0}^{N} a_n z^n\right\|_2^p + C_1 \\
&= \left(\sum_{n=0}^{N} |a_n|^2\right)^{p/2} + C_1 \\
&\leqslant \|p\|_2^p + C_1 \\
&\leqslant \|p\|_\infty^p + C_1
\end{aligned}$$

y se sigue que

$$\|H(pdm)\|_p^p = o\left(\frac{1}{1-p}\right), \qquad p \to 1^- .$$

Usando el teorema de Smirnov, obtenemos que

$$\begin{aligned}
\|H(pdm) - H(\psi dm)\|_p^p &\leqslant C\frac{1}{1-p}\|pdm - \psi dm\|^p \\
&= C\frac{1}{1-p}\|p - \psi\|_1^p \\
&\leqslant C\frac{1}{1-p}\varepsilon^p .
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(1-p)\|H(\psi dm)\|_p^p \leqslant o(1) + Ce^p$ y haciendo $\varepsilon \to 0$ se obtiene el resultado. $\square$

Utilizando el teorema anterior encontramos una condición necesaria y suficiente para que la medida μ asociada a un mapeo convexo sea absolutamente continua

Teorema 2.3. *Sea $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ analítica con $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1$. Entonces $\mu \ll m$ donde μ es la medida de Aleksandrov asociada a f si y sólo si Re $\{g\} \in L^1(\partial\mathbb{D})$.*

Demostración. Considere la función

$$h(z) = \int\limits_{\partial\mathbb{D}} \frac{\zeta + z}{\zeta - z}\mathrm{Re}\,\{g(\zeta)\}dm(\zeta) .$$

entonces h es una función analítica en $\mathbb{D}$ con $\operatorname{Re}\{h(z)\} \geqslant 0$ y por el lema 2.2 se tiene que

$$\liminf_{p\to 1^-}(1-p)\|h\|_p^p = 0\,.$$

y se sigue que

$$\liminf_{p\to 1^-}(1-p)\|g-h\|_p^p \leqslant \liminf_{p\to 1^-}(1-p)\|g\|_p^p = 0\,.$$

Por el teorema de Fatou

$$\operatorname{Re}\{h(\zeta)\} = \lim_{r\to 1^-}\int\limits_{\partial\mathbb{D}} P_{r\zeta}(\xi)\operatorname{Re}\{g(\xi)\}dm(\xi) = \operatorname{Re}\{g(\zeta)\}$$

para todo $\zeta \in \partial\mathbb{D}$ (m-casi todo punto). Por el Teorema anterior, el análisis realizado a la función $g-h$ nos permite asegurar que

$$g(z)-h(z) = \int\limits_{\partial\mathbb{D}} \frac{\zeta+z}{\zeta-z}d\sigma(\zeta)$$

para una medida σ que es un punto de acumulación débil-$*$ de la medida $\operatorname{Re}\{g(r\zeta)-h(r\zeta))\}dm$. Por el teorema de Herglotz tenemos que

$$g(z) = \int\limits_{\partial\mathbb{D}} \frac{\zeta+z}{\zeta-z}d\mu(\zeta)$$

de donde $d\mu = \operatorname{Re}\{g\}dm + d\sigma$ y observe que la medida σ satisface

$$\|\sigma\| \leqslant \frac{\pi}{2}\liminf_{p\to 1^-}(p-1)\|g-h\|_p^p = 0$$

y por lo tanto $d\mu = \operatorname{Re}\{g\}dm$. Recíprocamente si $\mu \ll m$ entonces por el teorema de Radon-Nikodym $d\mu = \psi dm$ para alguna función $\psi \in L^1$ y para $\zeta \in \partial\mathbb{D}$ tenemos que

$$\operatorname{Re}\{g(\zeta)\} = \operatorname{Re}\left\{\frac{1+\omega(\zeta)}{1-\omega(\zeta)}\right\} = \frac{1-|\omega(\zeta)|^2}{|1-\omega(\zeta)|^2} = \psi(\zeta)$$

la última igualdad se debe a la proposición 1.2 del capítulo 1, por lo tanto $\operatorname{Re}\{g\} \in L^1(\partial\mathbb{D})$. □

Observación 2.2. Las funciones con borde rotacional según lo presentado en la sección 1 están caracterizadas por la relación (2.1), puesto que está representación también es satisfacida por las aplicaciones convexas se tiene que el teorema de Koepf también es válido para funciones convexas. De hecho, los procedimientos realizados en la demostración del teorema en esta sección utilizan solo el hecho que las funciones estén en la clase $\mathcal{P}$, por esta razón el teorema se generaliza de forma natural para funciones con borde rotacional a lo mas $K\pi$.

Capítulo 3

Mapeos convexos a Polígonos

En este capítulo estableceremos la descomposición de Lebesgue para la medida de Aleksandrov asociada a mapeos conformes del disco unitario sobre polígonos con una cantidad finita de lados mediante el mapeo de Schwarz-Christoffel y estableceremos generalizaciones de estos mapeos para obtener la descomposión de sus respectivas medidas.

El punto de partida para establecer estos resultados se encuentra en [**6**] en donde se revisa la relación entre mapeos convexos y productos de Blaschke. La observación crucial es que los mapeos convexos corresponden exactamente a soluciones de

$$\frac{f''(z)}{f'(z)} = \frac{2\varphi(z)}{1 - z\varphi(z)}$$

para alguna función φ analítica en $\mathbb{D}$ y acotada por 1. El resultado es el siguiente

Teorema 3.1 (Chuaqui, Duren, Osgood)**.** *La imagen de $f(\mathbb{D})$ es el interior de un polígono de n lados si y sólo si φ es un producto de Blaschke finito de grado $n+1$.*

En la sección 3 estableceremos una generalización de este resultado para un polígono de infinitos lados, lo cual nos permitirá obtener una caracterización de las medidas con puntos masas en cada vértice.

1. Poligonos convexos

Si $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ una función analítica en $\overline{\partial\mathbb{D}}$ cuya imagen $\Omega = F(\mathbb{D})$ es un dominio cuyo borde consiste de un número finito de arcos lineales, tal que la correspondencia en el borde $\partial\mathbb{D} \to \partial\Omega$ es uno a uno, entonces decimos que Ω es un poligono. Sea Ω un polígono con n vértices de ángulos internos $\alpha_k\pi$, $k = 1, 2, \ldots, n$. En el caso en que f no es univalente, los ángulos internos pueden satisfacer $\alpha_k > 2$, en el caso en que

f sea univalente entonces necesariamente $\alpha_k \leqslant 2$, para $k = 1, 2, \ldots, n$.

Si tenemos un vértice acotado entonces $\alpha_k > 0$. Si el vértice está en el infinito la medida del ángulo sobre la esfera de Riemann es $\alpha_k \geqslant 0$, donde $\alpha_k = 0$ ocurre cuando el borde de Ω corresponde a dos rayos paralelos.

Sean f es una función convexa que mapea el disco unitario en el interior de un polígono convexo de n-lados y z_k los prevértices, es decir, las preimagenes bajo f de los vértices $f(z_k)$ del polígono. Entonces la fórmula de Schwarz-Christoffel establece que

$$f'(z) = C \prod_{k=1}^{n} (z - z_k)^{-2\beta_k} \,, \tag{3.1}$$

donde $C \in \mathbb{C}$ es una constante y

$$2\beta_k \pi = \begin{cases} (1-\alpha_k)\pi & \text{si } f(z_k) \text{ está acotado} \\ \\ (1+\alpha_k)\pi & \text{si } f(z_k) \text{ es no acotado} \end{cases}$$

denota los ángulos exteriores con $-1 < \beta_k < 1$ y

$$\sum_{k=1}^{n} \beta_k = 1 \,. \tag{3.2}$$

Observe que el polígono es convexo si y sólo si $\beta_k > 0$.

Por otro lado, si f satisface la relación (3.1) y (3.2) con $z_k \in \partial\mathbb{D}$ para $k = 1, 2, \ldots, n$ entonces la imagen $f(\mathbb{D})$ es un polígono.

El siguiente teorema describe la descomposición de Lebesgue para la medida de Aleksandrov asociada a un mapeo conforme del disco unitario sobre un polígono de n-lados.

Teorema 3.2. Sea $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ analítica con $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1$. Entonces, $\Omega = f(\mathbb{D})$ es un polígono convexo de n-lados si y sólo si la medida de Aleksandrov μ asociado a f es discreta

$$\mu(\xi) = \sum_{k=1}^{n} \beta_k \delta_{z_k}(\xi) \,, \tag{3.3}$$

donde $z_k \in \partial\mathbb{D}$, $k = 1, 2, \ldots, n$ son las preimagenes de los vértices del polígono y $\sum_{k=1}^{n} \beta_k = 1$.

Demostración. Si $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ es un mapeo a un polígono convexo de n-lados, por la fórmula de Schwarz-Christoffel

$$\frac{f''(z)}{f'(z)} = -2\sum_{k=1}^{n} \frac{\beta_k}{z - z_k} \,.$$

Se sigue de la representación de Herglotz que

$$\begin{aligned}\int_{\partial\mathbb{D}} \frac{\xi + z}{\xi - z} d\mu(\xi) &= 1 + z\frac{f''(z)}{f'(z)} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{2z\beta_k}{z_k - z} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \beta_k + \sum_{k=1}^{n} \frac{2z\beta_k}{z_k - z} = \sum_{k=1}^{n} \beta_k \left(\frac{z_k + z}{z_k - z} \right)\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\int_{\partial\mathbb{D}} \frac{\xi + z}{\xi - z} d\mu(\xi) = \sum_{k=1}^{n} \beta_k \left(\frac{z_k + z}{z_k - z} \right) . \tag{3.4}$$

Tomando parte real en (3.4) obtenemos que

$$\int_{\partial\mathbb{D}} \frac{1 - |z|^2}{|\xi - z|^2} d\mu(\xi) = \sum_{k=1}^{n} \beta_k \frac{1 - |z|^2}{|z_k - z|^2} \,.$$

Sea $z = rt$, $0 < r < 1$, $|t| = 1$ entonces

$$\int_{\partial\mathbb{D}} \frac{1 - r^2}{|\xi - rt|^2} d\mu(\xi) = \sum_{k=1}^{n} \beta_k \frac{1 - r^2}{|z_k - rt|^2} \,.$$

Cuando $z_k \neq t$ tenemos por el Teorema de Fatou que

$$\begin{aligned}(D\mu)(t) &= \lim_{r\to 1^-} (P\mu)(rt) = \lim_{r\to 1^-} \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{1 - r^2}{|\xi - rt|^2} d\mu(\xi) \\ &= \lim_{r\to 1^-} \sum_{k=1}^{n} \beta_k \frac{1 - r^2}{|z_k - rt|^2} = 0 \,.\end{aligned}$$

Por la proposición 1.1, esto dice que μ no tiene masa sobre $\partial\mathbb{D} - \{t : t \neq z_k \, , \, k = 1, 2, \ldots, n\}$ donde los puntos z_j son las preimagenes de los vértices del polígono de n-lados. El análisis de arriba nos dice que

$$\mu = \sum_{k=1}^{n} \beta_k \delta_{z_k} .$$

Recíprocamente, si la medida de Aleksandrov μ asociada a f es de la forma (3.3) entonces

$$z\frac{f''(z)}{f'(z)} = \frac{2z\varphi(z)}{1 - z\varphi(z)} = 2\int\limits_{\partial\mathbb{D}} \frac{z}{\xi - z} d\mu(\xi) = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{z\beta_k}{z_k - z} = 2r(z)$$

donde $z_k \in \partial\mathbb{D}$ y $\sum \beta_k = 1$. En particular, φ es una función racional analítica en el disco unitario, dada por

$$z\varphi(z) = \frac{r(z)}{1 + r(z)} . \tag{3.5}$$

Como Re $\{r(z)\} = -\frac{1}{2}$ para cada $z \in \partial\mathbb{D}$ con $z \neq z_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, lo cual implica que $|h(z)| = 1$. Los puntos z_k son polos de $r(z)$ y luego $|\varphi(z_k)| = 1$ por (3.18). Luego, $|h(z)| \equiv 1$ sobre $\partial\mathbb{D}$ y h es un producto de Blaschke por Teorema 1 en [**6**] f es un mapeo convexo a un polígono de n-lados. $\square$

Si $p(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k \in \mathcal{P}$ entonces $|c_n| \leqslant 2$ para cada $n = 1, 2, \ldots$ y la igualdad ocurre si y sólo si

$$p(z) = \sum_{k=1}^{m} \beta_k \frac{e^{i\alpha + 2\pi ik/m} + z}{e^{i\alpha + 2\pi ik/m} - z} \tag{3.6}$$

para alguna constante α y $\beta_1, \ldots, \beta_m \geqslant 0$ con $\sum \beta_k = 1$. En otras palabras, las funciones extremales para la clase $\mathcal{P}$ lo constituyen funciones p que están asociadas a una función f convexa que mapean el disco sobre un polígono de de m-lados y tal como vimos en el Teorema anterior la medida de Aleksandrov $\mu \in M_{\mathbb{D}}$ asociada a f es una medida discreta con masa en las preimagenes del los vértices del polígono.

2. Polígonos curvilíneos

Si Ω es un dominio de Jordan y f mapea $\mathbb{D}$ conformemente sobre Ω, entonces podemos utilizar la parametrización conforme

$$\Gamma = \partial\Omega \ : \ w(t) = f(e^{it}) \, , \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi \, .$$

Supongamos que $\beta(t)$, la dirección del ángulo de la tangente hacia adelante de Γ en $w(t)$, es de variación acotada. Entonces la función β se puede escribir como

$$\beta = \beta_{salto} + \beta_{sing} + \beta_{abs}$$

donde β_{salto} es constante excepto por una cantidad numerable de saltos, β_{sing} es continua y $\beta'_{sing} = 0$ para casi todo t, y β_{abs} es absolutamente continua, es decir, la integral indefinida de su derivada.

En el caso en que hay solo un número finito de saltos y que $\beta_{sing} = 0$, se tiene por la fórmula de Schwarz-Christoffel generalizada

$$f'(z) = f'(0)\prod_{k=1}^{n}(1 - e^{-it_k}z)^{-2\beta_k}e^{\varphi(z)} \tag{3.7}$$

donde $\varphi(z) = -\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\log(1 - e^{-it}z)\beta'(t)\,dt$ y $z_k = e^{it_k} \in \partial\mathbb{D}$ son las pre-imagenes de los vértices, con $0 < \beta_k < 1$. Observe que, si el dominio Ω está acotado por segmentos lineales entonces $\beta'(t) = 0$ excepto en los vértices y se obtiene la fórmula de Schwarz-Christoffel clásica.

Geométricamente las transformaciones f que satisfacen (3.7) mapean $\mathbb{D}$ sobre el interior de un dominio acotado por los pre-vértices en los puntos $z_k = e^{it_k} \in \partial\mathbb{D}$ y curvas que unen estos vértices que no son necesariamente segmentos lineales, a este tipo de dominios les llamaremos polígonos curvilíneos. En el contexto de aplicaciones convexas es necesario que las curvas que unen estos vértices tengan curvatura con signo positiva.

A continuación establecemos un recíproco de esta situación

Teorema 3.3. *Sea $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ un mapeo convexo con $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1$. Entonces, si $\Omega = f(\mathbb{D})$ es un polígono curvilíneo con n vértices entonces la medida de Aleksandrov μ tiene parte absolutamente continua*

$$\mu_a(e^{is}) = \beta'(s) - \sum_{k=1}^{n}\beta_k \qquad (m\ c.t.p).$$

y puntos masa en cada vértice.

Demostración. Sea $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ el mapeo conforme definido en (3.7).

Si $h(z) = f'(0)\prod_{k=1}^{n}(1-e^{-it_k}z)^{-2\beta_k}$ y $\varphi(z) = \exp\left(-\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\log(1-e^{-it}z)\beta'(t)\,dt\right)$ entonces $f'(z) = h(z)\varphi(z)$ y la pre-Schwarziana da

$$Tf(z) = \frac{f''(z)}{f'(z)} = \frac{h'(z)}{h(z)} + \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} = \frac{h'(z)}{h(z)} + \phi'(z)$$

donde

$$\phi(z) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\log(1-e^{-it}z)\beta'(t)dt\,.$$

Observe que

$$\log h(z) = \sum_{k=1}^{n}(-\sigma_k)\log(1-e^{-it_k}z) + \log C$$

por lo que

$$\frac{h'(z)}{h(z)} = \sum_{k=1}^{n}\frac{2\beta_k e^{-it_k}}{1-e^{-it_k}z} = 2\sum_{k=1}^{n}\frac{\beta_k}{e^{it_k}-z} = -2\sum_{k=1}^{n}\frac{\beta_k}{z-e^{it_k}}\,.$$

Además

$$\begin{aligned}\phi'(z) &= -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{-e^{-it}}{1-e^{-it}z}\beta'(t)\,dt\\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{e^{it}-z}\beta'(t)\,dt\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{2\beta'(t)}{e^{it}-z}\,dt\end{aligned}$$

Entonces, la pre-Schwarziana para f es

$$Tf(z) = -2\sum_{k=1}^{n}\frac{\beta_k}{z-z_k} + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{2\beta'(t)}{e^{it}-z}\,dt$$

Note que si $f(\mathbb{D})$ es convexo entonces

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\beta'(t)dt = 1\,.$$

Luego, la representación de Herglotz queda

$$\begin{aligned} g(z) &= 1 + z\frac{f''(z)}{f'(z)} = \int\limits_{\partial\mathbb{D}} \frac{\zeta + z}{\zeta - z}\, d\mu(\zeta) \\ &= 1 + \sum_{k=1} \frac{2z\beta_k}{z_k - z} + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{2z\beta'(t)}{e^{it} - z}\, dt \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{2z\beta_k}{z_k - z} + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z}\beta'(t)\, dt\, . \end{aligned}$$

Note que si $z \in \partial\mathbb{D}$ entonces

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{z}{z_k - z}\right\} = -\frac{1}{2}$$

para $z \neq z_1, \ldots, z_n \in \partial\mathbb{D}$.

Consideremos la descomposición de Lebesgue para la medida de Aleksandrov μ:

$$d\mu = \psi dm + d\sigma$$

con $\psi \in L^1(\partial\mathbb{D})$ y $\sigma \perp m$. Por el Teorema de diferenciación de Lebesgue $\psi = D\mu\ m$ en casi todo punto y por el Teorema de Fatou

$$(D\mu)(\zeta) = \lim_{r\to 1^-} (P\mu)(r\zeta)\, .$$

Si $\zeta = e^{is}$ se sigue que

$$\begin{aligned} \psi(\zeta) &= \lim_{r\to 1^-} (P\mu)(r\zeta) \\ &= \lim_{r\to 1^-} \mathrm{Re}\left\{\int_0^{2\pi} \frac{e^{it} + r\zeta}{e^{it} - r\zeta}\, d\mu(t)\right\} \\ &= \lim_{r\to 1^-} \sum_{k=1}^{n} 2\beta_k \mathrm{Re}\left\{\frac{r\zeta}{z_k - r\zeta}\right\} + \lim_{r\to 1^-} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{it} + r\zeta}{e^{it} - r\zeta}\beta'(t)\, dt \\ &= \sum_{k=1}^{n} 2\beta_k \mathrm{Re}\left\{\frac{\zeta}{z_k - \zeta}\right\} + \frac{1}{2\pi}\lim_{r\to 1^-}\int_0^{2\pi} \frac{1 + re^{i(s-t)}}{1 - re^{i(s-t)}}\, \beta'(t) dt \\ &= -\sum_{k=1}^{n} \beta_k + \frac{1}{2\pi}\lim_{r\to 1^-}\int_0^{2\pi} P_r(s-t)\beta'(t)\, dt \\ &= -\sum_{k=1}^{n} \beta_k + \beta'(s) \end{aligned}$$

La última igualdad, se debe al teorema de Fatou y por lo tanto,

$$\psi(e^{is}) = \beta'(s) - \sum_{k=1}^{n} \beta_k \qquad (m \text{ c.t.p}).$$

Ahora bien, por el Teorema de Nevanlinna, $\mu(\{\zeta\}) > 0$, $\zeta \in \partial\mathbb{D}$ si y sólo si

$$\angle \lim_{z\to\zeta} \omega(z) = 1 \quad \text{y} \quad |\omega'(\zeta)| < \infty\,,$$

donde

$$\omega(z) \;=\; \frac{g(z)-1}{g(z)+1} = \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{2z\beta_k}{z_k - z} + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{2z}{e^{it}-z}\beta'(t)\,dt}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \beta_k \left(\frac{z_k+z}{z_k-z}\right) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(s-t)\beta'(t)\,dt}$$

Considere el arco $\Gamma_{z_\ell} = \{rz_\ell \mid 0 \leqslant r \leqslant 1\}$ para $\ell = 1, 2, \ldots, n$, vemos que

$$\begin{aligned}
\lim_{r\to1} \omega(rz_\ell) &= \lim_{r\to1} \frac{\dfrac{2rz_\ell\beta_\ell}{z_\ell - rz_\ell} + O(1)}{\dfrac{\beta_\ell(z_\ell + rz_\ell)}{z_\ell - rz_\ell} + O(1)} \\
&= \lim_{r\to1} \frac{2rz_\ell\beta_\ell + O(1)(z_\ell - rz_\ell)}{\beta_\ell(z_\ell + rz_\ell) + O(1)(z_\ell - rz_\ell)} = \frac{2z_\ell\beta_\ell}{\beta_\ell 2z_\ell} = 1
\end{aligned}$$

lo que implica por el Teorema de Lindelöf que $\angle \lim_{z\to z_\ell} \omega(z) = 1$.
Ahora bien, eligiendo $\eta = 1$ tenemos que

$$\omega'(z_\ell) = \angle \lim_{z\to z_\ell} \frac{\omega(z)-1}{z - z_\ell}\,.$$

Como $\omega(z) = (g(z)-1)/(g(z)+1)$ obtenemos que

$$\begin{aligned}
\lim_{r\to1} \frac{\omega(rz_\ell)-1}{rz_\ell - z_\ell} &= \lim_{r\to1} \frac{-2}{g(rz_\ell)+1} \cdot \frac{1}{rz_\ell - z_\ell} \\
&= \lim_{r\to1} \frac{-2(rz_\ell - z_\ell)^{-1}}{\left[\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \beta_k \left(\frac{z_k + rz_\ell}{z_k - rz_\ell}\right) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(s-t)\beta'(t)dt\right]} \\
&= 2z_\ell\beta_\ell
\end{aligned}$$

En virtud del teorema de Lindelöf, $\omega'(z_\ell) = 2z_\ell\beta_\ell$ luego $|\omega'(z_\ell)| = 2\beta_\ell < \infty$. Por lo tanto, por el teorema de Nevanlinna $\mu(\{z_\ell\}) > 0$ para cada $\ell = 1, 2, \ldots, n$. □

3. Polígonos convexos con una cantidad numerable de lados

Sean $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(t_{-k})_{k\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones de números reales tales que

$$\lim_{k\to\infty} t_k = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{k\to\infty} t_{-k} = -\infty$$

y que satisfacen $-\infty < \cdots < t_{-k} < \cdots < t_1 < t_0 < t_1 < \cdots < t_k < \cdots < +\infty$, $t_0 = 0$.

Sean $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(\alpha_{-k})_{k\in\mathbb{N}}$ sucesiones de números reales tales que

$$\lim_{k\to\infty} \alpha_k = \lim_{k\to\infty} \alpha_{-k} = 1$$

y que satisfacen $\alpha_k \in (0,1)$ y $\alpha_{-k} \in (0,1)$.

Sea Ω un dominio acotado en el plano complejo y asumiremos que $\partial\Omega$ es una curva de Jordan constituida por segmentos lineales con una cantidad infinita de lados. El ángulo interior en un vértice del polígono A_k (respect. A_{-k}) que corresponde al punto (t_k) (respect. (t_{-k})) lo denotamos por $\alpha_k\pi$ (respect. $\alpha_{-k}\pi$). Los ángulos exteriores los denotamos por $\sigma_k\pi = \pi - \alpha_k\pi$, $\sigma_{-k} = \pi - \alpha_{-k}\pi$ y tienden a cero cuando $k \to \infty$. La inclinación del lado A_kA_{k+1} al eje real es igual a $\pi\left(\sigma_0 + \sum_{j=1}^{k}\sigma_k\right)$, donde $\sigma_0\pi$ es la inclinación del lado $A_{-1}A_1$ al eje real. La inclinación del lado $A_{-k-1}A_{-k}$ al eje real es igual a $\pi\left(\sigma_0 - \sum_{j=1}^{k}\sigma_{-k}\right)$. Asumiremos que $|\sigma_0| < 1/2$. También asumiremos que los límites existen y son finitos

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sigma_k = \sigma_+\,, \qquad \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sigma_{-k} = \sigma_- \tag{3.8}$$

y por un teorema de geometría elemental, la suma de todos los ángulos exteriores de un polígono cerrado es 2π, luego se cumple la siguiente relación

$$\sigma_+ + \sigma_- = \sigma = 2\,, \tag{3.9}$$

para el caso en que Ω es un polígono cerrado y en este caso el ángulo interior en el vértice A_∞ es igual a π.

Requeriremos la existencia de los límites

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{t_{-n-1}}{t_{-k}} = c_- , \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{t_{n+1}}{t_n} = c_+ , \tag{3.10}$$

donde $1 < c^-$ y $1 < c_+$.

Definimos las funciones constantes a tramos

$$n_+^*(x) = \begin{cases} 0\,, & 0 \leqslant x < t_1 \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{k-1} \sigma_j\,, & t_{k-1} \leqslant x < t_k, \text{ para } k \geqslant 2 \end{cases}$$

y la función

$$n_-^*(x) = \begin{cases} 0\,, & 0 \leqslant x < -t_{-1} \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{k-1} \sigma_{-j}\,, & -t_{-k-1} \leqslant x < -t_{-k}, \text{ para } k \geqslant 2 \end{cases}$$

asumiremos que las siguientes condiciones se satisfacen:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_- - n_-^*(x) &= \frac{\alpha_-(x)}{x^\rho}\,, \quad \alpha_-(x) < M_\alpha\,, \\ \sigma_+ - n_+^*(x) &= \frac{\alpha_+(x)}{x^\rho}\,, \quad \alpha_+(x) < M_\alpha\,, \end{aligned}\right\} \tag{3.11}$$

donde ρ satisface la desigualdad $0 < \rho \leqslant 1$, M_α es una constante positiva, y $x \in (0, +\infty)$.

Sea τ_+ el exponente de convergencia de la sucesión (t_j), asumimos que el límite

$$\tau_+ = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\ln t_n} > 0 \tag{3.12}$$

existe y que satisface la desigualdad $\tau_+ < 1$;

$$\tau_- = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\ln(-t_{-n})} > 0\,, \qquad \tau_- < 1\,.$$

El siguiente teorema es una generalización de la fórmula de Schwarz-Christoffel para un polígono de infinitos lados que se puede hallar en [**27**] (ver también [**26**])

Teorema 3.4. *Sea h un mapeo conforme del semi-plano superior $Im\{\zeta\} > 0$ sobre el interior de un polígono acotado Ω con ángulos $\alpha_k\pi$, $\alpha_{-k}\pi$, $k = 1, 2, \ldots, \infty$, que satisfacen (3.8) y (3.11). Sean (t_k) y (t_{-k}) dos sucesiones monótonas sobre el eje real que convergen a ∞ y $-\infty$,* *respectivamente, que corresponden a los vértices del polígono. Si estos puntos son dados y satisfacen (3.10) y (3.12), entonces*

$$h(\zeta) = C_0 e^{i\pi\sigma_0} \int_0^{\zeta} \prod_{k=-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{\zeta}{t_k}\right)^{-\sigma_k} d\zeta + K_0 \tag{3.13}$$

donde $C_0 > 0$*,* K_0 *es una constante arbitraria y* $\sigma_0 \in (-1/2, 1/2)$*.*

Los detalles de la demostración de este teorema se encuentran en [**27**]

Mediante las transformaciones

$$\zeta = i\left(\frac{1+z}{1-z}\right), \qquad z = \frac{\zeta - i}{\zeta + i}$$

las cuales mapean del disco unitario $|z| < 1$ sobre el semi-plano superior $\mathrm{Im}\{\zeta\} > 0$, podemos también obtener desde (3.13) una fórmula para el mapeo conforme f del disco unitario sobre el polígono Ω de infinitos (numerable) lados. Tenemos que

$$\begin{aligned}
\left(1 - \frac{\zeta}{t_k}\right)^{2\beta_k} &= \left(1 - \frac{i}{t_k}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)\right)^{2\beta_k} \\
&= \left(\frac{(t_k - i) - z(t_k + i)}{t_k(1-z)}\right)^{2\beta_k} \\
&= \left[\frac{t_k + i}{t_k(1-z)}\right]^{2\beta_k} \left(\frac{t_k - i}{t_k + i} - z\right)^{2\beta_k}
\end{aligned}$$

y

$$\frac{d\zeta}{dz} = \frac{2i}{(1-z)^2}.$$

Si denotamos por z_k los puntos

$$z_k = \frac{t_k - i}{t_k + i}$$

sobre el círculo unitario el cual es mapeado sobre el vértice de índice k, se sigue de (3.9) y (3.13) que el mapeo conforme f del disco unitario sobre Ω satisface

$$f(z) = C_1 \int_0^{z} \prod_{k=-\infty}^{\infty} (z - z_k)^{-2\beta_k} dz + K_1 \tag{3.14}$$

donde $C_1 > 0$, K_1 es una constante arbitraria y $\beta_k = \sigma_k/2$.

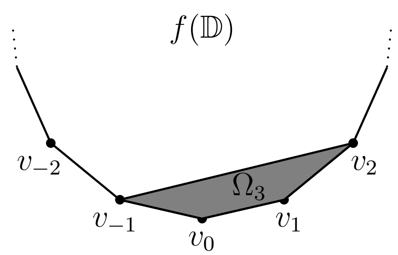
A continuación damos una generalización del teorema 1 en [**6**]

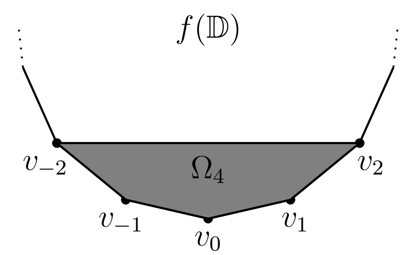
Teorema 3.5. *Sea $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ una función convexa que satisface*

$$\frac{f''(z)}{f'(z)} = \frac{2\varphi(z)}{1 - z\varphi(z)}$$

para alguna función analítica φ con $|\varphi(z)| \leqslant 1$. Entonces φ es un producto de Blaschke infinito si y sólo si f mapea $\mathbb{D}$ sobre el interior de un polígono de infinitos lados.

Demostración. Sea $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ mapeo convexo al interior de un polígono de infinitos lados. Sean $z_k \in \partial\mathbb{D}$ con $k \in \mathbb{Z}$ los pre-vértices del polígono de infinitos lados $f(\mathbb{D})$ y denotamos por $v_k = f(z_k)$ los correspondientes vértices del polígono. Construimos la sucesión de polígonos Ω_n ($n \geqslant 3$) de $n+1$ lados formados por el conjunto de vértices $\{v_{-k}, \ldots, v_{-1}, v_0, v_1, \ldots, v_k\}$ si $n = 2k$ es par y formado por el conjunto de vértices $\{v_{-k}, \ldots, v_{-1}, v_0, v_1, \ldots, v_{k+1}\}$ si $n = 2k+1$ es impar. Entonces, la sucesión Ω_n de polígonos converge a $f(\mathbb{D})$ en el sentido de Carathéodory.





Debidamente normalizados los mapeos de Schwarz-Christoffel f_n de $\mathbb{D}$ sobre Ω_n convergen localmente uniforme a f. Cada mapeo f_n es de la forma

$$f_n'(z) = C_n \prod_{k=-n}^{n} (z - z_k)^{-2\beta_k}$$

y satisfacen

$$\frac{f_n''(z)}{f_n'(z)} = \frac{2\varphi_n(z)}{1 - z\varphi_n(z)} \tag{3.15}$$

para una sucesión de productos de Blaschke finito φ_n de grado $n+1$. Ahora bien, podemos expresar φ_n en términos de la pre-Schwarziana de la sucesión f_n como

$$\varphi_n(z) = \frac{p_n(z)}{2 + zp_n(z)}$$

donde $p_n(z) = f_n''(z)/f_n'(z)$. Entonces, φ_n converge localmente uniforme a φ y por construcción φ es un producto de Blaschke infinito. Recíprocamente, si φ es un producto de Blaschke infinito,

$$\varphi(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{|\alpha_k|}{\alpha_k} \frac{z - \alpha_k}{1 - \overline{\alpha_k} z} , \qquad |\alpha_k| < 1 .$$

Si consideramos el producto parcial

$$\varphi_n(z) = \prod_{k=1}^{n+1} \frac{|\alpha_k|}{a_k} \frac{z - \alpha_k}{1 - \overline{\alpha_k} z} , \qquad |\alpha_k| < 1 .$$

entonces los mapeos f_n que satisfacen (3.15) mapean $\mathbb{D}$ sobre un polígono Ω_n de n-lados y por el teorema de convergencia de Caratheodory f_n converge localmente uniforme a una función f que mapea $\mathbb{D}$ sobre un polígono de infinitos lados. $\square$

El siguiente teorema describe la descomposición de Lebesgue para la medida de Aleksandrov asociada a un mapeo conforme del disco unitario sobre un polígono de una cantidad numerable de lados que es una generalización de lo obtenido en la sección 1.

Teorema 3.6. Sea $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ analítica con $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1$. Si $\Omega = f(\mathbb{D})$ es un polígono convexo de una cantidad infinita de lados entonces la medida de Aleksandrov μ asociado a f es discreta

$$\mu(\xi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \beta_k \delta_{z_k}(\xi) , \tag{3.16}$$

donde $z_k \in \partial\mathbb{D}$, $k = 1, 2, \ldots, n$ son las preimagenes de los vértices del polígono y $\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} \beta_k = 1$.

Demostración. Si $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ es un mapeo a un polígono convexo de n-lados, por la fórmula de Schwarz-Christoffel

$$\frac{f''(z)}{f'(z)} = -2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\beta_k}{z - z_k} .$$

Se sigue de la representación de Herglotz que

$$\begin{aligned}\int\limits_{\partial\mathbb{D}} \frac{\xi+z}{\xi-z}d\mu(\xi) &= 1+z\frac{f''(z)}{f'(z)} = 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{2z\beta_k}{z_k-z} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\beta_k + \sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{2z\beta_k}{z_k-z} = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\beta_k\left(\frac{z_k+z}{z_k-z}\right)\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\int\limits_{\partial\mathbb{D}} \frac{\xi+z}{\xi-z}d\mu(\xi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\beta_k\left(\frac{z_k+z}{z_k-z}\right) . \tag{3.17}$$

Tomando parte real en (3.17) obtenemos que

$$\int\limits_{\partial\mathbb{D}} \frac{1-|z|^2}{|\xi-z|^2}d\mu(\xi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\beta_k\frac{1-|z|^2}{|z_k-z|^2} .$$

Sea $z=rt$, $0<r<1$, $|t|=1$ entonces

$$\int\limits_{\partial\mathbb{D}} \frac{1-r^2}{|\xi-rt|^2}d\mu(\xi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\beta_k\frac{1-r^2}{|z_k-rt|^2} .$$

Cuando $z_k\neq t$ tenemos por el Teorema de Fatou que

$$\begin{aligned}(D\mu)(t) &= \lim_{r\to 1^-}(P\mu)(rt) \\ &= \lim_{r\to 1^-}\int\limits_{\partial\mathbb{D}}\frac{1-r^2}{|\xi-rt|^2}d\mu(\xi) \\ &= \lim_{r\to 1^-}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\beta_k\frac{1-r^2}{|z_k-rt|^2} = 0 .\end{aligned}$$

Por la proposición 1.1, esto dice que μ no tiene masa sobre $\partial\mathbb{D}-\{t : t\neq z_k\ ,\ k\in\mathbb{Z}\}$ donde los puntos z_j son las preimagenes de los vértices del polígono. El analísis de arriba nos dice que

$$\mu = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\beta_k\delta_{z_k} .$$

Recíprocamente, si la medida de Aleksandrov μ asociada a f es de la forma (3.16) entonces

$$z\frac{f''(z)}{f'(z)} = \frac{2z\varphi(z)}{1 - z\varphi(z)} = 2\int\limits_{\partial\mathbb{D}} \frac{z}{\xi - z} d\mu(\xi) = 2\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{z\beta_k}{z_k - z} = 2r(z)$$

donde $z_k \in \partial\mathbb{D}$ y $\sum \beta_k = 1$. En particular, φ es una función analítica en el disco unitario, dada por

$$z\varphi(z) = \frac{r(z)}{1 + r(z)} . \tag{3.18}$$

Como Re $\{r(z)\} = -\frac{1}{2}$ para cada $z \in \partial\mathbb{D}$ con $z \neq z_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, lo cual implica que $|\varphi(z)| = 1$. Los puntos z_k son polos de $r(z)$ y luego $|\varphi(z_k)| = 1$ por (3.18). Luego, $|\varphi(z)| \equiv 1$ sobre $\partial\mathbb{D}$ y h es un producto de Blaschke por Teorema 3.6 f es un mapeo convexo a un polígono de infinitos lados. □

4. Polígonos curvilíneos con una cantidad numerable de vértices

Si h es un mapeo conforme del semi-plano superior sobre un polígono de infinitos lados que satisface las condiciones del teorema 24, entonces asociada a esta aplicación tenemos la aplicación f que mapea el disco unitario sobre un polígono de infinitos lados y que satisface la relación (3.14).

Teorema 3.7. *Sea f un mapeo conforme de $\mathbb{D}$ sobre un dominio Ω de borde rotacional acotado. Supongamos que existen sucesiones (α_k) y (α_{-k}), $k \in \mathbb{N}$ que satisfacen (3.8) y (3.11). Sean (t_k) y (t_{-k}) dos sucesiones monótonas sobre el eje real que convergen a ∞ y $-\infty$, respectivamente, estos puntos son dados y satisfacen (3.10) y (3.12). Si la dirección de la tangente hacia delatante β de $\Gamma = \partial\Omega$ es absolutamente continua excepto por una cantidad infinita de saltos $\pi\sigma_k = \pi - \alpha_k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ en e^{it_k} entonces*

$$f'(z) = f'(0) \prod_{k=-\infty}^{\infty} (1 - e^{it_k} z)^{-\sigma_k} \exp\left(-\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \log(1 - e^{-it} z)\beta'(t) dt \right) .$$

Demostración. La convergencia del producto infinito queda garantizado por el teorema 3.4. Por otro lado, en la descomposición de la función de variación acotada, β es absolutamente continua excepto en los saltos en los puntos t_k. Como

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \log(1-e^{-it}z)d\beta_{salto} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sigma_k \log(1-e^{-it_k}z)\ . \tag{3.19}$$

Ahora bien, por el teorema de Paatero tenemos que

$$\log f'(z) = \log f'(0) - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \log(1-e^{-it}z)d\beta(t)$$

para todo $z \in \mathbb{D}$, la igualdad se sigue exponenciando esta igualdad y usando (3.19). □

Usando las mismas técnicas utilizadas en el Teorema 3.3 se obtiene una generalización de este resultado para mapeos a polígonos curvilíneos con una cantidad infinita de vértices, omitiremos su demostración ya que se sigue textual de lo hecho en el Teorema 3.3.

Teorema 3.8. *Sea* $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ *un mapeo convexo con* $f(0) = 0$ *y* $f'(0) = 1$. *Entonces, si* $\Omega = f(\mathbb{D})$ *es un polígono curvilíneo con infinitos vértices entonces la medida de Aleksandroc* μ *tiene parte absolutamente continua*

$$\mu_a(e^{is}) = \beta'(s) - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \beta_k \qquad (m\ \ c.t.p).$$

y puntos masa en cada vértice.

Capítulo 4

Resultados sobre espacios H^p

1. La desigualdad de Schwarz-Pick

Si $f \in \mathcal{C}$ entonces, sabemos que, $g(z) = 1 + zf''(z)/f'(z)$ pertenece a la clase $\mathcal{P}$. Como $g(0) = 1$, esto dice que g es subordinada al mapeo del plano superior $\ell(z) = \dfrac{1+z}{1-z}$, luego existe $\omega : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ analítica con $\omega(0) = 0$ tal que

$$g(z) = \ell(\omega(z)) \, .$$

En otras palabras,

$$\frac{zf''(z)}{f'(z)} = \frac{1+\omega(z)}{1-\omega(z)} - 1 = \frac{2\omega(z)}{1-\omega(z)} \, .$$

Por el Lema de Schwarz, $|\omega(z)| \leqslant |z|$ en $\mathbb{D}$. Con la notación $\varphi(z) = \omega(z)/z$, esto da la representación

$$\frac{f''(z)}{f'(z)} = \frac{2\varphi(z)}{1 - z\varphi(z)} \tag{4.1}$$

para la pre-Schwarziana, donde φ es una función analítica que satisface $|\varphi(z)| \leqslant 1$ en $\mathbb{D}$. Se sigue de la representación de Herglotz que

$$\frac{f''(z)}{f'(z)} = 2 \int\limits_{\Gamma} \frac{d\mu(\zeta)}{\zeta - z} \tag{4.2}$$

donde $\Gamma = \partial\mathbb{D}$. Para $\zeta \in \Gamma$ sea

$$b_\zeta = b_\zeta(z) = \overline{z} - \frac{1-|z|^2}{\zeta - z} = -\frac{1-\overline{z}\zeta}{\zeta - z} \, .$$

Observe que $|b_\zeta| = 1$.

Teorema 4.1. *Con las notaciones de arriba se tiene:*

$$\frac{(1-|z|^2)|\varphi'(z)|}{1-|\varphi(z)|^2} = \frac{\left|\int\limits_\Gamma\int\limits_\Gamma (b_\zeta - b_\eta)^2 d\mu_\zeta d\mu_\eta\right|}{\int\limits_\Gamma\int\limits_\Gamma |b_\zeta - b_\eta|^2 d\mu_\zeta d\mu_\eta}. \tag{4.3}$$

Demostración. Calculamos la Schwarziana de f en términos de la función φ y de la medida μ, obteniéndose

$$\begin{aligned}
Sf(z) &= \frac{2\varphi'(z)}{(1-z\varphi(z))^2} = 2\int\limits_\Gamma \frac{d\mu(\zeta)}{(\zeta-z)^2} - 2\left(\int\limits_\Gamma \frac{d\mu(\zeta)}{\zeta-z}\right)^2 \\
&= \int\limits_\Gamma\int\limits_\Gamma \left(\frac{1}{\zeta-z} - \frac{1}{\eta-z}\right)^2 d\mu(\zeta)d\mu(\eta) \\
&= \frac{1}{(1-|z|^2)^2}\int\limits_\Gamma\int\limits_\Gamma (b_\zeta - b_\eta)^2 d\mu(\zeta)d\mu(\eta)\,,
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$2\frac{(1-|z|^2)^2|\varphi'(z)|}{|1-z\varphi(z)|^2} = \left|\int\limits_\Gamma\int\limits_\Gamma (b_\zeta - b_\eta)^2 d\mu(\zeta)d\mu(\eta)\right|. \tag{4.4}$$

Rescribiendo el término de la izquierda como

$$2\frac{(1-|z|^2)(1-|\varphi(z)|^2)}{|1-z\varphi(z)|^2}\frac{(1-|z|^2)|\varphi'(z)|}{1-|\varphi(z)|^2}\,, \tag{4.5}$$

y afirmamos que

$$2\frac{(1-|z|^2)(1-|\varphi(z)|^2)}{|1-z\varphi(z)|^2} = \int\limits_\Gamma\int\limits_\Gamma |b_\zeta - b_\eta|^2 d\mu(\zeta)d\mu(\eta)\,, \tag{4.6}$$

y por (4.4) y (4.5) se sigue el teorema.
Para probar (4.6), observe primero que

$$2\frac{(1-|z|^2)(1-|\varphi(z)|^2)}{|1-z\varphi(z)|^2} = 2\left(1-\left|\frac{\varphi(z)-\overline{z}}{1-\overline{z}\varphi(z)}\right|^2\right)\,,$$

y por (4.1) y (4.2) se ve fácilmente que es igual a

$$= 2\left(1 - \left|\overline{z} - (1-|z|^2)\int\limits_{\Gamma}\frac{d\mu(\zeta)}{\zeta - z}\right|^2\right) .$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \int\limits_{\Gamma}\int\limits_{\Gamma}|b_\zeta - b_\eta|^2 d\mu(\zeta)d\mu(\eta) &= 2\left(1 - \left|\int\limits_{\Gamma} b_\zeta d\mu(\zeta)\right|^2\right) \\ &= 2\left(1 - \left|\overline{z} - (1-|z|^2)\int\limits_{\Gamma}\frac{d\mu(\zeta)}{\zeta - z}\right|^2\right) , \end{aligned}$$

como habíamos afirmado. □

Hemos deducido una expresión para $(1-|z|^2)|\varphi'(z)|/(1-|\varphi(z)|^2)$ manifiestamente acotado por 1 por la desigualdad triangular. En otras palabras, se ha obtenido el Lema de Schwarz-Pick como consecuencia de la desigualdad triangular.

2. Automorfismos del disco

Observe que en general toda automorfismo del disco se puede descomponer como en la siguiente proposición

Proposición 4.1. *Si $\omega : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ es analítica con $\omega(0) = 0$, entonces*

$$w(z) = B(z)\exp\left(-\int\limits_{\partial\mathbb{D}}\frac{\zeta + z}{\zeta - z}d\mu(\zeta)\right)$$

donde B es un producto de Blaschke formado por los ceros de ω y $\mu \in M_{\mathbb{D}}$.

Demostración. La función $h(z) = \omega(z)/B(z)$ es analítica en $\mathbb{D}$ y satisface $0 < |h(z)| \leqslant 1$. Entonces, $-\log|h(z)|$ es una función armónica positiva, luego por el teorema de Herglotz, existe una medida $\mu \in M_{\mathbb{D}}$ tal que

$$-\log|h(z)| = \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t)d\mu(t)$$

la completación analítica nos da

$$\begin{aligned} h(z) &= \exp\left(-\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} d\mu(t) - i\mathrm{Im}\,\{h(0)\}\right) \\ &= e^{i\gamma}\exp\left(-\int\limits_{\partial\mathbb{D}} \frac{\zeta+z}{\zeta-z} d\mu(\zeta)\right), \end{aligned}$$

donde $\gamma = -\mathrm{Im}\,\{h(0)\}$. □

Por lo que, si la medida μ en la proposición anterior es singular con respecto a la medida de Lebesgue entonces el segundo factor es una función interna singular y ω es una función interna.

Teorema 4.2. *Sea f un mapeo convexo a un polígono curvilíneo de n vértices con*

$$\frac{f''(z)}{f'(z)} = \frac{2\varphi(z)}{1 - z\varphi(z)}$$

para alguna función analítica φ con $|\varphi(z)| < 1$ en $\mathbb{D}$. Entonces, φ es una función interna si y sólo $\beta'(s) = \sum_{k=1}^{n} \beta_k \quad m$-c.t.p.

En otras palabras, la función φ es interna si y sólo si los lados no rectilíneos del polígono son arcos de círculo.

Demostración. Si φ es interna entonces $\omega(z) = z\varphi(z)$ es interna luego

$$\lim_{r\to 1}(1 - |\omega(r\zeta)|) = 0 \qquad \text{c.t.p}$$

y se sigue que

$$\beta'(s) - \sum_{k=1}^{n} \beta_k = \lim_{r\to 1}(P\mu)(r\zeta) = \lim_{r\to 1} \frac{1 - |\omega(r\zeta)|^2}{|1 - \omega(r\zeta)|^2} = 0$$

lo que implica que $\beta'(s) = \sum \beta_k$ es constante m-c.t.p. Recíprocamente, si $\beta'(s) = \sum \beta_k$ m-c.t.p, entonces

$$\lim_{r\to 1} \frac{1 - |\omega(r\zeta)|^2}{|1 - \omega(r\zeta)|^2} = 0 \quad m - \text{c.t.p.}$$

Pero como

$$\lim_{r\to 1} |1 - \omega(r\zeta)| > 0$$

para casi todo $\zeta \in \partial\mathbb{D}$ por lo que necesariamente se cumple que

$$\lim_{r\to 1}(1 - |\omega(r\zeta)|) = 0 \qquad \text{c.t.p}$$

es decir, ω es interna y luego φ lo es. $\square$

3. Dimensión de Hardy

Para funciones f que están en H^p para algún $p \in]0, \infty]$ definimos la dimensión de Hardy de f por

$$\dim_{H^p}(f) = \sup\{p \in]0, \infty] \mid f \in H^p\} .$$

En [**18**] se determina la dimensión de Hardy para mapeos conformes del disco unitario sobre un polígono de n-lados dados por la fórmula de Schwarz-Christoffel. Generalizamos este resultado para el caso de mapeos conformes del disco unitario sobre un polígono con una cantidad numerable de lados.

Teorema 4.3. *Sea f un mapeo de Schwarz-Christoffel de una cantidad numerable de vértices $A_k = f(z_k)$ de ángulo exterior $2\beta_k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$. Entonces*

$$dim_{H^p}(f') = \frac{1}{2\beta_{max}}$$

donde $\beta_{\text{máx}} = \max_{k\in\mathbb{Z}} \beta_k$.

Demostración. Si f es un mapeo poligonal con una cantidad infinita de lados normalizada $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1$ entonces bajo las hipótesis del Teorema 3.4 la fórmula generalizada de Schwarz-Christoffel satisface

$$f'(z) = \prod_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z - z_k)^{2\beta_k}} , \quad z_k \in \partial\mathbb{D} \ (k \in \mathbb{Z}), \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} \beta_k = 1 .$$

En virtud del criterio geométrico, vemos que $f' \in H^p$ para todo $p < 1/2$, luego $f'(e^{i\theta})$ existe para casi todo $\theta \in [0, 2\pi]$ y

$$\lim_{r\to 1} \int_0^{2\pi} |f'(re^{i\theta})|^p d\theta = \int_0^{2\pi} |f'(e^{i\theta})|^p d\theta .$$

Ahora bien, dado $\varepsilon > 0$, por la convergencia localmente uniforme de $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|e^{i\theta} - z_k|^{2\beta_k}}$, podemos elegir $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left| \sum_{|k|=m+1}^{\infty} \beta_k \log\left(\frac{1}{|e^{i\theta} - z_k|}\right) \right| \leqslant \varepsilon \log\left(\frac{1}{M}\right)$$

para una cualquier constante $M > 0$ fija. Por la construcción del mapeo de Schwarz-Christoffel de una cantidad numerable de vértices, los puntos z_k ($k \in \mathbb{Z}$) están ordenados sucesivamente sobre $\partial\mathbb{D}$ y definimos

$$d = \text{mín}\{|z_k - z_{k-1}| \ : \ |k| = 1, 2, \ldots, m\} \, .$$

Claramente $d > 0$ como los puntos z_k son aislados si $|k| = 1, 2, \ldots, m$. Ahora tomando $t_k = \frac{1}{2}(\arg(z_k) + \arg(z_{k-1}))$ ($|k| = 1, 2, \ldots, m$) y observe que

$$|e^{i\theta} - z_k| > \frac{d}{2} \qquad (|k| = 1, 2, \ldots, m)$$

para $\theta \notin [t_{k-1}, t_k]$. Tenemos que

$$\begin{aligned} \prod_{|k|=m+1}^{\infty} \frac{1}{|e^{i\theta} - z_k|^{2\beta_k p}} &= \exp\left(2p \sum_{|k|=m+1}^{\infty} \beta_k \log \frac{1}{|e^{i\theta} - z_k|}\right) \\ &\leqslant \exp\left(2p \left| \sum_{|k|=m+1}^{\infty} \beta_k \log \frac{1}{|e^{i\theta} - z_k|} \right| \right) \\ &\leqslant \frac{1}{M^{2\varepsilon p}} \end{aligned}$$

Entonces, para $|j| = 0, 1, \ldots, m-1$ tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{t_j}^{t_{j+1}} |f'(e^{i\theta})|^p d\theta &= \int_{t_j}^{t_{j+1}} \prod_{k=-m}^{m} |e^{i\theta} - z_k|^{-2\beta_k p} \prod_{|k|=m+1}^{\infty} |e^{i\theta} - z_k|^{-2\beta_k p} d\theta \\ &< \left(\frac{2}{d}\right)^{Kp} \int_{t_j}^{t_{j+1}} |e^{i\theta} - z_j|^{-2\beta_j p} \prod_{|k|=m+1}^{\infty} |e^{i\theta} - z_k|^{-2\beta_k p} d\theta \\ &\leqslant \left(\frac{2}{d}\right)^{Kp} \frac{1}{M^{2\varepsilon p}} \int_0^{2\pi} |e^{i\theta} - z_j|^{-2\beta_j p} d\theta \end{aligned}$$

Por otro lado, note que si $\theta \in [t_m, t_{-m}]$ y $|k| = 1, 2\ldots, m$ entonces $|e^{i\theta} - z_k| \geqslant C > 0$ luego

$$\begin{aligned}
\int_{t_{-m}}^{t_m} |f'(e^{i\theta})|^p d\theta &= \int_{t_{-m}}^{t_m} \prod_{k=-m}^{m} |e^{i\theta} - z_k|^{-2\beta_k p} \prod_{|k|=m+1}^{\infty} |e^{i\theta} - z_k|^{-2\beta_k p} d\theta \\
&\leqslant \int_{t_{-m}}^{t_m} \prod_{k=-m}^{m} C^{-2\beta_k p} \prod_{|k|=m+1}^{\infty} |e^{i\theta} - z_k|^{-2\beta_k p} d\theta \\
&= C^{Kp} \int_{t_{-m}}^{t_m} \prod_{|k|=m+1}^{\infty} |e^{i\theta} - z_k|^{-2\beta_k p} d\theta \\
&\leqslant \frac{C^{Kp}}{M^{2\varepsilon p}} |t_m - t_{-m}| \, .
\end{aligned}$$

Se sigue que

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} |f'(e^{i\theta})|^p d\theta &= \sum_{j=0}^{m-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} |f'(e^{i\theta})|^p d\theta + \int_{t_{-m}}^{t_m} |f'(e^{i\theta})| d\theta \\
&= \sum_{j=0}^{m-1} \left(\frac{2}{d}\right)^{Kp} \frac{1}{M^{2\varepsilon p}} \int_0^{2\pi} |e^{i\theta} - z_j|^{-2\beta_j p} d\theta \\
&\qquad + \frac{C^{Kp}}{M^{2\varepsilon p}} |t_m - t_{-m}|
\end{aligned}$$

el cual es finito si y sólo si $p < \frac{1}{2\beta_j}$. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que la sucesión $(\beta_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ es decreciente, y vemos que $f' \in H^p$ para todo $p < \frac{1}{2\beta_{\text{máx}}}$ donde $\beta_{\text{máx}} = \max\limits_{k\in\mathbb{Z}} \beta_k$.

□

Bibliografía

[1] Ahlfors, L. V, *Complex Variables.* McGraw-Hill, 1978.

[2] Ahlfors, L. V, *Conformal Invariants, Topics in Geometric Function Theory.* McGraw-Hill, 1973.

[3] A.B. Aleksandrov, *Multiplicity of boundary values of inner functions*, Soviet J. Cont. Math. Analysis, 22 (1987), 74-78.

[4] A.B. Aleksandrov, *On the maximum principle for pseudocontinuable functions*, Zap. Nauchn. Sem. POMI, 217 (1994), 16-25. (Translation in J. Math. Sci. (New York), 85 (1997), 1767- 1772.)

[5] A.B. Aleksandrov, *Essays on nonlocally convex Hardy classes*, Complex analysis and spectral theory (Leningrad, 1979/1980), Springer, Berlin, 1981, pp 1-89.

[6] Chuaqui, M., P.L. Duren, and B. Osgood, *Schwarzian derivatives of convex mappings.* Ann. Acad. Scien. Fen. Math. 36, 2011, 449–460.

[7] Chuaqui, M., P.L. Duren, and B. Osgood, *Concave conformal mappings and pre-vertices of Schwarz-Christoffel mappings.* Porc. AMS 140 (2012), 3495-3505.

[8] J.A. Cima and A. Matheson, *Essential norms of composition operators and Aleksandrov measures*, Pacific J. Math., 179 (1997), 59-64.

[9] 5. D.N. Clark, *One dimensional perturbations of restricted shifts*, J. Analyse Math., 25 (1972), 169-191.

[10] Duren, P. L, *Univalent functions.* Springer–Verlag, New York, 1983.

[11] Duren, P. L, *Theory of H^p Spaces.* Academic Press. 1970.

[12] Folland, G. B, *Real Analysis* New York, 1984.

[13] Garnett, J. B, *Bounded analytic functions.* Graduate Texts in Mathematics, 236. Springer, New York, 2007.

[14] Gehring, F. W., and Ch. Pommerenke, *On the Nehari univalence criterion and quasicircles.* Comment. Math. Helv. 59, 1985, 226–242.

[15] Hofman, K, *Banach spaces of analytic functions.* Dover Publications Inc, New York, 1988.

[16] Kim, S.-A., and D. Minda, *The hyperbolic and quasihyperbolic metrics in convex regions.* J. Analysis 1, 1993, 109–118.

[17] Koepf, W, *Convex functions and the Nehari univalence criterion.* In: Complex analysis, Joensuu 1987, edited by I. Laine, S. Rickman and T. Sorvali, Lecture Notes in Math. 1351, Springer–Verlag, Berlin, 1988, 214–218.

[18] Koepf, W, *Extrempunkte und Stützpunkte in Familien nichtverschwindender schlichter Funktionen.* Complex Variables 8, 1987, 153-171

[19] Koepf, W, *On the coefficients of symmetric funcions of bounded boundary rotation.* Proc. Amer. Math. Soc. 105, 1989, 324-329.

[20] A. Matheson and M. Stessin, *Applications of spectral measures*, Contemp. Math. 393 Amer. Math. Soc., (2006), 15-27.

[21] Nehari, Z, *A property of convex conformal maps.* J. Analyse Math. 30, 1976, 390–393.

[22] Nevanlinna, R, *Remaeques sur la lemma de Schwarz.* Comptes Rendu Acad Sci. Paris 188, 1929, 1027-1029.

[23] A. Poltoratski, *On the distribution of boundary values of Cauchy integrals*, Proc. Amer. Math. Soc., 124 (1996), 2455-2463.

[24] Pommerenke, Ch, *Boundary behaviour of conformal maps.* Springer–Verlag, Berlin, 1992.

[25] Rudin, W, *Real and complex analysis* McGraw-Hill Book Co, New York, 1987.

[26] Riera, G., H. Carrasco, and R. Preiss, *The Schwarz-Christoffel Conformal Mapping for "Polygons" with Infinitely Many Sides*, Int. J. Math. Math. Sci. 2008, Art. ID350326, 20 pp.

[27] Salimov, R.B. and Shabalin, P.L, *Mapping of a Halp-Plane onto polygon with infinitely many vertices* Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavednii, 2009, Nu 10, pp 76-80.

[28] J.H. Shapiro, *Aleksandrov measures used in essential norm inequalities for composition operators*, J. Operator Theory, 40 (1998), 133-146.

[29] V.I. Smirnov, *Sur les valeurs limites des fonctions, régulières à línterieur dún cercle*, Journal de la Sociéte Phys-Math. de Léningrade 2 (1929), 22-37

[30] Trimble, S. Y, *A coefficient inequality for convex univalent functions.* Proc. Amer. Math. Soc. 48, 1975, 266–267.