UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN

A_∞−ÁLGEBRAS EN GEOMETRÍA RIEMANNIANA

POR
MARÍA JOSÉ MORENO SILVA

Profesor Guía:
Dr. Enrique Reyes García

Tesis presentada al Departamento de Matemática y Ciencia de la Computación de la Facultad de Ciencia de la Universidad de Santiago de Chile, para optar al grado de Doctor en Ciencia Mención Matemática.

Santiago - Chile
Mayo, 2019

Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia
Departamento de Matemática y Ciencia de la Computación

Los miembros de la Comisión Calificadora certifican que han leído y recomiendan a la Facultad de Ciencia para la aceptación la tesis titulada "$A_\infty-$**álgebras en Geometría Riemanniana**" de **María José Moreno Silva** en cumplimiento parcial de los requisitos para obtener el grado de Doctor en Ciencia Mención Matemática. Comisión compuesta por:

Profesor Guía
Dr. Enrique Reyes García

Profesor Informante
Dra. Sinem Odabaşi

Profesor Informante
Dr. Daniel Pons Rubio

Director Depto. Matemática
y Ciencias de la Computación
Dr. Rafael Labarca Briones

Profesor Informante
Dr. Cristóbal Rivas Espinosa

Director Doctorado Ciencia
Mención Matemática
Dr. Cristóbal Rivas Espinosa

Mayo, 2019

Resumen

A_∞–Álgebras en Geometría Riemanniana

María José Moreno Silva
Mayo/2019

Director: Dr. Enrique Reyes García

Probaremos una relación entre la estructura canónica de $A_\infty-$álgebra en una variedad Riemanniana compacta $n-$dimensional inducida por el complejo de De Rham y una A_∞ estructura "torcida" definida con ayuda de endomorfismos de $1-$formas. Estas estructuras serán obtenidas con el teorema de Zhou-Merkulov sobre las dga's $(A, d, \cdot)$ and $(A, d_h, \cdot)$.

Más generalmente, probaremos que a partir de las mismas álgebras graduadas, pero con diferenciales distintos, es posible construir estructuras cuasi-isomorfas, a nivel de $A_\infty-$álgebras, en sus respectivos complejos de cohomología. Como una aplicación probaremos que si M es una variedad Riemanniana sin frontera, compacta, orientable y de dimensión n, el complejo de cohomología de De Rham asociado a los espacios de $k-$formas $(\Omega(M), d, \wedge)$, donde d es la derivada exterior y $\wedge$ el producto exterior, y la cohomología asociada a $(\Omega(M), d_h, \wedge)$ en que h es un endomorfismo de $1-$formas, son estructuras $A_\infty-$cuasi-isomorfas cuando $\underline{h}$ es invertible o induce una equivalencia de cocadenas.

Palabras Claves: $A_\infty-$álgebras; Descomposición de Hodge; Geometría Riemanniana.

Abstract

A_∞–ALGEBRAS IN RIEMANNIAN GEOMETRY

María José Moreno Silva
May/2019

Advisor: Dr. Enrique Reyes García

We show a relation between the canonical structure of $A_\infty-$algebra in a compact $n-$dimensional Riemannian manifold induced by the De Rham complex and a "twisted" A_∞ structure defined with the help of endomorphisms of $1-$forms. These structures will be obtained with Zhou-Merkulov's theorem on the dga's $(A, d, \cdot)$ and $(A, d_h, \cdot)$.

More generally, we show that from the same graded algebras, but not the same differential, it is possible to construct quasi-isomorphic A_∞ structures on their respective cohomology complexes. As an application we show that, if M is a compact orientable $n-$dimensional Riemannian manifold without boundary, the De Rham cohomology associated to $k-$forms spaces $(\Omega(M), d, \wedge)$ where d and $\wedge$ are a exterior derivate and exterior product, respectively, and the cohomology associated to $(\Omega(M), d_h, \wedge)$ in which h is an endomorphism of $1-$forms, are quasi-isomorphic $A_\infty-$structures when $\underline{h}$ is a invertible or induces a cochain equivalence.

Keywords: $A_\infty-$algebras; Hodge decomposition; Riemannian Geometry.

"Mathematics, rightly viewed, possesses not only truth, but supreme beauty - a beauty cold and austere, like that of sculpture, without appeal to any part of our weaker nature, without the gorgeous trappings of painting or music, yet sublimely pure, and capable of a stern perfection such as only the greatest art can show."

(Las Matemáticas, consideradas correctamente, poseen no sólo la verdad, sino también una belleza suprema - una belleza fría y austera, como la de la escultura, sin apelar a ninguna parte de nuestra naturaleza más débil, sin los hermosos adornos de la pintura o la música, pero sublimemente pura y capaz. De una perfección severa como la que solo el mejor arte puede mostrar.)

Bertrand Russell (1872-1970)
Filósofo, matemático, escritor y crítico social

Agradecimientos

Como lo he dicho en más de una oportunidad, esta es la parte, en mi opinión, más complicada de escribir, pues debes agradecer a las personas que te acompañaron y ayudaron en el proceso, pero ahí viene la complicación, en qué orden debo agradecer, qué palabras le dedico a cada una de las personas, también que no se nos vaya a olvidar las instituciones que financiaron este proceso, porque además de estar estipulado en sus bases, sin el dinero proporcionado esta tesis no estaría hoy viendo la luz.

Entonces comenzaré con la persona, que a mi parecer, me ha apoyado en este proceso más que cualquiera otra, esta gran persona es mi director de tesis, mi profe Enrique, que desde el magíster ha confiado en mí y en mi gusto poco tradicional para las matemáticas, él siempre ha estado dispuesto a brindarme apoyo académico y personal, nunca hubo un día, incluso cuando me desaparecía, que no me entendiera y no me apoyara. Le agradezco cada conversación, cada enseñanza, cada comentario, cada incentivo y apoyo, sobre todo cuando se trataba de las latosas cartas de recomendación, que han sido varias por semestre.

No puedo dejar de agradecer a mi familia: mi mamá, mi mamá Nena, mi hermana, mi cuñado, mi sobrina y a mi "tatapapadrino" (tatá - papá y padrino; sí, recibía tres regalos de él), ellos con sus palabras de aliento y preguntándome, aún sin entender la matemática que está en esta tesis, como iba avanzando, como estaba la U, como iba la tesis, etc.

Quiero agradecer a mis amigos: Janis, por los días en los cerros cuando ambas escribíamos nuestras respectivas tesis y por estar en las buenas, en la malas y sobretodo en las peores; Claudio Dubó, por todos los buenos momentos (y malos también) que hemos compartido todos estos años, por estar pendiente de cada paso que doy; Andrés, por dejarme su casa en los cerros donde se terminó de escribir esta tesis y por dejarme conocerte; mis compañeros del doctorado, Rodolfo, José, Claudio Leal, Claudio Gallegos, por todos las conversaciones que no tenían nada que ver con matemática; Evelyn Aguilar, por facilitar cada uno de los trámites que debía hacer en estos años en el doctorado y por todas esas conversaciones que nada tenían que ver con el Programa.

Agradezco también a Urtzi Buijs, Antonio Viruel, Antonio Díaz y Aniceto Murillo, profesores de la Universidad de Málaga, donde realicé mi pasantía doctoral, por la buena acogida y el recibimiento que me proporcionaron. Urtzi muchísimas gracias por todas las conversaciones matemáticas que tuvimos. A mis amigos del "despacho": Luis, a mi co-tocallo Pepe (J. M. Moreno,) y a mi querido amigo David, sin ti los días en Málaga no hubiesen sido tan geniales.

Agradezco a la Universidad de Santiago de Chile, mi querida Usach. Agradezco a la Vicerrectoría de Postgrado por el financiamiento a congresos, a mi primer año del doctorado y al año de la escritura de esta tesis, mi gratitud a la Sra. Paula Ávila, por toda las gestiones para conseguir esos financiamientos, por preguntarme por el avance de mi trabajo cada vez que iba "molestarla" por algún problema que tenía y que ella solucionaba con mucha voluntad. Y por último agradezco a CONICYT por la beca doctorado nacional proporcionada.

María José Moreno Silva
Mayo, 2019

Tabla de Contenidos

Introducción

La noción de estructura de A_∞-álgebra o álgebras de homotopía fuerte (abreviado sha-algebra, por sus siglas en inglés) fue introducida por James Dillon Stasheff en su artículo titulado "Homotopy Associativity of $H-$spaces. II" publicado en Agosto de 1963 en *Transactions of the American Mathematical Society*, ver [18]. En más detalle, Stasheff define $A_\infty-$álgebras como una herramienta para el estudio de leyes asociativas desde el punto de vista de la teoría de homotopía en $H-$espacios, como una generalización de un grupo topológico, donde la característica esencial que se conserva es una multiplicación continua $\mu : X \times X \to X$ y un elemento neutro $e \in X$ tal que las dos funciones $X \xrightarrow{\mu(-,e)} X$ y $X \xrightarrow{\mu(e,-)} X$ sean homotópicas a la identidad. De manera poco precisa una $A_\infty-$álgebra es un espacio vectorial graduado equipado con una cantidad infinita de operaciones multilineares $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots$ satisfaciendo ciertas condiciones de compatibilidad, una definición rigurosa puede ser consultada en el capítulo 2.

Autores como Kajiura [5, 6], Palmieri et al. [26, 27], utilizan $A_\infty-$estructuras como herramientas para sus estudios. Kajiura en su artículo "An $A_\infty-$Structure for lines in a plane", [6], construye explícitamente una $A_\infty-$estructura para una categoría de Fukaya de un número finito de líneas (en una subvariedad Lagrangiana de una variedad simpléctica) en $\mathbb{R}^2$. Palmieri et al. [26], en el artículo "Regular algebras of dimension 4 and their $A_\infty-$Ext-algebras" construye algunas familias de álgebras regulares Artin-Schelter de dimensión 4, donde una de las herramientas principales son las $A_\infty-$Ext$-$álgebras. También Stasheff [18, p. 301] señala que las $A_\infty-$estructuras sobre la cohomología de un espacio topológico determinan espacios de loops, y Kadeishvili [4] aplica estas estructuras en la cohomología de los espacios fibrados.

Un problema importante es la construcción de ejemplos de $A_\infty-$álgebras. Merkulov en el año 1999, en su artículo "Strong homotopy algebras of a Kähler manifold" [13] construye una estructura de A_∞-álgebra en la cohomología asociada a un complejo como un caso especial (y explícito) del siguiente teorema de Kadeishvili.

Teorema de Kadeishvili: *Sea A un $A_\infty-$álgebra y sea $H(A)$ el grupo de cohomología de A. Existe una estructura de $A_\infty-$álgebra en $H(A)$ con $\mu_1 = 0$, μ_2 inducido por la multiplicación en A, y las multiplicaciones superiores construídas desde la estructura $A_\infty-$álgebra de A, tal que existe un cuasi-isomorfismo de $A_\infty-$álgebras $F : H(A) \to A$, que es levantamiento del $A_\infty-$morfismo identidad de $H(A)$. Esta estructura de $A_\infty-$álgebra sobre $H(A)$ es único salvo $A_\infty-$isomorfismos.*

El teorema de Kadeishvili es un teorema de existencia, y no presenta explícitamente las multiplicaciones de orden superior. En cambio Merkulov construyó una clase especial de multiplicaciones superiores para $H(A, d)$, que pueden ser definidas inductivamente. Interesantemente, el artículo de Merkulov contiene un error que ha limitado un tanto su uso. Una de las metas de esta tesis es corrigir este error y re-hacer el Modelo de Merkulov.

Zhou [29] demostró que el Modelo de Merkulov puede usarse para construir una estructura de $A_\infty-$álgebras en el espacio de las formas armónicas de cualquier variedad Riemanniana cerrada orientada, y revisó la teoría de Hodge abstracta de un álgebra diferencial graduada (DGA). La teoría de Hodge, ver [25], fue desarrollada alrededor de 1930 por el matemático escocés William Vallance Douglas Hodge. Es una herramienta importante en geometría diferencial, para el estudio de formas diferenciales en una variedad diferenciable M. Wagner [25] afirma que esta teoría proporciona información sobre los grupos de cohomología de M, mediante el uso del operador laplaciano asociado a una métrica de Riemann definida en la variedad. Del teorema de Zhou es posible desprender que si una dga presenta una descomposición de Hodge, entonces es posible dotar a su complejo de cohomología asociado una estructura natural de $A_\infty-$álgebra, pero no se específica explícitamente cada operación de orden superior. En cambio del teorema de Merkulov es posible, conociendo la existencia de la estructura de $A_\infty-$álgebra en el complejo de cohomología asociado, construir inductivamente cada una de las operaciones de orden superior.

Consideraremos como un solo teorema los resultados principales de cada uno de estos autores: Zhou y Merkulov. Ellos no tienen un trabajo en colaboración, pero sus ideas respectivas son pertinentes, para nuestro trabajo, para juntarlas en un solo resultado, que llamamos **Teorema de Zhou-Merkulov**.

Teorema de Zhou-Merkulov: *Para toda dga* $(A, d, \cdot)$ *con métrica euclidiana o hermitiana tal que* d *tiene un adjunto formal* d^**,* A *tiene descomposición de Hodge* $A = \mathcal{H} \oplus \operatorname{img} d \oplus \operatorname{img} d^*$*, y existe una estructura de* $A_\infty-$*álgebra en* $\mathcal{H}$ *con multiplicaciones superiores* $m_1 = d$*,* $m_2 = \circ$*, y para* $n \geq 3$ $m_n = (id - [[d, G_d d^*]])\, \lambda_n = pr_{\mathcal{H}} \lambda_n$*, con* λ_n*, ver difinición 2.7.*

Eiseman y Stone, inspirados por el trabajo de Frölicher y Nijenhuis [16], en 1974 obtienen una generalización del clásico teorema de descomposición de Hodge en el contexto de variedades Riemannianas M, ver [20]. Para esto, consideraron una $1-$forma vectorial $\underline{h}$ no singular, tal que el tensor de Nijenhuis, introducido en la tesis de doctorado de Albert Nijenhuis, se anula. Ellos probaron que existe una derivada exterior d_h, asociada a M, distinta a la derivada exterior usual. Los autores probaron que la derivada exterior d_h tiene un adjunto δ_h que respeta el producto interno usual entre formas diferenciales, ver [19, 20]. Este hecho les permitió definir un operador diferencial de segundo orden Λ_h, que es una generalización del operador Laplace-Beltrami. Y consecuentemente obtuvieron una generalización del clásico teorema de la descomposición de Hodge.

Inspirados en los trabajos de Stasheff, Merkulov, Zhou, y Eiseman y Stone, surge la siguiente pregunta ¿Se podrá "*algebreizar*" lo realizado por Eiseman y Stone y obtener, usando el teorema Zhou-Merkulov, estructuras A_∞ diferentes (o quizás cuasi-isomorfas) a la obtenida de la cohomología de De Rahm?

Uno de los puntos principales en la motivación para responder esta pregunta, y por lo tanto realizar este trabajo, fue profundizar en el estudio de estructuras A_∞-álgebra con el objetivo de otorgar al complejo de cohomología asociado a un espacio vectorial graduado cualquiera una estructura de A_∞-álgebra. Otra motivación, dada la dificultad en construir ejemplos de $A_\infty-$álgebras, fue determinar, en caso de existir, una estructura de A_∞-álgebras sobre variedades Riemannianas compactas diferente a la que se puede obtener a partir de la cohomología de De Rham. Y si existe, compararlas y contrastarlas.

El objetivo de este trabajo es, por lo tanto, mostrar una relación entre la estructura canónica de $A_\infty-$álgebra en una variedad Riemanniana compacta $n-$dimensional inducida por el complejo de De Rham y una A_∞ estructura "torcida" definida con ayuda de endomorfismos de $1-$formas. Estas estructuras son obtenidas con el teorema de Zhou-Merkulov sobre las dga's $(A, d, \cdot)$ and $(A, d_h, \cdot)$. Más generalmente, probamos que a partir de las mismas álgebras graduadas, pero con diferenciales distintos d y d_h, es posible construir estructuras cuasi-isomorfas, a nivel de $A_\infty-$álgebras, en sus respectivos complejos de cohomología. Como una aplicación probamos que si M es una variedad Riemanniana sin frontera, compacta, orientable y de dimensión n, el complejo de cohomología de De Rham asociado a los espacios de $k-$formas $(\Omega(M), d, \wedge)$, donde d es la derivada exterior y $\wedge$ el producto exterior, y la cohomología asociada a $(\Omega(M), d_h, \wedge)$ en que h es un endomorfismo de $1-$formas, son estructuras $A_\infty-$cuasi-isomorfas cuando $\underline{h}$ es invertible o induce una equivalencia de cocadenas.

A continuación se enuncian nuestros resultados principales:

Teorema A:
Sea $\underline{h} : A^1 \to A^1$ una función lineal tal que existe $\underline{h}^{-1}$ y $[\![\underline{h}, \underline{h}]\!] = 0$; entonces existe un cuasi-isomorfismo de dga's, $\tilde{h} : (A, d, \cdot) \to (A, d_h, \cdot)$. Además, $\tilde{h}$ induce un cuasi-isomorfismo de $A_\infty-$álgebra entre $\left(\mathcal{H}, \{m_n\}_{n\geq 1}\right)$ y $\left(\mathcal{H}_h, \{\mu_n\}_{n\geq 1}\right)$.

Teorema B:
Sea $\underline{h} : A^1 \to A^1$ un endomorfismo tal que el morfismo $\tilde{h}$ es una equivalencia de cocadenas y suponga además $\mathcal{H}$ de tipo finito y $[\![\underline{h}, \underline{h}]\!] = 0$. Entonces existe un cuasi-isomorfismo de dga's $h : (A, d, \cdot) \to (A, d_h, \cdot)$. Además, $\tilde{h}$ induce un cuasi-isomorfismo de $A_\infty-$álgebra entre $\left(\mathcal{H}, \{m_n\}_{n\geq 1}\right)$ y $\left(\mathcal{H}_h, \{\mu_n\}_{n\geq 1}\right)$.

Aplicación:

Sea M una variedad compacta diferenciable de dimensión n, considere el espacio de las $k-$formas diferenciables, $\Omega^*(M) = \bigoplus_{k=0}^{n} \Omega^k(M)$ con diferencial d y producto $\wedge$, derivada exterior y producto exterior, respectivamente. Sea además

$$\underline{h} : \Omega^1(M) \to \Omega^1(M)$$

un endomorfismo tal que el morfismo $\tilde{h}$ es una equivalencia de cocadenas y $[\![\underline{h}, \underline{h}]\!] = 0$. Entonces existe un cuasi-isomorfismo de dga's $h : (\Omega^*(M), d, \wedge) \to (\Omega^*(M), d_h, \wedge)$. Además, $\tilde{h}$ induce un cuasi-isomorfismo de $A_\infty-$álgebra entre $\big(H_{dR}(M), \{m_n\}_{n\geq 1}\big)$ y $\big(\mathcal{H}_h, \{\mu_n\}_{n\geq 1}\big)$, donde $H_{dR}(M)$ es la cohomología de De Rham.

La tesis es organizada como sigue:

En el capítulo 1 estableceremos definiciones y convenciones básicas sobre álgebras graduadas. Comenzaremos definiendo qué entendemos por un espacio vectorial graduado, un álgebra graduada y un álgebra diferencial graduada. También definimos complejo de cocadena y cohomología de complejos. Al finalizar este capítulo presentamos como ejemplo al complejo de De Rham, complejo construído en el conjunto de las $k-$formas diferenciales de una variedad diferenciable.

En el capítulo 2 definimos cuándo un complejo tiene estructura de $A_\infty-$álgebra. Además definimos morfismos entre espacios vectoriales que tengan estructura de $A_\infty-$álgebra, expondremos algunos casos particulares de morfismos y definimos un cuasi-isomorfismos entre estas estructuras. Luego, se construirá el Modelo de Merkulov. Al finalizar el capítulo probamos que el Modelo de Merkulov puede ser visto como un teorema de transferencia homotópica.

En el capítulo 3 mostramos que una dga A con métrica (euclideana o hermitiana) siempre posee descomposición de Hodge. Además mostramos, usando la idea de Zhou, que el complejo de formas armónicas asociado a la dga A tiene una estructura natural de $A_\infty-$álgebra. Mostramos también que si una dga está dotada de métrica euclidiana o hermitiana, siempre admite una descomposición de Hodge.

En el capítulo 4 presentamos los resultados principales de nuestra investigación que es: a partir de las mismas álgebras graduadas, pero con diferenciales distintos, uno “perturbación” del otro, es posible construir estructuras cuasi-isomorfas, a nivel de $A_\infty-$álgebras, en sus respectivos complejos de cohomología.

La decisión de escribir esta tesis en español y de describir, dentro de lo posible, detalladamente cada capítulo, fue debido a que después de una revisión bibliográfica, el estudio de álgebras diferenciales graduadas, de estructuras $A_\infty-$álgebras y de descomposición de Hodge generalizada es practicamente inexistente en este idioma.

Capítulo 1

Álgebra Diferencial Graduada (dga)

El presente capítulo tiene como objetivo establecer las definiciones y convenciones básicas sobre álgebras graduadas. Comenzaremos definiendo qué entenderemos por un espacio vectorial graduado, un álgebra graduada y un álgebra diferencial graduada. También definiremos complejo de cocadena y cohomología de complejos.

En este capítulo trabajaremos sobre un cuerpo arbitrario $\mathbb{K}$ de característica diferente de 2.

Para simplificar la notación, diremos "lineal", "bilineal", "espacio vectorial", etc. en vez de "$\mathbb{K}-$lineal", "$\mathbb{K}-$bilineal", "espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$"; y a los funtores $Hom_{\mathbb{K}}(-,-)$ y $-\otimes_{\mathbb{K}}-$ los denotaremos simplemente por $Hom(-,-)$ y $-\otimes-$.

1.1 Espacio Vectorial Graduado

Las definiciones y propiedades que estableceremos en esta sección son esencialmente las mismas a las utilizadas por Félix, Halperin y Thomas [21] y May [12], con algunos cambios y con detalles no tan evidentes que haremos notar a medida que aparecen.

Definición 1.1 (Espacio Vectorial Graduado)**:**
Un ***espacio vectorial graduado*** V*, es una familia* $\{V^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *de espacios vectoriales sobre el cuerpo* $\mathbb{K}$*. Un elemento* $v \in V^i$ *es un elemento del espacio vectorial graduado* V *de grado* i*. Denotaremos el grado de* v *por* $|v| = i$*.*

Notemos que podemos ver como un espacio vectorial graduado como una sucesión de espacios vectoriales:

$$V = \left\{\ldots, V^{-3}, V^{-2}, V^{-1}, V^0, V^1, V^2, V^3, \ldots\right\}.$$

Con esta definición, podemos ver un elemento perteneciente a V como un par (v, i) donde $v \in V^i$ y denotamos su grado como $|v| = i$. También diremos que V es concentrado en grados $j \in J \subseteq \mathbb{Z}$ si $V^i = 0$, $i \notin J$; en este caso, escribimos $V = \{V^j\}_{j\in J}$.

Notemos que si M es un espacio vectorial, los siguientes espacios vectoriales graduados A, B son diferentes:

$$A = \left\{A^i\right\} = \begin{cases} M, & \text{if } i = 0 \\ 0, & \text{if } i \neq 0 \end{cases} \qquad B = \left\{B^i\right\} = \begin{cases} M, & \text{if } i = 1 \\ 0, & \text{if } i \neq 1 \end{cases}$$

A está concentrado en grado 0, mientras que B está concentrado en grado 1.

Las nociones estándar para espacios vectoriales se heredan al contexto graduado. Así:

Definición 1.2 (Subespacio vectorial graduado)**:**
Sea V *un espacio vectorial graduado. Un* ***subespacio vectorial graduado*** $V' \subset V$ *es un espacio vectorial graduado* $\{V'^i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ *donde* V'^i *es un subespacio vectorial de* V^i*.*

Definición 1.3 (Cociente)**:**
Sea V un espacio vectorial graduado y V' un subespacio vectorial graduado de V, el ***cociente*** $\left.V\middle/V'\right.$ *es una familia de espacios vectoriales, donde para cada $i \in \mathbb{Z}$,* $\left(\left.V\middle/V'\right.\right)^i = \left.V^i\middle/V'^i\right.$.

Definición 1.4 (Suma Directa)**:**
La ***suma directa*** $\bigoplus_{\alpha\in\Delta} V(\alpha)$ *de espacios vectoriales graduados $V(\alpha)$, $\alpha \in \Delta$, es la familia* $\left\{\left(\bigoplus_{\alpha\in\Delta} V(\alpha)\right)^i\right\}_{i\in\mathbb{Z}} = \left\{\bigoplus_{\alpha\in\Delta} V(\alpha)^i\right\}_{i\in\mathbb{Z}}$.

Definición 1.5 (Producto Directo)**:**
El ***producto directo*** $\prod_{\alpha\in\Delta} V(\alpha)$ *de espacios vectoriales graduados $V(\alpha)$, $\alpha \in \Delta$, es la familia*

$$\left\{\left(\prod_{\alpha\in\Delta} V(\alpha)\right)^i\right\}_{i\in\mathbb{Z}} = \left\{\prod_{\alpha\in\Delta} V(\alpha)^i\right\}_{i\in\mathbb{Z}}.$$

El producto directo entre dos espacios vectoriales graduados V y W es escrito $V \times W$.

Más detalles (explicaciones y ejemplos) sobre estos tópicos pueden ser encontrados en Moreno [14, sec. 1.1]. La siguiente definición proporcionará una relación entre espacios vectoriales graduados.

Definición 1.6 (Función Lineal Graduada de grado i)**:**
Sean los espacios vectoriales graduados V y W. Una ***función lineal graduada*** *$f : V \to W$ de grado i, es una familia de funciones lineales $\{f^j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ donde $f_j : V^j \to W^{j+i}$ para cualquier $j \in \mathbb{Z}$.*

Es interesante observar cómo la definición anterior determina los siguientes subespacios vectoriales graduados: $\ker(f) \subset V$ e $\operatorname{img}(f) \subset W$, donde

$$\ker(f) = \{(\ker f)_j\}_{j\in\mathbb{Z}} = \{\ker(f_j)\}_{j\in\mathbb{Z}},$$

$$\operatorname{img}(f) = \{(\operatorname{img} f)_j\}_{j\in\mathbb{Z}} = \{\operatorname{img}(f_{j-i})\}_{j\in\mathbb{Z}}.$$

Observación 1.7: La expresión "función lineal" se usará para referirse a una función lineal graduada. Además, el símbolo $|f|$ se usará para denotar el grado de la función lineal f. $\star$

Proposición 1.8:
Si $f : V \to V'$ y $g : V' \to W$ son funciones lineales entre espacios vectoriales graduados, entonces la función $g \circ f : V \to W$ es una función lineal de grado $|f| + |g|$.

<u>*Demostración*</u>: En efecto, $(g \circ f)_j : V^j \xrightarrow{f} V'^{j+|f|} \xrightarrow{g} W^{j+|f|+|g|}$, de modo que $|g \circ f| = |f| + |g|$. La linealidad es inmediata. $\square$

Definición 1.9 (Producto Fibrado)**:**
Sean $\{V_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$ una familia arbitraria de espacios vectoriales graduados sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$, Z un espacio vectorial graduado sobre $\mathbb{K}$ y $\{f_\alpha : V_\alpha \to Z\}_{\alpha\in\Delta}$ una familia de funciones lineales graduadas de grado 0.
*El **producto fibrado** $\left(\prod_{\alpha\in\Delta}\right)_Z (V_\alpha)$ es un subespacio vectorial graduado de $\prod_{\alpha\in\Delta} (V_\alpha)$ que consiste en los elementos $v = \{v_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$ satisfaciendo $f_\alpha(v_\alpha) = f_\beta(v_\beta)$, con $\alpha, \beta \in \Delta$. El producto fibrado entre V y W es escrito $V \times_Z W$.*

Notemos que si $v = \{v_\alpha, v_\beta, v_\gamma \ldots\} \in \left(\prod_{\alpha\in\Delta}\right)_Z (V_\alpha)$ es de grado n, entonces $n = |v_\alpha| = |v_\beta| = |v_\gamma| = \ldots$, esto queda implícito por la definición de producto directo.

Por ejemplo, si $\Delta = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon\}$, entonces

$$\prod_{a\in\Delta} (V_a) = V_\alpha \times V_\beta \times V(\gamma) \times V_\delta \times V_\epsilon$$

es el producto directo. Suponga $f_\alpha : V_\alpha \to Z$, $f_\beta : V_\beta \to Z$, $f_\gamma : V_\gamma \to Z$, $f_\delta : V_\delta \to Z$ y $f_\epsilon : V_\epsilon \to Z$ funciones lineales de grado 0. Sea $v \in \prod_{a\in\Delta} (V_a)$, luego $v = \{v_\alpha, v_\beta, v_\gamma, v_\delta, v_\epsilon\}$. Entonces $v \in \left(\prod_{a\in\Delta}\right)_Z (V_a)$ si se cumple que $f_\alpha(v_\alpha) = f_\beta(v_\beta) = f_\gamma(v_\gamma) = f_\delta(v_\delta) = f_\epsilon(v_\epsilon)$.

Gráficamente, si π_a es la función proyección en V_a, con $a \in \Delta$, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
 & & \left(\prod\limits_{a\in\Delta}\right)_Z (V_a) \arrow[dll, "\pi_\alpha"'] \arrow[dl, "\pi_\beta"] \arrow[d, "\pi_\gamma"'] \arrow[dr, "\pi_\delta"'] \arrow[drr, "\pi_\epsilon"] & & \\
V_\alpha \arrow[drr, "f_\alpha"'] & V_\beta \arrow[dr, "f_\beta"] & V_\gamma \arrow[d, "f_\gamma"'] & V_\delta \arrow[dl, "f_\delta"'] & V_\epsilon \arrow[dll, "f_\epsilon"] \\
 & & Z & &
\end{tikzcd}$$

En la siguiente definición, presentamos el objeto principal que se necesita para definir las estructuras $A_\infty-$ álgebras, que veremos en capítulo 2.

Definición 1.10 (Producto Tensorial)**:**
*El **producto tensorial** $V \otimes W$ de espacios vectoriales graduados es definido por*

$$(V \otimes W)^i = \bigoplus_{j+k=i} \left(V^j \otimes W^k\right).$$

Podemos definir la $i-$ésima componente del producto tensorial de V y W como $(V \otimes W)^i = \bigoplus\limits_j \left(V^j \otimes W^{i-j}\right)$.
$A^{\otimes n}$ denota el espacio vectorial graduado $A^{\otimes n} = \underbrace{A \otimes A \otimes \ldots \otimes A}_{n \ veces}$, desde que la $i-$ésima componente de $A^{\otimes n}$ es definida como

$$\left(A^{\otimes n}\right)^i = \bigoplus_{i_1+\ldots+i_n=i} \left(A^{i_1} \otimes A^{i_2} \otimes \ldots \otimes A^{i_n}\right)$$

Proposición 1.11:
Sean $f : V \to V'$, $g : W \to W'$ funciones lineales graduadas de grado $|f|$ y $|g|$, respectivamente. La función lineal $f \otimes g : V \otimes W \to V' \otimes W'$ definida por

$$(f \otimes g)\ (v \otimes w) = (-1)^{|g||v|} f(v) \otimes g(w)$$

tiene grado $|f| + |g|$.

Demostración: Debemos probar que $((f \otimes g)\ (v \otimes w))^i \in (V' \otimes W')^{i+|f|+|g|}$ para todo $i \in \mathbb{Z}$. Notemos que un elemento básico $v \otimes w$ de $(V \otimes W)^i$, satisface que $v \in V^j$ y $w \in W^k$ con $j + k = i$. Sigue que $f(v) \in V'^{j+|f|}$ y $g(w) \in W'^{k+|g|}$, así $\left|(-1)^{|g||v|} f(v) \otimes g(w)\right| = j + k + |f| + |g| = i + |f| + |g|$. $\square$

Nota: El signo $(-1)^{|g|\cdot|v|}$ de la definición de la función $f \otimes g$ es importante para respetar la regla de Kozul en álgebras graduadas conmutativas y en álgebras diferenciales graduadas conmutativas, que presentaremos más adelante.

1.1.1 Complejo de Cocadena y Cohomología de Complejos

El objetivo de esta subsección es definir un diferencial sobre un espacio vectorial graduado, introducir su cohomología y establecer propiedades de esta cohomología.

Definición 1.12 (Diferencial)**:**
Un ***diferencial*** *en un espacio vectorial graduado* $M = \{M^i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ *es una función lineal* $d : M \to M$ *de grado* $(+1)$ *tal que* $d^2 = 0$.

Tenemos el diagrama

$$\cdots \longrightarrow M^{i-1} \xrightarrow{d_{i-1}} M^i \xrightarrow{d_i} M^{i+1} \longrightarrow \cdots$$

Notemos que $d = \{d_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$, $d_i : M^i \to M^{i+1}$ y $d_{i+1} \circ d_i = 0$, a saber img $d_{i-1} \subset$ ker d_i.

Definición 1.13 (Complejo de Cocadena)**:**
Sea M *un espacio vectorial graduado y* d *un diferencial en* M. *El par* (M, d) *es un* ***complejo de cocadena***.

Ejemplo 1.14:
Sean (M, d^M) *y* (N, d^N) *complejos de cocadenas, entonces* $(Hom(M, N), d^{Hom})$ *y*

$(M \otimes N, d^{\otimes})$ también lo son, donde los diferenciales d^{Hom} y $d^{\otimes}$ se definen como:

$$d^{Hom}(f) = d^N f - (-1)^{|f|} f d^M \qquad y \qquad d^{\otimes}(m \otimes n) = d^M m \otimes n + (-1)^{|m|} m \otimes d^N n.$$

Probaremos que efectivamente $d^{Hom} \circ d^{Hom} = 0$ y $d^{\otimes} \circ d^{\otimes} = 0$

Como $d_j^{Hom}(f)(m) = d_{i+j}^N \circ f_i(m) - (-1)^j f_{i+1} \circ d_i^M(m)$, entonces $d_j^{Hom}(f) : M_i \to N_{i+j}$ y $|d_j^{Hom}(f)| = j+1$, por lo que $d_j^{Hom}(f) \in Hom(M,N)_{j+1}$ y así $|d^{Hom}| = 1$. Ahora,

$$\begin{aligned}
d_{j+1}^{Hom}\left(d_j^{Hom}(f)\right)(m) &= d_{j+1}^{Hom}\left(d_j^{Hom}(f)(m)\right) \\
&= d_{i+j+1}^N \left(d_j^{Hom}(f)\right)_i (m) - (-1)^{j+1}\left(d_j^{Hom}(f)\right)_{i+1} d_i^M(m) \\
&= d_{i+j+1}^N d_{i+j}^N f_i(m) - (-1)^j d_{i+j+1}^N f_{i+1} d_i^M(m) \\
&\quad -(-1)^{j+1}\left(d_{i+j+1}^N f_{i+1} d_i^M(m) - f_{i+2} d_{i+1}^M d_i^M(m)\right) \\
&= 0 - (-1)^j d_{i+j+1}^N f_{i+1} d_i^M(m) + (-1)^j d_{i+j+1}^N f_{i+1} d_i^M(m) + 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Observemos que $d_{i+j}^{\otimes}(m \otimes n) = d_i^M m \otimes n + (-1)^i m \otimes d_j^N n$

$$\begin{aligned}
d_{i+j+1}^{\otimes} \circ d_{i+j}^{\otimes}(m \otimes n) &= d_{i+j+1}^{\otimes}\left(d_i^M m \otimes n + (-1)^i m \otimes d_j^N n\right) \\
&= d_{i+j+1}^{\otimes}\left(d_i^M m \otimes n\right) + (-1)^{i+1} d_{i+j+1}^{\otimes}\left(m \otimes d_j^N n\right) \\
&= d_{i+1}^M d_i^M m \otimes n + (-1)^{i+1} d_i^M m \otimes d_j^N n \\
&\quad +(-1)^i d_i^M m \otimes d_j^N n - m \otimes d_{j+1}^N d_j^N n \\
&= 0 - (-1)^i d_i^M m \otimes d_j^N n + (-1)^i d_i^M m \otimes d_j^N n + 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Además, $|d^{\otimes}(m \otimes n)| = 1 + |m \otimes n| = 1 + |m| + |n|$.

Por lo tanto d^{Hom} y $d^{\otimes}$ son diferenciales.

Definición 1.15 (Suspensión de un Complejo)**:**
Sea un complejo de cocadenas (M,d). Se definen $sM = \{(sM)^i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ un espacio vectorial graduado donde $(sM)^i = M^{i+1}$ y $(sd) = \{(sd)_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ una función lineal graduada de grado 1, definida por $(sd)_i = d_{i+1}$. La ***suspensión*** *de (M,d) es el complejo $s(M,d) = (sM,(sd))$.*

Notemos que si $x \in M$ tiene grado i, entonces como elemento de sM, denotado como sx, sx tiene grado $i-1$.

Es posible definir morfismos entre dos complejos de cocadena (diferentes o no).

Definición 1.16 (Morfismo de Complejos)**:**
El morfismo de complejos $\varphi : (M, d^M) \to (N, d^N)$ es una función lineal $\varphi : M \to N$ de grado cero satisfaciendo $\varphi \circ d^M = d^N \circ \varphi$.

En otras palabras, el diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & M^{i-2} \arrow[r, "d^M_{i-2}"] \arrow[d, "\varphi_{i-2}"] & M^{i-1} \arrow[r, "d^M_{i-1}"] \arrow[d, "\varphi_{i-1}"] & M^{i} \arrow[r, "d^M_{i}"] \arrow[d, "\varphi_{i}"] & M^{i+1} \arrow[r, "d^M_{i+1}"] \arrow[d, "\varphi_{i+1}"] & M^{i+2} \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_{i+2}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & N^{i-2} \arrow[r, "d^N_{i-2}"'] & N^{i-1} \arrow[r, "d^N_{i-1}"'] & N^{i} \arrow[r, "d^N_{i}"'] & N^{i+1} \arrow[r, "d^N_{i+1}"'] & N^{i+2} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Esto es $\varphi_{i+1} \circ d^M_i = d^N_i \circ \varphi_i$ para todo $i \in \mathbb{Z}$.

Definición 1.17 (Morfismo Homotópico)**:**
*Sean φ y ψ dos morfismos de complejos $\varphi, \psi : (M, d^M) \to (N, d^N)$. Diremos que φ y ψ son **homotópicos** si existe una función lineal $h : M \to N$ de grado (-1) tal que $\varphi - \psi = h \circ d^M + d^N \circ h$. Esto es, para todo $i \in \mathbb{Z}$ tenemos $\varphi_i - \psi_i = h_{i+1} \circ d^M_i + d^N_{i-1} \circ h_i$.*

En otras palabras, el diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & M^{i-2} \arrow[r, "d^M_{i-2}"] \arrow[d, "\varphi_{i-2}-\psi_{i-2}"'] & M_{i-1} \arrow[r, "d^M_{i-1}"] \arrow[d, "\varphi_{i-1}-\psi_{i-1}"] \arrow[dl, "h_{i-1}"'] & M_{i} \arrow[r, "d^M_{i}"] \arrow[d, "\varphi_{i}-\psi_{i}"] \arrow[dl, "h_{i}"'] & M_{i+1} \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_{i+1}-\psi_{i+1}"] \arrow[dl, "h_{i+1}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & N_{i-2} \arrow[r, "d^N_{i-2}"'] & N_{i-1} \arrow[r, "d^N_{i-1}"'] & N_{i} \arrow[r, "d^N_{i}"'] & N_{i+1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Note que la definición asume la propiedad siguiente si φ, ψ son morfismos de complejos, entonces $\varphi - \psi$ es un morfismo de complejos. Esto se sigue de la linealidad de d^M y d^N.

Denotamos por $\varphi \sim \psi : (M, d^M) \to (N, d^N)$ a los morfismos homotópicos y la función linear h la llamamos **homotopía de cocadenas**.

Definición 1.18 (Equivalencia de Cocadenas)**:**
*Un morfismo de complejos $\varphi : (M, d^M) \to (N, d^N)$ es una **equivalencia de cocadenas** si existe un morfismo $\psi : (N, d^N) \to (M, d^M)$ satisfaciendo $\varphi \circ \psi \sim id_N$ y $\psi \circ \varphi \sim id_M$.*

Notemos también que $\varphi \circ \psi$ y $\psi \circ \varphi$ son morfismos de complejos, pues
$(\varphi \circ \psi) \circ d^N(x) = \varphi \circ \psi \circ d^N(x) = \varphi \circ d^M \circ \psi(x) = d^N \circ \varphi \circ \psi(x) = d^N \circ (\varphi \circ \psi)(x))$.
Análogo para $\psi \circ \varphi$.

Consideremos un complejo de cocadenas (M, d). Los elementos de $\ker d$ son llamados *cociclos* y los elementos de img d son llamados *cobordes*. Recordemos que $(\ker d)^i = \ker d_i$ e $(\text{img } d)^i = \text{img } d_{i-1}$, puesto que img d es un subespacio vectorial graduado de $\ker d$, podemos considerar el cociente ${\ker d}\big/{\text{img } d} =: H(M, d)$, donde $H(M, d)^i = {\ker d_i}\big/{\text{img } d_{i-1}}$. Este nuevo espacio vectorial graduado es la **cohomología** de (M, d).

Cuando no exista duda del diferencial usaremos $H(M)$ en vez de $H(M, d)$ y $H^i(M)$ en vez de $H(M)^i = H(M, d)^i$.

El morfismo de complejos $\varphi : (M, d^M) \to (N, d^N)$ induce un morfismo a nivel de cohomología $H(\varphi)$:

$$\begin{array}{rccc} H(\varphi): & H(M, d^M) & \to & H(N, d^N) \\ & [\sigma] & \mapsto & [\varphi(\sigma)] \end{array}$$

Es fácil comprobar que $H(\varphi)$ está bien definida, ya que para $[\sigma] = [\sigma'] = [\sigma + d\xi] \in H(M)^i$, implica $\varphi(\sigma + d\xi) = \varphi(\sigma) + \varphi(d\xi) = \varphi(\sigma) + d(\varphi\xi)$, entonces $[\varphi(\sigma)] = [\varphi(\sigma + d\xi)]$.

Definición 1.19 (Cuasi-isomorfismo)**:**
Si $H(\varphi)$, el morfismo inducido de $\varphi : (M, d^M) \to (N, d^N)$, es un isomorfismo, entonces φ es llamado ***cuasi-isomorfismo****.*

Teorema 1.20:
Sean $\varphi : (M, d^M) \to (N, d^N)$, $\psi : (M, d^M) \to (N, d^N)$ morfismos de complejos tales que $\varphi \sim \psi$, entonces $H(\varphi) = H(\psi)$.

Demostración: Si $\varphi \sim \psi$, entonces existe $h : M \to N$, $|h| = -1$ tal que $\varphi - \psi = h \circ d^M + d^N \circ h$. Como $[\sigma] = \sigma + \text{img } d^M$ con $\sigma \in \ker d^M$, tenemos $(\varphi - \psi)(\sigma) = d^N \circ h(\sigma)$ y $(\varphi - \psi)(\sigma) \in \text{img } d^N$. Por lo tanto $[(\varphi - \psi)(\sigma)] = [0]$ y así $[\varphi(\sigma)] = [\psi(\sigma)]$ y $H(\varphi) = H(\psi)$. $\square$

Teorema 1.21:
Si $\varphi : (M, d^M) \to (N, d^N)$ es una equivalencia de cocadenas, entonces $H(\varphi)$ es un isomorfismo.

Demostración: Para probar que $H(\varphi)$ es un isomorfismo debemos probar que cada $H(\varphi_i)$, $i \in \mathbb{Z}$, es un isomorfismo.

Como φ es una equivalencia de cocadena, existe $\psi : (N, d^N) \to (M, d^M)$ tal que $\varphi \circ \psi \sim id_N$ y $\psi \circ \varphi \sim id_M$. Del teorema (1.20) tenemos $H(\varphi \circ \psi) = H(id_N)$ y $H(\psi \circ \varphi) = H(id_M)$.

Notemos que $H((\varphi \circ \psi)_i) = H(\varphi_i) \circ H(\psi_i)$, pues

$$H(id_N)_i : \begin{array}{ccc} {\ker d_i^N}/{\text{img } d_{i-1}^N} & \longrightarrow & {\ker d_i^N}/{\text{img } d_{i-1}^N} \\ [\sigma] & \longmapsto & [\sigma] \end{array}$$

$$H(id_M)_i : \begin{array}{ccc} {}^{\ker d_i^M}\!\diagup_{\text{img } d_{i-1}^M} & \longrightarrow & {}^{\ker d_i^M}\!\diagup_{\text{img } d_{i-1}^M} \\ & & \\ [\tau] & \longmapsto & [\tau] \end{array}$$

$$H(\varphi \circ \psi)_i : \begin{array}{ccc} {}^{\ker d_i^N}\!\diagup_{\text{img } d_{i-1}^N} & \longrightarrow & {}^{\ker d_i^N}\!\diagup_{\text{img } d_{i-1}^N} \\ & & \\ [\sigma] & \longmapsto & [\varphi_i \circ \psi_i(\sigma)] \end{array}$$

y además,

$$H(\varphi)_i \circ H(\psi)_i : \begin{array}{ccccc} {}^{\ker d_i^N}\!\diagup_{\text{img } d_{i-1}^N} & \longrightarrow & {}^{\ker d_i^M}\!\diagup_{\text{img } d_{i-1}^M} & \longrightarrow & {}^{\ker d_i^N}\!\diagup_{\text{img } d_{i-1}^N} \\ & & & & \\ [\sigma] & \longmapsto & [\psi_i(\sigma)] & \longmapsto & [\varphi_i \circ \psi_i(\sigma)] \end{array}$$

Por lo tanto $H(\varphi_i \circ \psi_i) = H(\varphi_i) \circ H(\psi_i)$. Analogamente podemos probar que $H(\psi_i \circ \varphi_i) = H(\psi_i) \circ H(\varphi_i)$.

Concluímos que $H(id_N)_i = H(\varphi_i \circ \psi_i) = H(\varphi_i) \circ H(\psi_i)$, y además $H(id_N)_i = id_{H_{i(N)}}$, de modo que tenemos $H(\varphi_i) \circ H(\psi_i) = id_{H_(N_i)}$. Analogamente, $H(\psi_i) \circ H(\varphi_i) = id_{H_{i(M)}}$, por lo que $H(\varphi_i)$ es un isomorfismo y $H(\varphi)$ también lo es. $\square$

Observación 1.22: Cada equivalencia de cocadena es un cuasi-isomorfismo, este resultado deriva del teorema 1.21. $\star$

1.2 Álgebra Diferencial Graduada (DGA's)

Dedicamos esta sección al estudio de álgebras diferenciales graduadas y sus propiedades. Para abreviar, también usaremos DGA o dga para referirnos a un álgebra diferencial graduada.

Definición 1.23 (Álgebra Graduada):
*Un **álgebra graduada** es un espacio vectorial graduado* $A = \{A^n\}_{n\geq 0}$ *junto con una función lineal* μ_A *de grado 0,*

$$\begin{array}{rccc} \mu_A: & A\otimes A & \to & A \\ & x\otimes y & \mapsto & x\cdot y \end{array}$$

que satisface: Para cada $x, y, z \in A$ *y* $\lambda \in \mathbb{K}$*:*

(1) $x\cdot(y\cdot z) = (x\cdot y)\cdot z$*, es decir* $\mu_A(x\otimes(y.z)) = \mu_A((x\cdot y)\otimes z)$

(2) Existe $1_A \in A^0$ *tal que* $1_A\cdot x = x\cdot 1_A = x$*, es decir* $\mu_A(1_A\otimes x) = \mu_A(x\otimes 1_A) = x$

(3) $\lambda(x\cdot y) = (\lambda x)\cdot y = x\cdot(\lambda y)$*, es decir* $\lambda\mu_A(x\otimes y) = \mu_A(\lambda x\otimes y) = \mu_A(x\otimes\lambda y)$

Notemos que se cumple la propiedad distributiva, es decir $(x+y)\cdot z = x\cdot z + y\cdot z$ $\forall\ x, y, z \in A$. Puesto que, $(x+y)\cdot z = \mu_A\left((x+y)\otimes z\right) = \mu_A\left(x\otimes z + x\otimes z\right) = \mu_A\left(x\otimes z\right) + \mu_A\left(x\otimes z\right) = x\cdot z + y\cdot z$.

Denotamos (A, μ_A) al álgebra graduada. Como μ_A actúa como un producto, en adelante, cuando hablemos de álgebra graduada, omitiremos la notación μ_A, excepto cuando sea necesario. Y en algunas ocaciones omitiremos la notación puntual $(\cdot)$.

Notemos que ahora el espacio vectorial graduado A está concentrado en grados mayor o igual a 0.

Definición 1.24 (Álgebra graduada conmutativa (cga)):
Un álgebra graduada A *es conmutativa si la igualdad de Koszul es válida, es decir* $x\cdot y = (-1)^{|x|\cdot|y|}y\cdot x$ *para todo* $x, y \in A$.

Cuando la característica del cuerpo $\mathbb{K}$ es distinta de 2, y $|x|$ es impar, la igualdad de Koszul implica $x^2 = x\cdot x = 0$, puesto que $x\cdot x = (-1)^{|x|\cdot|x|}x\cdot x = -x\cdot x$.

Necesitamos definir subálgebra graduada e ideal de un álgebra graduada para establecer una proposición que nos dice que el cociente, entre un álgebra graduada A y un I ideal de A, es también un álgebra graduada. Esta propiedad nos permitirá afirmar que $\ker d^A / \operatorname{img} d^A$ es un álgebra graduada.

Definición 1.25 (Subálgebra Graduada)**:**
*Sea $A = \{A^n, \mu_A\}_{n\geq 0}$ un álgebra graduada. A' es una **subálgebra graduada** de A si A' es un subespacio vectorial graduado de A, $1_A \in A'^0$ y para cada $x \in A'^i$ e $y \in A'^j$ tenemos $\mu_A(x,y) = x \cdot y \in A'^{i+j}$, $i, j \geq 0$. En otras palabras, A' es un subespacio vectorial graduado de A y $\mu_A|_{A'}(A') \subseteq A'$.*

Definición 1.26 (Ideal)**:**
*Sea $A = \{A^n, \mu_A\}_{n\geq 0}$ un álgebra graduada. I es un **ideal** de A si I es un subespacio vectorial graduado de A tal que para cada $x \in A$, $y \in I$ se tiene que $x \cdot y \in I$ y también $y \cdot x \in I$.*

Notemos que si $1_A \in I^0$, entonces $I = A$.

Proposición 1.27:
Sea $A = \{A^n\}_{n\geq 0}$ un algebra graduada e $I = \{I^n\}_{n\geq 0}$ un ideal de A, entonces el cociente A/I es un álgebra graduada.

<u>*Demostración*</u>: Como I es un subespacio vectorial graduado de A, entonces A/I es un espacio vectorial graduado.

Debemos definir la función multiplicación $\mu_{A/I}$:
$$\begin{array}{ccccc} A/I & \otimes & A/I & \to & A/I \\ [a] & \otimes & [b] & \mapsto & [a \cdot b] \end{array}$$

Notemos que $\mu_{A/I}$ está bien definida, pues si $[a] = [a + I^i]$, $[b + I^j]$, con $|a| = i$ y $|b| = j$ grado j, tenemos que:

$$
\begin{aligned}
\mu_{A/I}([a+I^i]\otimes[b+I^j]) &= [(a+I^i)\cdot(b+I^j)] \\
&= [\mu_A((a+I^i)\otimes(b+I^j))] \\
&= [\mu_A(a\otimes b + a\otimes I^j + I^i\otimes b + I^i\otimes I^j)] \\
&= [\mu_A(a\otimes b)+\mu_A(a\otimes I^j)+\mu_A(I^j\otimes b)+\mu_A(I^i\otimes I^j)] \\
&= [a\cdot b + a\cdot I^j + I^i\cdot b + I^i\cdot I^j] \\
&= [a\cdot b + I^{i+j} + I^{i+j} + I^{i+j}] \\
&= [a\cdot b + I^{i+j}] \\
&= [a\cdot b] \\
&= \mu_{A/I}([a]\otimes[b])
\end{aligned}
$$

Así A/I junto con $\mu_{A/I}$ es un álgebra graduada. $\square$

Definición 1.28 (Álgebra Diferencial Graduada (dga))**:**
*Un **álgebra diferencial graduada** (dga o DGA para abreviar) es un álgebra graduada $A = \{A^n\}_{n\geq 0}$ junto con una función lineal $d = \{d_n\}_{n\geq 0}$ de grado 1 ($d_n : A^n \to A^{n+1}$) satisfaciendo $d\circ d = 0$ y $d(x\cdot y) = d(x)\cdot y + (-1)^{|x|}x\cdot d(y)$ para cada $x, y \in A$.*

Proposición 1.29:
Si (A, d) es una dga, entonces $\ker d / \operatorname{img} d$ es un álgebra graduada.

<u>*Demostración*</u>: De la proposición 1.27 basta mostrar que $\ker d$ es una subálgebra de A y que $\operatorname{img} d$ es un ideal de $\ker d$.

Notemos que $\ker d$ es un subespacio vectorial graduado de A y que $1_A \in \ker d$, pues $d(1_A) = d(1_A\cdot 1_A) = d(1_A)\cdot 1_A + 1_A\cdot d(1_A) = 2d(1_A)$, de donde $d(1_A) = 0$ si característica de $\mathbb{K}$ es distinta de 2. Y como para cualesquiera $a, b \in \ker d$, se tiene que $a\cdot b \in \ker d$, pues $d(a\cdot b) = da\cdot b + (-1)^{|a|}a\cdot db = 0$, concluímos que $\ker d$ es una subálgebra graduada de A.

Notemos que $\operatorname{img} d$ es un subespacio vectorial graduado de $\ker d$. Sean $a \in \ker d$ y $b \in \operatorname{img} d$, entonces $da = 0$ y existe $c \in A$ tal que $dc = b$. Tenemos que mostrar que existen $x, y \in A$ tales que $dx = a\cdot b$ y $dy = b\cdot a$. Basta considerar

$x = (-1)^{|a|} a \cdot c$ e $y = c \cdot a$; tenemos:

$$\begin{aligned} dx &= d\left((-1)^{|a|} a \cdot c\right) = (-1)^{|a|} da \cdot c + (-1)^{|a|}(-1)^{|a|} a \cdot dc = a \cdot dc = a \cdot b. \\ dy &= d\,(c \cdot a) = dc \cdot a + (-1)^{|c|} c \cdot da = dc \cdot a = b \cdot a. \end{aligned}$$

Por lo que img d es un ideal de $\ker d$. Así, ${\ker d}\big/{\text{img } d}$ es un álgebra graduada. □

Definimos el **complejo de cohomología** asociado a la dga (A, d^A) como:

$$H(A, d) = H(A) = {\ker d}\big/{\text{img } d}$$

Para relacionar los dga's necesitamos definir morfismo entre álgebras diferenciales graduadas.

Definición 1.30 (Morfismo entre dga's)**:**
Un ***morfismo*** *entre álgebras diferenciales graduadas $\varphi : (A, d^A) \to (B, d^B)$ es un morfismo de complejos (esto es, φ satisface $\varphi \circ d^A = d^B \circ \varphi$), tal que para todo $x, y \in A$ se cumple que $\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$ y $\varphi(1_A) = 1_B$.*

De esta definición se desprende que si $x \in A$, entonces $\varphi \circ d^A(x) = d^B \circ \varphi(x)$, es decir, para cada $n \geq 0$ el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} A^n \arrow[r, "d^A"] \arrow[d, "\varphi"'] & A^{n+1} \arrow[d, "\varphi"] \\ B^n \arrow[r, "d^B"'] & B^{n+1} \end{tikzcd}$$

El morfismo $\varphi : (A, d^A) \to (B, d^B)$ induce un morfismo de álgebras diferenciales en cohomología:

$$\begin{array}{rccc} H(\varphi): & H(A) & \to & H(B) \\ & [a] & \mapsto & [\varphi(a)] \end{array}$$

La función $H(\varphi)$ está bien definida, pues

$$H(\varphi)\,([a + d\xi]) = [\varphi(a + d\xi)] = [\varphi(a) + \varphi(d\xi)] = [\varphi(a) + d(\varphi\xi)] = [\varphi(a)] = H(\varphi)\,([a])$$

Además es un morfismo de dga en cohomología, pues de la proposición 1.27, tenemos que: $H(\varphi)\left([a] \otimes [b]\right) = H(\varphi)\left([a \cdot b]\right) = [\varphi(a \cdot b)] = [\varphi(a) \cdot \varphi(b)]$
$= [\varphi(a)] \otimes [\varphi(b)] = H(\varphi)\left([a]\right) \otimes H(\varphi)\left([b]\right)$

Finalmente notamos que (A, d^A) y (B, d^B) son dga's, entonces el producto tensorial $(A, d^A) \otimes (B, d^B)$ también es un dga con multiplicación $(a \otimes b) \cdot (a' \otimes b') = (-1)^{|b| \cdot |a'|} a \cdot a' \otimes b \cdot b'$ y con diferencial $d^{\otimes}(a \otimes b) = d^A(a) \otimes b + (-1)^{|a|} a \otimes d^B(b)$.

1.3 Cohomología de De Rham

En esta sección desarrollaremos un ejemplo básico de DGA en geometría.

Georges De Rham desarrolla en el capítulo III "Variétes. Intégrales multiples" de su tesis de doctorado "*Sur l'analysis situs des variétés à n dimensions*", ver [1], 20 de junio de 1931, lo que hoy en día se conoce como complejo de De Rham. Usaremos la definición de complejo de De Rahm dada por John Lee en [10, p. 441].

Sea M una n-variedad diferenciable sin borde y sea k un entero no negativo. Consideremos $\Omega^k(M)$ el espacio de las $k-$formas diferenciales con $\Omega^0(M) = C^\infty(M)$. Existe un producto $\wedge$ definido puntualmente entre formas diferenciales satisfaciendo que el producto entre una $k-$forma y una $l-$forma es una $(k+l)-$forma diferencial. Además, si f es una $0-$forma y η es una $k-$forma, podemos interpretar el producto $f \wedge \eta$ como $f\eta$.

Si definimos $\Omega^*(M) = \displaystyle\bigoplus_{k=0}^{n} \Omega^k(M)$, entonces obtenemos un producto $\wedge$ en $\Omega^*(M)$ que es asociativo y anticonmutativo, es decir para $\omega \in \Omega^k(M)$ y $\eta \in \Omega^l(M)$, $\omega \wedge \eta = (-1)^{kl} \eta \wedge \omega$.

Sea $d : \Omega^*(M) \to \Omega^*(M)$, $d_k : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$, la derivada exterior, como definida en Lee [10, p. 363]. Luego, tiene sentido establecer el complejo de cocadena $(\Omega^*(M), d)$.

$$C^\infty(M) = \Omega^0(M) \xrightarrow{d_0} \dots \longrightarrow \Omega^{k-1}(M) \xrightarrow{d_{k-1}} \Omega^k(M) \xrightarrow{d_k} \Omega^{k+1}(M) \longrightarrow \dots$$

Definamos:

$$\mathcal{Z}^k(M) = \ker \left\{d_k : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)\right\} := \{k - \text{formas cerradas de } M\}$$

$$\mathcal{B}^k(M) = \text{img } \left\{d_{k-1} : \Omega^{k-1}(M) \to \Omega^k(M)\right\} := \{k - \text{formas exactas de } M\}$$

Por convención, consideraremos $\Omega^k(M) = 0$ si $k < 0$ y notemos que siempre $\Omega^k(M) = 0$ si $k > n$.

Ahora, si $\omega \in \mathcal{Z}^k(M)$, entonces $d\omega = 0$ y si $\omega \in \mathcal{B}^k(M)$, entonces existe $\eta \in \Omega^{k-1}(M)$ tal que $\omega = d\eta$. Concluímos que toda forma exacta es cerrada y

$$\mathcal{B}^k(M) \subseteq \mathcal{Z}^k(M).$$

Por la definición de $\mathcal{Z}^k(M)$ y $\mathcal{B}^k(M)$ tiene sentido considerar la cadena de cohomología asociada al complejo $(\Omega^*(M), d)$. El $k-$grupo de cohomología está definido como:

$$H^k_{dR}(M) = {}^{\mathcal{Z}^k(M)}\!\big/_{\mathcal{B}^k(M)}$$

Llamamos a $H^*_{dR}(M)$ el complejo de De Rham de formas diferenciales.

El producto exterior $\wedge$ en $\Omega^*(M)$ es asociativo y anticonmutativo o conmutativo en el sentido gruadado, es fácil verificar que $\wedge$ satisface las condiciones de la multiplicación de una dga, ver [10, p. 356], y la derivada exterior $d : \Omega^*(M) \to \Omega^*(M)$ es una derivación de grado 1 que satisface $d^2 = 0$, ver [10, p. 364]. Así, $(\Omega^*(M), d, \wedge)$ es un álgebra diferencial graduada y por tanto $(H^*_{dR}(M), 0, \wedge)$ también lo es.

En los complejos definidos sobre una variedad diferenciable, una homotopía de cocadenas es conocida como un **operador de homotopía**. Ejemplos importantes de estos operadores aparecen en [25, p. 157, 190] y [10, p. 444]. Así, si consideramos M y N dos variedades diferenciables, donde $\left(\Omega^*(M), d^M, \wedge\right)$ y $\left(\Omega^*(N), d^N, \wedge\right)$ son sus respectivos espacios de formas diferenciables. Las aplicaciones diferenciables $F, G : M \to N$ serán homotópicas si existe h una familia de aplicaciones diferenciables $h : \Omega^p(N) \to \Omega^{p-1}(M)$, tal que para cada $\omega \in \Omega^p(N)$ se satisface

$$d^M(h(\omega)) + h(d^N(\omega)) = G^*\omega - F^*\omega.$$

En el caso particular de $F = i_0 : M \to M \times I$ y $G = i_1 : M \to M \times I$ con

$I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ y las aplicaciones $i_o,\ i_1$ son multiplicación interior por 0 y 1, respectivamente; el operador de homotopía está definido por $h(\omega) = \displaystyle\int_0^1 i_t^*(S \lrcorner\, \omega)dt$, con $S_{(q,s)} = (0, \partial/\partial_S|s)$ donde s son las coordenadas estándar sobre $\mathbb{R}$.

Capítulo 2

$A_\infty-$Álgebras y Modelo de Merkulov

En este capítulo definiremos una estructura de $A_\infty-$álgebra (álgebra A-infinito) sobre un complejo de cocadenas, y a partir de una estructura particular de A_∞-álgebra construiremos otra, en la cohomología asociada al complejo. Esta construcción fue la que elaboró Merkulov en [13] como un caso especial (y explícito) de un teorema de Kadeishvili,

Teorema (Kadeishvili):
Sea A un $A_\infty-$álgebra y sea $H(A)$ el grupo de cohomología de A. Existe una estructura de $A_\infty-$álgebra en $H(A)$ con $\mu_1 = 0$, μ_2 inducido por la multiplicación en A, y las multiplicaciones superiores construídas desde la estructura $A_\infty-$álgebra de A, tal que existe un quasi-isomorfismo de $A_\infty-$álgebras $F : H(A) \to A$, que es levantamiento del $A_\infty-$morfismo identidad de $H(A)$. Esta estructura de $A_\infty-$álgebra sobre $H(A)$ es único salvo $A_\infty-$isomorfismos.

El enunciado del resultado anterior no corresponde al original en [4, Teorema 2], pues utiliza estructuras de $A_\infty-$módulos. De igual forma la construcción realizada por Kadeishvili es muy general. Es por esta razón que realizaremos lo hecho por Merkulov, donde él construyó una clase especial de multiplicaciones superiores para $H(A)$, que pueden ser definidas inductivamente. Notamos, que además de construir una estructura de $A_\infty-$álgebra asociada al complejo de cohomología, Kadeishvili muestra que existe un cuasi-isomorfismo entre la estructura original y la nueva estructura. Este paso no está en el trabajo de Merkulov y nosotros no lo consideraremos aquí. Además de [4], podemos referir al lector a Kajiura [5]: en este artículo Kajiura explica cómo estructuras de $A_\infty-$álgebras aparecen en teoría de cuerdas, algo que no consideraremos en esta tesis. Interesantemente, Merkulov definió erróneamente una función lineal que es base para su construcción: aquí corregimos este error y probamos, usando la idea de Merkulov, que su construcción es igualmente válida.

A lo largo de todo el capítulo: espacios vectoriales, funciones lineales, conmutatividad, entre otros, serán espacios vectoriales graduados, funciones lineales graduadas, conmutatividad en el sentido graduado, entre otros, a menos que se especifique lo contrario.

2.1 $A_\infty-$álgebras

La noción de $A_\infty-$álgebras fue introducida por Stasheff en 1963 [17], [18], definiendo $A_\infty-$espacios y $A_\infty-$álgebras como una herramienta en el estudio de las leyes asociativas desde el punto de vista de la teoría de homotopía en $H-$espacios. El concepto de $H-$espacio, H es por Hopf, surgió como una generalización de un grupo topológico, donde la característica esencial que se conserva es una multiplicación continua $\mu : X \times X \to X$ y un elemento neutro $e \in X$ tal que las dos funciones $X \xrightarrow{\mu(-,e)} X$ y $X \xrightarrow{\mu(e,-)} X$ sean homotópicas a la identidad. Una motivación del trabajo de Stasheff puede encontrarse en Keller [7].

Stasheff en la definición 2.1 (pág. 294) de su artículo "*Homotopy associativity of $H-$spaces II*", [18], define A_p-álgebra o $A(p)-$álgebra como sigue:

Sea Λ un anillo conmutativo con unidad. Una $A(p)-$álgebra $(R, m_1, \ldots, m_p)$ sobre Λ consiste en un $\Lambda-$módulo graduado $R = \sum R_q$ y funciones $m_n : \otimes^n R \to R$ satisfaciendo las siguientes propiedades.

(1) m_n tiene grado $n-2$, i.e., $m_n \left[(\otimes^n R)_q \right] \subset R_{q+n-2}$ donde $\otimes^n R$ tiene la usual graduación del producto tensorial;

(2) Si $a = a_1 \otimes a_2 \otimes \ldots \otimes a_n \in \otimes^n R$, entonces

$$\sum_{\substack{u+s=n+1 \\ 1 \leq r+1 \leq u}} \chi(r,s,a) m_u \left(a_1 \otimes \ldots \otimes a_r \otimes m_s(a_{r+1} \otimes \ldots \otimes a_{r+s}) \otimes a_{r+s+1} \otimes \ldots \otimes a_n \right) = 0$$

donde $\chi(r,s,a)$ es ± 1 de acuerdo a la paridad de

$$\varepsilon(r,s,a) = (s+1)(r+1) + s \left(n + \sum_{j=1}^{r} dim\ a_j \right)$$

Notemos que cuando Stasheff dice que $\chi(r,s,a)$ es ± 1 dependiendo de la paridad de $\varepsilon(r,s,a)$, está definiendo $\chi(r,s,a) = (-1)^{\varepsilon(r,s,a)}$, pues

$$(-1)^{\varepsilon(r,s,a)} = (-1)^{1+s(|a_1|+\ldots+|a_r|)+(s-1)r+(u-1)s}$$

Observemos que cuando Stasheff considera el grado de las funciones m_n de $n-2$, es porque está considerando m_1 de grado -1 como el diferencial para obtener el complejo de homología asociado.

Stasheff luego generaliza esta definición a $A(\infty)-$álgebra como una estructura $(R, m_1, m_2, \ldots)$, que consiste en un $\Lambda-$módulo graduado R y funciones m_n : $\otimes^n R \to R$ con $n \in \mathbb{N}$, satisfaciendo las condiciones antes descritas.

Algunos autores, incluso el mismo Stasheff y Merkulov, utilizan el concepto de "strongly homotopy associative algebra, sha-algebra" para $A_\infty-$álgebras. En este trabajo utilizaremos la siguiente definición de $A_\infty-$álgebra:

Definición 2.1 ($A_\infty-$álgebra)**:**
Sea A un espacio vectorial graduado, $A = \{A^i\}_{i\geq 0}$. Un álgebra de homotopía fuerte o $A_\infty-$álgebra, es A junto con las funciones lineales graduadas:

$$\begin{array}{rccl} m_n: & A^{\otimes n} & \longrightarrow & A \\ & a_1 \otimes \ldots \otimes a_n & \longmapsto & m_n(a_1 \otimes \ldots \otimes a_n) =: m_n(a_1 \cdot \ldots \cdot a_n) \end{array}$$

para $n \geq 1$, cuyo grado está dado por $|m_n| = 2 - n$ y que satisfacen la igualdad $St(n) = 0$, con

$$St(n) = \sum_{u+s=n+1} \sum_{r=0}^{u-1} (-1)^k m_u(a_1 \cdot \ldots \cdot a_r, m_s(a_{r+1} \cdot \ldots \cdot a_{r+s}), a_{r+s+1} \cdot \ldots \cdot a_n),$$

donde $k = s(|a_1| + \ldots + |a_r|) + r(s-1) + (u-1)s$, con $s \geq 1$.

Definiciones equivalentes pueden ser encontradas en los artículos de Lu, Palmieri, Wu y Zhang [27], Merkulov [13] y Keller [7, 8]. Y en [14] se prueban estas equivalencias. A continuación calcularemos las primeras identidades $St(n) = 0$.

St(1)=0: Si $n = 1$, $m_1 : A \to A$, $|m_1| = 1$ y $St(1) = m_1(m_1(a)) = 0$.

St(2)=0: Si $n = 2$, $m_2 : A \otimes A \to A$, $|m_2| = 0$ y

$$St(2) = -(-1)^{|a|} m_2(a, m_1(b)) - m_2(m_1(a), b) + m_1(m_2(a, b)) = 0,$$

es decir $m_1(m_2(a, b)) = m_2(m_1(a), b) + (-1)^{|a|} m_2(a, m_1(b))$.

Si consideramos m_2 como una multiplicación del complejo A y escribimos $m_2(a, b) = a \cdot b$, $St(2)$ implica que $m_1(a \cdot b) = m_1(a) \cdot b + (-1)^{|a|} a \cdot m_1(b)$. De $St(1)$ y $St(2)$, m_1 es un diferencial de grado 1, con respecto a m_2. Así, m_2 desempeña el rol de multiplicación, aunque puede no ser asociativa.

St(3)=0: Si $n = 3$, $m_3 : A^{\otimes 3} \to A$, $|m_3| = -1$ y $St(3) = m_1(m_3(a, b, c)) - m_3\left(m_1^{\otimes 3}(a, b, c)\right) + a \cdot (b \cdot c) - (a \cdot b) \cdot c = 0$, es decir $a \cdot (b \cdot c) - (a \cdot b) \cdot c = m_3\left(m_1^{\otimes 3}(a, b, c)\right) - m_1(m_3(a, b, c))$.

Notemos que m_3 actúa como una homotopía de cocadena (u operador de homotopía) y por lo tanto la multiplicación m_2 es asociativa sólo salvo homotopía.

Notación: Si A es un espacio vectorial graduado con multiplicaciones $m_1, m_2, m_3, \ldots$ satisfaciendo $St(n) = 0$, obtenemos una $A_\infty-$álgebra denotada como $\big(A, \{m_n\}_{n\geq 0}\big)$. De aquí en adelante, asumiremos que (A, m_1, m_2) es una dga, con m_2 asociativa salvo homotopía.

Definición 2.2:
*Un $A_\infty-$álgebra A es llamada **minimal** si $m_1 = 0$. Es llamada **contractible** si $m_n = 0$ para todo $n \geq 2$ y $H(A, m_1) = 0$.*

Esta definición es usada en las notas de Kontsevich y Soibelman, [11], como también en Kajiura [5].

2.2 Morfismos entre $A_\infty-$álgebras

En esta sección estableceremos morfismos entre espacios vectoriales graduados que tengan estructura de $A_\infty-$álgebra, además de exponer algunos casos particulares de morfismos, por ejemplo un morfismo entre $A_\infty-$álgebras que es un cuasi-isomorfismo.

Ejemplos de $A_\infty-$álgebras serán construídos usando el modelo de Merkulov (teorema 2.9) y Zhou (teorema 3.20), ver sección 2.3.

Aquí asumiremos que cada $A_\infty-$álgebra A contiene un elemento unidad $1_A \in A^0$ y que 1_A satisface la siguiente condición, llamada **condición estrictamente unital**:

$$\text{Si } n \neq 2 \text{ y } a_i = 1_A \text{ para algún } i, \text{ entonces } m_n(a_1 \cdot \ldots \cdot a_n) = 0$$

En este caso el elemento 1_A es llamado **unidad estricta** o **identidad** de A.

Definición 2.3 (A_∞−morfismo)**:**
Sean $\left(A, \{m_n^A\}_{n\geq 0}\right)$ *y* $\left(B, \{m_n^B\}_{n\geq 0}\right)$ *dos* A_∞*−álgebras. Un* A_∞***−morfismo o morfismo entre*** A_∞***−álgebras*** *es una familia de funciones lineales graduadas* $f = \{f_n\}_{n\geq 1}$*, donde* $f_n : A^{\otimes n} \to B$ *de grado* $1-n$*, satisfaciendo la siguiente identidad,* $MI(n)$*, de morfismos de Stasheff.*

$$\sum_{\substack{r+s+t=n \\ r,t\geq 0,\ s\geq 1}} (-1)^{r+st} f_u \circ (id^{\otimes r} \otimes m_s^A \otimes id^{\otimes t}) = \sum_{\substack{1\leq q\leq n \\ i_1+\ldots+i_q=n}} (-1)^w m_q^B \circ (f_{i_1} \otimes \ldots \otimes f_{i_q})$$

donde, $u = r+1+t$*,* $m_n^A : A^{\otimes n} \to A$*,* $m_n^B : B^{\otimes n} \to B$*,* $n = i_1 + \ldots i_q$ *y*

$$w = \begin{cases} 0 & si \quad q = 1 \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{q-1} (q-j)(i_j - 1) & si \quad q \geq 2 \end{cases}$$

Notemos que para cada $n \geq 1$, la función lineal graduada f_n es una familia $f_n = \{(f_n)_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ de funciones lineales, donde $(f_n)_i : (A^{\otimes n})^i \to B^{i+1-n}$ se tiene que si $i < n-1$ la función $(f_n)_i = 0$. A continuación calcularemos las primeras identidades $MI(n)$.

MI(1): Si $n = 1$, tenemos que $f_1 : A \to B$ con $|f_1| = 0$ y

$$MSt(1) : (-1)^{0+1\cdot 0} f_1 \circ (id^{\otimes 0} \otimes m_1^A \otimes id^{\otimes 0}) = (-1)^0 m_1^B \circ f_1,$$

es decir, $f_1 \circ m_1^A = m_1^B \circ f_1$. Por lo que f_1 es un morfismo entre (A, m_1^A) y (B, m_1^B)

MI(2): Si $n = 2$ tenemos que $f_2 : A \otimes A \to B$ con $|f_2| = -1$ y

$$-m_2^B \circ f_1^{\otimes 2} - \left(-f_1 \circ m_2^A\right) = m_1^B \circ f_2 + f_2 \circ m_1^{A^{\otimes 2}}$$

Así, si definimos $\varphi = -m_2^B \circ f_1^{\otimes 2}$ y $\psi = -f_1 \circ m_2^A$, tenemos que $\varphi - \psi = m_1^B \circ f_2 + f_2 \circ m_1^{A^{\otimes 2}}$, es decir f_2 es una homotopía de cocadenas entre φ y ψ.

Notemos que si $f_2 = 0$, se tiene $f_1 \circ m_2^A = m_2^B \circ f_1^{\otimes 2}$, es decir, el siguiente diagrama conmuta para todo $i \geq 0$

$$\begin{tikzcd} A_i^{\otimes 2} \arrow[r, "f_1 \otimes f_1"] \arrow[d, "m_2^A"'] & B_i^{\otimes 2} \arrow[d, "m_2^B"] \\ A_i \arrow[r, "f_1"'] & B_i \end{tikzcd}$$

MI(3): Si $n = 3$ tenemos $f_3 : A \otimes A^{\otimes 3} \to B$ con $|f_3| = -2$ y

$$f_3 \circ (id \otimes id \otimes m_1^A + m_1^A \otimes id \otimes id + id \otimes m_1^A \otimes id) - f_2 \circ (id \otimes m_2^A + m_2^A \otimes id) + f_1 \circ m_3^A$$

$$= m_1^B \circ f_3 + m_2^B \circ (f_1 \otimes f_2 - f_2 \otimes f_1) + m_3^B \circ (f_1 \otimes f_1 \otimes f_1).$$

Ahora, si $f_2 = 0$ y $f_3 = 0$, se tiene $f_1 \circ m_3^A = m_3^B \circ (f_1 \otimes f_1 \otimes f_1)$ es decir, el siguiente diagrama conmuta para todo $i \geq 0$

$$\begin{tikzcd} A_i^{\otimes 3} \arrow[r, "f_1 \otimes f_1 \otimes f_1"] \arrow[d, "m_3^A"'] & B_i^{\otimes 3} \arrow[d, "m_3^B"] \\ A_i \arrow[r, "f_1"'] & B_i \end{tikzcd}$$

En general, para $n \geq 2$ si $f_2 = 0,\ f_3 = 0, \ldots, f_n = 0$ se tiene que

$$MSt(n): \quad f_1 \circ m_n^A = m_n^B \circ (f_1 \otimes \ldots \otimes f_1).$$

A los $A_\infty-$morfismos que cumplan con esta condición se les denomina $A_\infty-$**morfismos estrictos**. Diremos además que f es un $A_\infty-$isomorfismo estricto si f es un $A_\infty-$morfismo estricto con f_1 un isomorfismo entre los espacios vectoriales graduados A y B.

Si las $A_\infty-$álgebras A y B poseen unidades estrictas, entonces un $A_\infty-$morfismo entre ellas es llamado **morfismo unital** y satisface las siguientes condiciones: $f_1(1_A) = 1_B$, donde 1_A y 1_B son las respectivas unidades estrictas, y además $f_n(a_1 \otimes \ldots \otimes a_n) = 0$ si $n \geq 2$ y $a_i = 1_A$ para algún i.

Definición 2.4 (Cuasi-isomorfismo de $A_\infty-$álgebras)**:**
*Sea $f : A \to B$ un $A_\infty-$morfismo; f es un **cuasi-isomorfismo** si f_1 es un cuasi-isomorfismo entre los complejos (A, m_1^A) y (B, m_1^B).*

2.3 Construcción explícita de una A_∞−álgebra

En esta sección construiremos explícitamente las multiplicaciones de orden superior correspondiente a la cocadena de cohomología asociada a una dga dada. Esto es, dada una dga (A, m_1, m_2), se construirán funciones lineales $\mu_1,\ \mu_2, \ldots$ a partir de m_1, m_2 de tal manera que $(H(A), \mu_1, \mu_2, \ldots)$ tenga una estructura de A_∞−álgebra, donde $H(A) = {}^{\ker m_1}\!\diagup_{\text{img } m_1}$. El Modelo de Merkulov [13, S. 3] es un caso especial (y explícito) de Kadeishvili [4], pues considera una dga A que tiene estructura A_∞−álgebra con multiplicaciones $m_n = 0$ para $n \geq 3$. Así, todo espacio de cohomología asociado a una dga tiene estructura de A_∞−álgebra. En el Modelo de Merkulov las multiplicaciones de orden superior de la A_∞−álgebra que se construye se definen de manera recursiva.

Antes de realizar la construcción del Modelo de Merkulov, mostraremos que dada una A_∞−álgebra $(A, m_1, m_2, \ldots)$ y su complejo de cohomología asociado $H(A) = {}^{\ker m_1}\!\diagup_{\text{img } m_1}$, la función inducida de m_2 en $H(A)$ es siempre asociativa.

Proposición 2.5:
La función $m_2 : A \otimes A \to A$ induce una ***multiplicación asociativa*** *en $H(A)$ dada por:*

$$\begin{array}{rccl} H(m_2): & H(A) \otimes H(A) & \to & H(A) \\ & [a] \otimes [b] & \mapsto & H(m_2)\left([a] \otimes [b]\right) =: [a] * [b] = [m_2(a \otimes b)] = [a \cdot b] \end{array}$$

<u>*Demostración*</u>: La función $H(m_2)$ está bien definida, pues sean $(a + da') \in [a]$ y $(b + db') \in [b]$, con $a, b \in \ker d$. Luego,

$$\begin{aligned} (a + da') \cdot (b + db') &= m_2\left((a + da') \otimes (b + db')\right) \\ &= m_2\left((a \otimes b) + (a \otimes db') + (da' \otimes b) + (da' \otimes db')\right) \\ &= m_2\left((a \otimes b)\right) + m_2\left((a \otimes db')\right) + m_2\left((da' \otimes b)\right) \\ &\qquad\qquad + m_2\left((da' \otimes db')\right) \\ &= a \cdot b + a \cdot db' + da' \cdot b + da' \cdot db' \end{aligned}$$

Para que $[a + da'] * [b + db'] = [a \cdot b]$ la expresión $a \cdot db' + da' \cdot b + da' \cdot db' = dc$ para algún $c \in A$. Tomando $c = (-1)^{|a|} a \cdot b' + a' \cdot b + a' \cdot db'$ se tiene

$$dc = (-1)^{|a|} da \cdot b' + a \cdot db' + da' \cdot b + (-1)^{|a'|} a \cdot db + da' \cdot db' + (-1)^{|a'|} a' \cdot ddb' = a \cdot db' + da' \cdot b + da' \cdot db'$$

Por lo que $(a + da') \cdot (b + db') = a \cdot b + dc \in [a \cdot b]$.

Para probar la asociatividad de $H(m_2)$ consideremos $[a], [b], [c] \in H(A)$, queremos que

$$([a] * [b]) * [c] = [a] * ([b] * [c]) \,.$$

Dados $(a + da') \in [a]$, $(b + db') \in [b]$ y $(c + dc') \in [c]$ con $a, b, c \in \ker d$, se tiene:

$$[(a + da') \cdot (b + db')] \cdot (c + dc') = (a \cdot b + d\diamondsuit) \cdot (c + dc') = (a \cdot b) \cdot c + d\clubsuit$$

$$(a + da') \cdot [(b + db') \cdot (c + dc')] = (a + da') \cdot (b \cdot c + d\heartsuit) = a \cdot (b \cdot c) + d\spadesuit$$

donde $\diamondsuit = (-1)^{|a|} a \cdot b' + a' \cdot b + a' \cdot db'$ $\quad$ $\heartsuit = (-1)^{|b|} b \cdot c' + b' \cdot c + b' \cdot dc'$

$\clubsuit = (-1)^{|\diamondsuit|} \diamondsuit \cdot c' + \diamondsuit' \cdot c + \diamondsuit' \cdot dc'$ $\quad$ $\spadesuit = (-1)^{|a|} a \cdot \heartsuit' + a' \cdot \heartsuit + a' \cdot d\heartsuit$

Luego $(a \cdot b) \cdot c - a \cdot (b \cdot c) = d\,(\spadesuit - \clubsuit)$ y $[(a \cdot b) \cdot c] = [a \cdot (b \cdot c)]$. Por lo que $([a] * [b]) * [c] = [a] * ([b] * [c])$ y $H(m_2)$ es asociativa. $\square$

Un punto importante es que Merkulov no considera explícitamente $H(A)$, sino sólo un subcomplejo W del complejo A invariante bajo m_1; el considerar cualquier subcomplejo, invariante bajo m_1, le hizo afirmar que (W, m_1, m_2) no era asociativa en general. Zhou en [29, pág. 74] afirma que esta observación es errónea, probando que sí es asociativa en un subcomplejo particular. Sin la intención de "*Merkulov ab omni naevo vindicatus*"(1), notamos que Merkulov afirma que (W, m_1, m_2) no es asociativa en general, asumiendo sólo que W es un subcomplejo invariante sobre el diferencial del complejo A, lo que es correcto. Sin embargo, sí es posible afirmar, como fue mostrado en la proposición 2.5, que m_2 es asociativa a nivel de cohomología y por lo tanto con $W \cong H(A)$ sí tenemos asociatividad.

El **Modelo de Merkulov** es posible resumirlo en los siguientes pasos:

- Comenzamos con una dga (A, m_1, m_2), con $m_1 = d$ y m_2 un producto asociativo. Se define $Z = \ker d$, $B = \text{img } d$ y se descompone $A = Z \oplus L = H \oplus B \oplus L$, donde $Z = H \oplus B$. Se prueba que $H(A) \cong H$.
- Definimos la función lineal graduada $G : A \to A$,de grado -1, tal que $G = 0$

(1)Referencia a Hieronymo Saccherio por su libro "*Euclides ab omni naevo vindicatus*" ("Euclides liberado de toda falla") publicado en 1733 en la ciudad de Milán, el cual intenta probar (erróneamente) como teorema el quinto postulado de Euclides.

cuando restringida a L y H, y $G = d^{-1}$ cuando restringida a B. La función lineal G no es única, pero puede ser escogida cuidadosamente. De hecho G será una homotopía de id_A a pr_H, donde $pr_H : A \to A$ es proyección sobre H, es decir se cumplirá que $id_A - pr_H = dG + Gd$.

- Definimos una sucesión de funciones lineales graduadas $\lambda_n : A^{\otimes n} \to A$, de grado $2-n$.

- Definimos la sucesión de funciones lineales graduadas μ_n como $\mu_1 = d$ y $\mu_n = pr_H \circ \lambda_n = (id_a - (dG + Gd))\,\lambda_n$ para $n \geq 2$, en $H \cong H(A)$. Probaremos que las funciones lineales μ_n satisfacen la condición de Stasheff $St(n) = 0$.

- Probar que las funciones lineales graduadas cumplen la condición de Stasheff es no trivial. Siguiendo a Merkulov, recurriremos a definir funciones lineales graduadas $\Phi_n : A^{\otimes n} \to A$ y $\Theta_n : A^{\otimes n} \to A$ y estableceremos propiedades que las involucran junto a μ_n y a λ_n. Estas propiedades implicarrán $St(n) = 0$.

Sea $d := m_1$; consideremos $B = \operatorname{img} d$ y $Z = \ker d$, de modo que $B \subset Z$. Luego existen subespacios H y L tales que

$$\ker d = Z = B \oplus H \qquad \text{y} \qquad A = \ker d \oplus L = Z \oplus L = B \oplus H \oplus L$$

Por el primer teorema de isomorfimo podemos identificar H y $Z/B = H(A)$. Observemos que las elecciones para H y L no son únicas.

Sea $pr_H : A \to H$ la proyección sobre H y sea $G : A \to A$, de grado -1, una homotopía de cocadenas desde id_A a pr_H, $id_A \sim pr_H$, es decir

$$id_A - pr_H = d \circ G + G \circ d$$

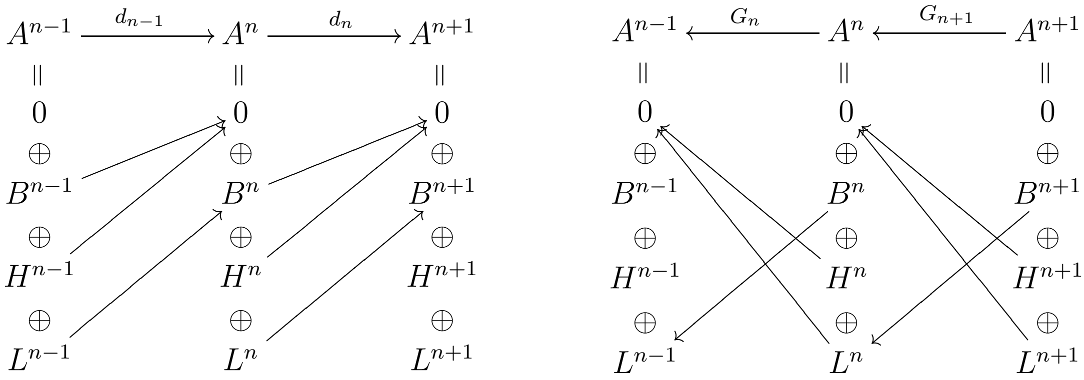
La función G puede no ser única o no existir. La construiremos explícitamente como sigue:

Definición 2.6:

La función lineal graduada $G : A \to A$ de grado -1 se define como:

- $G = 0$*, cuando restringida a* L *y* H*.*
- $G = (d|_L)^{-1}$ *cuando restringida a* B*.*

Observemos que $d|_L : L \to B$ es inyectiva, pues $d(a) = 0$ sólo si $a \in Z$, pero $a \in L$ y $L \cap Z = \{0\}$, por lo que $a = 0$. Luego es correcto pedir que la función G actúe como función inversa del diferencial d en B. El diagrama de la izquierda muestra cómo actúa d, y el diagrama de la derecha cómo actúa G.



Un elemento de $a \in A$ será escrito como $a = (b, h, l)$ o $a = b \oplus h \oplus l$, con $b \in B$, $h \in H$ y $l \in L$. Notemos que $b \in B$ implica que existe $b' \in L$ tal que $b = db'$. Si $b = 0$, entonces $b' = 0$ y $G(a) = 0$. Si $b \neq 0$,

$$G(a) = G(b, h, l) = G(db', h, l) = (d^{-1}db', 0, 0) = (b', 0, 0) = b'$$

De aquí, tenemos que la imagen de G está contenida en L. Realmente tenemos que $G(A) = L$, puesto que si $a \in L$, entonces $da = 0$ y por lo tanto $Gd(a) = d^{-1}d(a) = a$ es decir $a \in G(A)$.

La función G definida en 2.6 cumple que $id_A - pr_H = [[d, G]] := d \circ G + G \circ d$. En efecto, sea $a = (b, h, l) \in A$, tenemos

$$\begin{aligned}
[[d, G]]\,(b, h, l) &= d \circ G(b, h, l) + G \circ d(b, h, l) = d(0, 0, d^{-1}b) + G(dl, 0, 0) \\
&= (b, 0, 0) + (0, 0, l) = (b, 0, l) = (b, h, l) - (0, h, 0) \\
&= id_A(b, h, l) - pr_H(b, h, l) = (id_A - pr_H)\,(b, h, l)
\end{aligned}$$

Por lo que $id_A - pr_H = [[d,G]]$ y $pr_H = id_A - [[d,G]]$. Por lo tanto, la imagen de $(id_A - [[d,G]])$ está contenida en H.

A continuación definiremos las funciones lineales λ_n como en [14].

Definición 2.7:
Las funciones lineales graduadas $\lambda_n : A^{\otimes n} \to A$ de grado $2-n$ con $n \geq 1$, están definidas como sigue: $G\lambda_1(a_1) = -a_1$, y para $n \geq 2$,

$$\lambda_n(a_1 \cdot \ldots \cdot a_n) = \sum_{\substack{s+u=n+1 \\ s\geq 1,\ u\geq 2}} (-1)^k G\lambda_s(a_1 \cdot \ldots \cdot a_s) \cdot G\lambda_{u-1}(a_{s+1} \cdot \ldots \cdot a_n), \qquad (\star)$$

donde $k = 1 + s + u(|a_1| + \ldots + |a_s|)$.

A continuación calcularemos las primeras funciones de $\lambda(n)$.

$\lambda(2)$: Si $n = 2$, tenemos que $\lambda_2 : A \otimes A \to A$ con $|\lambda_2| = 0$ y $(\star)$ tiene un único sumando:

$$\lambda_2(a_1 \cdot a_2) = -(-1)^{1+2|a_1|} G\lambda_1(a_1) \cdot G\lambda_1(a_2) = a_1 \cdot a_2 = m_2(a_s \otimes a_2)$$

$\lambda(3)$: Si $n = 3$, tenemos que $\lambda_3 : A \otimes A \otimes A \to A$ con $|\lambda_3| = -1$ y $(\star)$ tiene dos sumandos:

$$\begin{aligned} \lambda_3(a_1 \cdot a_2 \cdot a_3) &= -(-1)^{1+3|a_1|} G\lambda_1(a_1) \cdot G\lambda_2(a_2 \cdot a_3) \\ &\quad -(-1)^{2+2(|a_1|+|a_2|)} G\lambda_2(a_1, a_2) \cdot G\lambda_1(a_3) \\ &= G(a_1 \cdot a_2) \cdot a_3 - (-1)^{|a_1|} a_1 \cdot G(a_2 \cdot a_3) \end{aligned}$$

$\lambda(4)$: Si $n = 4$ tenemos que $\lambda_4 : A \otimes A \otimes A \otimes A \to A$ con $|\lambda_4| = -2$ y $(\star)$ tiene 3 sumandos

$$\begin{aligned} \lambda_4(a_1 \cdot \ldots \cdot a_4) &= -(-1)^{1+4|a_1|} G\lambda_1(a_1) \cdot G\lambda_3(a_2 \cdot a_3 \cdot a_4) \\ &\quad -(-1)^{2+3(|a_1|+|a_2|)} G\lambda_2(a_1 \cdot a_2) \cdot G\lambda_2(a_3 \cdot a_4) \\ &\quad -(-1)^{3+2(|a_1|+|a_2|+|a_3|)} G\lambda_3(a_1 \cdot a_2 \cdot a_3) \cdot G\lambda_1(a_4) \\ &= -a_1 \cdot G\lambda_3(a_2 \cdot a_3 \cdot a_4) - (-1)^{|a_1|+|a_2|} G(a_1 \cdot a_2) \cdot G(a_3 \cdot a_4) \\ &\quad -G\lambda_3(a_1 \cdot a_2 \cdot a_3) \cdot a_4 \end{aligned}$$

Con la definición de las funciones λ_n podemos definir las candidatas a multiplicaciones de orden superior para $H = H(A)$. Esto nos permitirá otorgar una estructura de A_∞-álgebra a la cohomología $H(A)$, como hemos dicho antes.

Definición 2.8:
Sean las funciones lineales $\mu_n : H^{\otimes n} \to H$, definidas por:

$$\mu_1 := d \ y \ \mu_n := (id - [[d,G]]) \circ \lambda_n = pr_H \circ \lambda_n, \ para \ todo \ n \geq 2,$$

con $[[d,G]] = d \circ G + G \circ d$

En esta definición las funciones d, id, $[[d,G]]$ y pr_H, restringidas a H, serán miradas como las funciones inducidas a $H(A)$. Además por como $H = H(A)$ (ver página 34). Las funciones λ_n también serán restringidas a H, y por tanto inducidas a $H(A)$. Debemos demostrar que para todo $n \geq 1$, las funciones μ_n satisfacen la condición de Stasheff para las multiplicaciones de orden superior. El siguiente teorema, de Merkulov, establece esto:

Teorema 2.9 (Teorema de Merkulov)**:**
Las funciones lineales μ_n $\forall n \geq 1$ satisfacen la igualdad de Stasheff $St(n) = 0$. Es decir, para $a_1 \cdot \ldots \cdot a_n \in H$

$$\sum_{\substack{s+u=n+1 \\ s,u\geq 1}} \sum_{r=0}^{u-1} (-1)^k \mu_u\left(a_1 \cdot \ldots \cdot a_r \cdot \mu_s(a_{r+1} \cdot \ldots \cdot a_{r+s}) \cdot a_{r+s+1} \cdot \ldots \cdot a_n\right) = 0$$

con $k = s(|a_1| + \ldots + |a_r|) + r(s-1) + (u-1)s$.

Para la demostración del teorema de Merkulov, requerimos establecer dos lemas previos:

Lema 2.10:
Sea $\Phi_n : A^{\otimes n} \to A$, tal que $\Phi_2 = 0$ y para $n \geq 3$ y toda $n-$upla $a_1 \cdot \ldots \cdot a_n \in A$ se define:

$$\Phi_n(a_1 \cdot \ldots \cdot a_n) := \sum_{\substack{u+s=n+1 \\ u,s\geq 2}} \sum_{r=0}^{u-1} (-1)^k \lambda_u(a_1 \cdot \ldots \cdot a_r \cdot \lambda_s(a_{r+1} \cdot \ldots \cdot a_{r+s}) \cdot a_{r+s+1} \cdot \ldots \cdot a_n)$$

con $k = s(|a_1| + \ldots + |a_r|) + r(s-1) + (u-1)s$. Entonces $\Phi_n(a_1 \cdot \ldots \cdot a_n) = 0$ para todo $n \geq 3$.

Demostración: El grado de Φ_n es $3-n$ para todo $n \geq 3$.

Para $n=3$ y $a_1, a_2, a_3 \in A$ tenemos que:

$$\Phi_3(a_1 \cdot a_2 \cdot a_3) = \lambda_2(\lambda_2(a_1 \cdot a_2) \cdot a_3) - \lambda_2(a_1 \lambda_2(a_2 \cdot a_3)) = (a_1 \cdot a_2) \cdot a_3 - a_1 \cdot (a_2 \cdot a_3) = 0$$

Para $n \geq 4$ y $a_1 \cdot \ldots \cdot a_n \in A$, tenemos

$$\begin{aligned}
\Phi_n(a_1 \cdot \ldots \cdot a_n) &= \sum_{\substack{u+s=n+1\\ u\cdot s\geq 2}} \sum_{r=0}^{u-1} (-1)^k \lambda_u(a_1 \cdot \ldots \cdot a_r \cdot \lambda_s(a_{r+1} \cdot \ldots \cdot a_{r+s}) \cdot a_{r+s+1} \cdot \ldots \cdot a_n) \\
&= \sum_{\substack{u+s=n+1\\ u\cdot s\geq 2}} (-1)^{(u-1)s} \lambda_u(\lambda_s(a_1 \cdot \ldots \cdot a_s) \cdot a_{s+1} \cdot \ldots \cdot a_n) \\
&\quad + \sum_{\substack{u+s=n+1\\ u\cdot s\geq 2}} (-1)^{s(|a_1|+\ldots+|a_{u-1}|)+(u-1)} \lambda_u(a_1 \cdot \ldots \cdot a_{u-1} \cdot \lambda_s(a_u \cdot \ldots \cdot a_n)) \\
&\quad + \sum_{\substack{u+s=n+1\\ u\cdot s\geq 2}} \sum_{r=1}^{u-2} (-1)^k \lambda_u(a_1 \cdot \ldots \cdot a_r \cdot \lambda_s(a_{r+1} \cdot \ldots \cdot a_{r+s}) \cdot a_{r+s+1} \cdot \ldots \cdot a_n)
\end{aligned} \tag{2.1}$$

De los dos primeros sumandos de la ecuación (2.1) se tiene:

$$\begin{aligned}
(*) = &\sum_{\substack{u+s=n+1\\ u,s\geq 2}} (-1)^{(u-1)s} \lambda_u(\lambda_s(a_1 \cdot \ldots \cdot a_s) \cdot a_{s+1} \cdot \ldots \cdot a_n) \\
&+ \sum_{\substack{u+s=n+1\\ u,s\geq 2}} (-1)^{s(|a_1|+\ldots+|a_{u-1}|)+(u-1)} \lambda_u(a_1 \cdot \ldots \cdot a_{u-1} \cdot \lambda_s(a_u \cdot \ldots \cdot a_n))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= &\sum_{\substack{u+s=n+1\\ u,s\geq 2}} (-1)^{(u-1)s} \sum_{\substack{t+l=u+1\\ t\geq 1,\ l\geq 2}} -(-1)^{t+l(|\lambda_s(a_1\cdot\ldots\cdot a_s)|+|a_{s+1}|+\ldots+|a_{a+s-1}|)} \\
&\qquad G\lambda_t(\lambda_s(a_1 \cdot \ldots \cdot a_s) \cdot a_{s+1} \cdot \ldots \cdot a_{s+t-1}).G\lambda_{l-1}(a_{s+t} \cdot \ldots \cdot a_n) \\
&+ \sum_{\substack{u+s=n+1\\ u,s\geq 2}} (-1)^{s(|a_1|+\ldots+|a_{u-1}|)+u-1} \sum_{\substack{t+l=u+1\\ t\geq 1,\ l\geq 2}} -(-1)^{t+l(|a_1|+\ldots+|a_t|)} \\
&\qquad G\lambda_t(a_1 \cdot \ldots \cdot a_t).G\lambda_{l-1}(a_{t+1} \cdot \ldots \cdot a_{t+l-2} \cdot \lambda_s(a_{t+l-1} \cdot \ldots \cdot a_n))
\end{aligned}$$

$$= -\sum_{\substack{u+s=n+1\\ u,s\geq 2}} \sum_{\substack{t+l=u+1\\ t\geq 1,\ l\geq 2}} (-1)^p G\lambda_t(\lambda_s(a_1 \cdot \ldots \cdot a_s), a_{s+1} \cdot \ldots \cdot a_{s+t-1}).G\lambda_{l-1}(a_{s+t} \cdot \ldots \cdot a_n)$$

$$- \sum_{\substack{u+s=n+1\\ u,s\geq 2}} \sum_{\substack{t+l=u+1\\ t\geq 1,\ l\geq 2}} (-1)^q G\lambda_t(a_1\cdot\ldots\cdot a_t).G\lambda_{l-1}(a_{t+1}\cdot\ldots\cdot a_{t+l-2}\cdot\lambda_s(a_{t+l-1}\cdot\ldots\cdot a_n)),$$

donde $(-1)^p = (-1)^{(u-1)s+t+l(|\lambda_s(a_1\cdot\ldots\cdot a_s)|+|a_{s+1}|+\ldots+|a_{t+s-1}|)} = (-1)^{(u-1)s+t+l(|a_1|+\ldots+|a_{t+s-1}|+s)}$
y $(-1)^q = (-1)^{s(|a_1|+\ldots+|a_{u-1}|)+u-1+t+l(|a_1|+\ldots+|a_t|)}$

Del tercer sumando de (2.1) tenemos:

$$(\star) = \sum_{\substack{u+s=n+1\\ u,s\geq 2}} \sum_{r=1}^{u-2} (-1)^k \lambda_u(a_1\cdot\ldots\cdot a_r\cdot\lambda_s(a_{r+1}\cdot\ldots\cdot a_{r+s})\cdot a_{r+s+1}\cdot\ldots\cdot a_n)$$

$$= - \sum_{\substack{u+s=n+1\\ u,s\geq 2}} \sum_{r=1}^{u-2} \sum_{\substack{t+l=u+1\\ 1\leq t\leq r}} (-1)^{k+a}$$

$$G\lambda_t(a_1\cdot\ldots\cdot a_t)\cdot G\lambda_{l-1}(a_{t+1}\cdot\ldots\cdot a_r\cdot\lambda_s(a_{r+1}\cdot\ldots\cdot a_{r+s})\cdot a_{r+s+1}\cdot\ldots\cdot a_n)$$

$$- \sum_{\substack{u+s=n+1\\ u,s\geq 2}} \sum_{r=1}^{u-2} \sum_{\substack{t+l=u+1\\ t\geq r+1}} (-1)^{k+b}$$

$$G\lambda_t(a_1\cdot\ldots\cdot a_r\cdot\lambda_s(a_{r+1}\cdot\ldots\cdot a_{r+s})\cdot a_{r+s+1}\cdot\ldots\cdot a_{t+s-1})\cdot G\lambda_{l-1}(a_{t+s}\cdot\ldots\cdot a_n),$$

donde $a = t + l(|a_1| + \ldots + |a_t|)$ y $b = t + l(|a_1| + \ldots + |a_{t+s-1}| + s)$.

Así, $\Phi_n(a_1\cdot\ldots\cdot a_n) = (*) + (\star)$. Agrupando el primer sumando de $(*)$ con el primer sumando de $(\star)$ se obtiene:

$$- \sum_{\substack{u+s=n+1\\ u\geq 2,\ s\geq 2}} (-1)^{s(|a_1|+\ldots+|a_u|)} G\lambda_u(a_1\cdot\ldots\cdot a_u).G\Phi_{s-1}(a_{u+1}\cdot\ldots\cdot a_n)$$

Y también, agrupando el segundo sumando de $(*)$ con el segundo sumando de $(\star)$ tenemos:

$$\sum_{\substack{u+s=n+1\\ u\geq 2,\ s\geq 2}} (-1)^{u+s(|a_1|+\ldots+|a_u|)} G\Phi_u(a_1\cdot\ldots\cdot a_u)\cdot G\lambda_{s-1}(a_{u+1}\cdot\ldots\cdot a_n)$$

Y por lo tanto Φ_n se puede escribir de forma inductiva como:

$$\begin{aligned}\Phi_n(a_1\cdot\ldots\cdot a_n) &= \sum_{\substack{u+s=n+1\\ u\geq 2,\ s\geq 2}} (-1)^{u+s(|a_1|+\ldots+|a_u|)} G\Phi_u(a_1\cdot\ldots\cdot a_u)\cdot G\lambda_{s-1}(a_{u+1}\cdot\ldots\cdot a_n)\\ &\quad - \sum_{\substack{u+s=n+1\\ u\geq 2,\ s\geq 2}} (-1)^{s(|a_1|+\ldots+|a_u|)} G\lambda_u(a_1\cdot\ldots\cdot a_u).G\Phi_{s-1}(a_{u+1}\cdot\ldots\cdot a_n)\end{aligned}$$

Usando inducción sobre n, es fácil ver $\Phi_n(a_1\cdot\ldots\cdot a_n)=0$ para todo $n\geq 2$. $\square$

Lema 2.11:

Sea $\Theta_n : A^{\otimes n}\to A$, tal que $n\geq 2$ y toda $n-$upla $a_1\cdot\ldots\cdot a_n\in A$ se define:

$$\Theta_n(a_1\cdot\ldots\cdot a_n) = d\lambda_n(a_1\cdot\ldots\cdot a_n)+\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^{n-1+|a_1|+\ldots+|a_r|}\lambda_n(a_1\cdot\ldots\cdot a_r\cdot da_{r+1}\cdot a_{r+2}\cdot\ldots\cdot a_n)$$

$$-\sum_{\substack{u+s=n+1\\ u,s\geq 2}}\sum_{r=0}^{u-1}(-1)^m\lambda_u\left(a_1\cdot\ldots\cdot a_r\cdot[[d,G]]\,\lambda_s(a_{r+1}\cdot\ldots\cdot a_{r+s})\cdot a_{r+s+1}\cdot\ldots\cdot a_n\right))$$

con $m=s(|a_1|+\ldots+|a_r|)+r(s-1)+(u-1)s$.

La función lineal λ_u, con $u\geq 2$ satisface que $\Theta_n(a_1\cdot\ldots\cdot a_n)=0$ para todo $n\geq 3$.

<u>*Demostración*</u>: El grado de la función Θ_n es $3-n$. Para $n=2$ y $n=3$, se tiene:

$$\begin{aligned}\Theta_2(a_1\cdot a_2) &= d\lambda_2(a_1\cdot a_2)+(-1)^{2+1}\lambda_2(da_1\cdot a_2)+(-1)^{2+1+|a_1|}\lambda_2(a_1\cdot da_2)\\ &= d(a_1\cdot a_2)-da_1\cdot a_2-(-1)^{|a_1|}a_1.da_2\\ &= d(a_1\cdot a_2)-d(a_1\cdot a_2)=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Theta_3(a_1\cdot a_2\cdot a_3) &= d\lambda_3(a_1\cdot a_2\cdot a_3)+\lambda_3(da_1\cdot a_2\cdot a_3)+(-1)^{|a_1|}\lambda_3(a_1\cdot da_2\cdot a_3)\\ &\quad +(-1)^{|a_1|+|a_2|}\lambda_3(a_1\cdot a_2\cdot da_3)-\lambda_2([[d,G]]\,\lambda_2(a_1\cdot a_2)\cdot a_3)\\ &\quad +\lambda_2(a_1\cdot[[d,G]]\,\lambda_2(a_2\cdot a_3))\\ &= dG(a_a\cdot a_2)\cdot a_3-(-1)^{|a_1|+|a_2|}G(a_1.a_2)\cdot da_3-(-1)^{|a_1|}da_1\cdot G(a_2\cdot a_3)\\ &\quad -a_1\cdot dG(a_2\cdot a_3)+G(da_1\cdot a_2)\cdot a_3+(-1)^{|a_1|}da_1\cdot G(a_2\cdot a_3)\\ &\quad +(-1)^{|a_1|G(a_1\cdot da_2)\cdot a_3-a_1\cdot G(da_2\cdot a_3)}+(-1)^{|a_1|+|a_2|}G(a_1\cdot a_2)\cdot da_3\\ &\quad -(-1)^{|a_2|}a_1\cdot G(a_2\cdot da_3)-dG(a_1\cdot a_2)\cdot a_3-G(da_1\cdot a_2)\cdot a_3\\ &\quad -(-1)^{|a_1|}G(a_1\cdot da_2)\cdot a_3+a_1\cdot dG(a_2\cdot a_3)+a_1\cdot G(da_2\cdot a_3)\\ &\quad +(-1)^{|a_2|}a_1\cdot G(a_2\cdot da_3)=0\end{aligned}$$

Para $n \geq 4$, consideremos los sumandos de

$$\Theta_n(a_1 \cdot \ldots \cdot a_n) = \underbrace{d\lambda_n(a_1 \cdot \ldots \cdot a_n)}_{\spadesuit} + \underbrace{\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^{n-1+|a_1|+\ldots+|a_r|}\lambda_n(a_1 \cdot \ldots \cdot a_r \cdot da_{r+1} \cdot a_{r+2} \cdot \ldots \cdot a_n)}_{\clubsuit}$$

$$\underbrace{- \sum_{\substack{u+s=n+1 \\ u,s\geq 2}} \sum_{r=0}^{u-1}(-1)^m \lambda_u \left(a_1 \cdot \ldots \cdot a_r \cdot [[d,G]]\, \lambda_s(a_{r+1} \cdot \ldots \cdot a_{r+s}) \cdot a_{r+s+1} \cdot \ldots \cdot a_n\right))}_{\diamondsuit}$$

Del primer sumando se tiene:

$$\begin{aligned}
(\spadesuit) &= d\lambda_n(a_1 \cdot \ldots \cdot a_n)) \\
&= - \sum_{\substack{s+u=n+1 \\ s\geq 2,\ u\geq 3}} (-1)^{s+u(|a_1|+\ldots+|a_s|)} d\left(G\lambda_s(a_1 \cdot \ldots \cdot a_s) \cdot G\lambda_{u-1}(a_{s+1} \cdot \ldots \cdot a_n)\right) \\
&= - \sum_{\substack{s+u=n+1 \\ s\geq 2,\ u\geq 3}} (-1)^{s+u(|a_1|+\ldots+|a_s|)} \left(dG\lambda_s(a_1 \cdot \ldots \cdot a_s)\right) \cdot G\lambda_{u-1}(a_{s+1} \cdot \ldots \cdot a_n) \\
&\quad - \sum_{\substack{s+u=n+1 \\ s\geq 2,\ u\geq 3}} (-1)^{s+u(|a_1|+\ldots+|a_s|)+|G\lambda_s(a_1\cdot\ldots\cdot a_s)|} G\lambda_s(a_1 \cdot \ldots \cdot a_s) \cdot \left(dG\lambda_{u-1}(a_{s+1} \cdot \ldots \cdot a_n)\right) \\
&= - \sum_{\substack{s+u=n+1 \\ s\geq 2,\ u\geq 3}} (-1)^{s+u(|a_1|+\ldots+|a_s|)} \left(dG\lambda_s(a_1 \cdot \ldots \cdot a_s)\right) \cdot G\lambda_{u-1}(a_{s+1} \cdot \ldots \cdot a_n) \\
&\quad - \sum_{\substack{s+u=n+1 \\ s\geq 2,\ u\geq 3}} (-1)^{(u-1)(|a_1|+\ldots+|a_s|)+1} G\lambda_s(a_1 \cdot \ldots \cdot a_s) \cdot \left(dG\lambda_{u-1}(a_{s+1} \cdot \ldots \cdot a_n)\right)
\end{aligned}$$

Del segundo sumando:

$$\begin{aligned}
(\clubsuit) &= \sum_{r=0}^{n-1}(-1)^{n-1+|a_1|+\ldots+|a_r|}\lambda_n(a_1 \cdot \ldots \cdot a_r \cdot da_{r+1} \cdot a_{r+2} \cdot \ldots \cdot a_n) \\
&= \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{\substack{s+u=n+1 \\ s\geq 2,\ u\geq 3,\ s\geq r+1}} (-1)^{n-1+|a_1|+\ldots+|a_r|+s+u(|a_1|+\ldots+|a_r|+|da_{r+1}|+|a_{r+2}|+\ldots+|a_s|)} \\
&\qquad G\lambda_s(a_1 \cdot \ldots \cdot a_r \cdot da_{r+1} \cdot a_{r+2} \cdot \ldots \cdot a_s) \cdot G\lambda_{u-1}(a_{s+1} \cdot \ldots \cdot a_n) \\
&\quad + \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{\substack{s+u=n+1 \\ s\geq 2,\ u\geq 3,\ 1\leq s\leq r}} (-1)^{n-1+|a_1|+\ldots+|a_r|+s+u(|a_1|+\ldots+|a_s|})) \\
&\qquad G\lambda_s(a_1 \cdot \ldots \cdot a_s) \cdot G\lambda_{u-1}(a_{s+1} \cdot \ldots \cdot a_r \cdot da_{r+1} \cdot a_{r+2} \cdot \ldots \cdot a_n)
\end{aligned}$$

$$= \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{\substack{s+u=n+1\\ s\geq 2,\ u\geq 3,\ s\geq r+1}} (-1)^{(|a_1|+\ldots+|a_r|)+u(|a_1|+\ldots+|a_s|)}$$
$$G\lambda_s(a_1\cdot\ldots\cdot a_r\cdot da_{r+1}\cdot a_{r+2}\cdot\ldots\cdot a_s)\cdot G\lambda_{u-1}(a_{s+1}\cdot\ldots\cdot a_n)$$
$$+\sum_{r=0}^{n-1} \sum_{\substack{s+u=n+1\\ s\geq 2,\ u\geq 3,\ 1\leq s\leq r}} (-1)^{u+(|a_1|+\ldots+|a_r|)+u(|a_1|+\ldots+|a_s|)}$$
$$G\lambda_s(a_1\cdot\ldots\cdot a_s)\cdot G\lambda_{u-1}(a_{s+1}\cdot\ldots\cdot a_r\cdot da_{r+1}\cdot a_{r+2}\cdot\ldots\cdot a_n)$$

Y del tercer sumando:

$$(\diamondsuit) = -\sum_{\substack{u+s=n+1\\ s\geq 2,\ u\geq 3}} \sum_{r=0}^{u-1} (-1)^m \lambda_u\left(a_1\cdot\ldots\cdot a_r\cdot [[d,G]]\,\lambda_s(a_{r+1}\cdot\ldots\cdot a_{r+s}\cdot a_{r+s+1}\cdot\ldots\cdot a_n)\right)$$
$$= -\sum_{\substack{s+u=n+1\\ s\geq 2,\ u\geq 3}} \sum_{r=0}^{u-1} \sum_{\substack{k+l=u+1\\ k\geq 1,\ l\geq 2,\ k\geq r+1}} (-1)^{m+l(|a_1|+\ldots+|a_{k+s-1}|+s)}$$
$$G\lambda_k(a_1\cdot\ldots\cdot a_r\cdot [[d,G]]\,\lambda_s(a_{r+1}\cdot\ldots\cdot a_{r+s})\cdot a_{r+s+1}\cdot\ldots\cdot a_{k+s-1}))\cdot G\lambda_{l-1}(a_{k+s}\cdot\ldots\cdot a_n)$$
$$-\sum_{\substack{s+u=n+1\\ s\geq 2,\ u\geq 3}} \sum_{r=0}^{u-1} \sum_{\substack{k+l=u+1\\ k\geq 1,\ l\geq 2,\ 1\leq k\leq r}} (-1)^{m+l(|a_1|+\ldots+|a_k|)}$$
$$G\lambda_k(a_1\cdot\ldots\cdot a_k)\cdot G\lambda_{l-1}(a_{k+1}\cdot\ldots\cdot a_r\cdot [[d,G]]\,\lambda_s(a_{r+1}\cdot\ldots\cdot a_s)\cdot a_{r+s+1}\cdot\ldots\cdot a_n)$$

Luego, $\Theta_n(a_1\cdot\ldots\cdot a_n) = (\spadesuit) + (\clubsuit) + (\diamondsuit)$ y

$\Theta_n(a_1\cdot\ldots\cdot a_n) =$

$$= \underbrace{-\sum_{\substack{s+u=n+1\\ s\geq 2,\ u\geq 3}} (-1)^{s+u(|a_1|+\ldots+|a_s|)}\,(dG\lambda_s(a_1\cdot\ldots\cdot a_s))\cdot G\lambda_{u-1}(a_{s+1}\cdot\ldots\cdot a_n)}_{(\blacklozenge 1)}$$
$$\underbrace{-\sum_{\substack{s+u=n+1\\ s\geq 2,\ u\geq 3}} (-1)^{1+(u-1)(|a_1|+\ldots+|a_s|)} G\lambda_s(a_1\cdot\ldots\cdot a_s)\cdot(dG\lambda_{u-1}(a_{s+1}\cdot\ldots\cdot a_n))}_{(\diamond 1)}$$
$$\underbrace{+\sum_{r=0}^{n-1} \sum_{\substack{s+u=n+1\\ s\geq 2,\ u\geq 3,\ s\geq r+1}} (-1)^{(|a_1|+\ldots+|a_r|)+u(|a_1|+\ldots+|a_s|)} G\lambda_s(a_1\cdot\ldots\cdot a_r\cdot da_{r+1}\cdot a_{r+2}\cdot\ldots\cdot a_s)\cdot G\lambda_{u-1}(a_{s+1}\cdot\ldots\cdot a_n)}_{(\blacklozenge 2)}$$
$$\underbrace{-\sum_{r=0}^{n-1} \sum_{\substack{s+u=n+1\\ s\geq 2,\ u\geq 3,\ 1\leq s\leq r}} (-1)^{u+(1+|a_1|+\ldots+|a_r|)+u(|a_1|+\ldots+|a_s|)} G\lambda_s(a_1\cdot\ldots\cdot a_s)\cdot G\lambda_{u-1}(a_{s+1}\cdot\ldots\cdot a_r\cdot da_{r+1}\cdot a_{r+2}\cdot\ldots\cdot a_n)}_{(\diamond 2)}$$

$$- \sum_{\substack{s+u=n+1\\ s\geq 2,\ u\geq 3}} \sum_{r=0}^{u-1} \sum_{\substack{k+l=u+1\\ k\geq 1,\ l\geq 2,\ k\geq r+1}} (-1)^a$$

$$\underbrace{G\lambda_k(a_1 \cdot \ldots \cdot a_r \cdot [[d,G]]\, \lambda_s(a_{r+1} \cdot \ldots \cdot a_{r+s}) \cdot a_{r+s+1} \cdot \ldots \cdot a_{k+s-1})) \cdot G\lambda_{l-1}(a_{k+s} \cdot \ldots \cdot a_n)}_{(\blacklozenge 3)}$$

$$- \sum_{\substack{s+u=n+1\\ s\geq 2,\ u\geq 3}} \sum_{r=0}^{u-1} \sum_{\substack{k+l=u+1\\ k\geq 1,\ l\geq 2,\ 1\leq k\leq r}} (-1)^b$$

$$\underbrace{G\lambda_k(a_1 \cdot \ldots \cdot a_k) \cdot G\lambda_{l-1}(a_{k+1} \cdot \ldots \cdot a_r \cdot [[d,G]]\, \lambda_s(a_{r+1} \cdot \ldots \cdot a_s) \cdot a_{r+s+1} \cdot \ldots \cdot a_n)}_{(\lozenge 3)}$$

Luego,

$$\Theta_n(a_1 \cdot \ldots \cdot a_n) = (\blacklozenge 1) + (\blacklozenge 2) + (\blacklozenge 3) - ((\lozenge 1) + (\lozenge 2) + (\lozenge 3))$$

Por lo tanto es posible escribir recursivamente la función Θ_n como sigue:

$$\begin{aligned}\Theta_n(a_1 \cdot \ldots \cdot a_n) \;=\; & \sum_{\substack{s+u=n+1\\ s\geq 2,\ u\geq 3}} (-1)^{s+u(|a_1|+\ldots+|a_s|)} G\Theta_s(a_1 \cdot \ldots \cdot a_s) \cdot G\lambda_{u-1}(a_{s+1} \cdot \ldots \cdot a_n) \\ & - \sum_{\substack{s+u=n+1\\ s\geq 2,\ u\geq 3}} (-1)^{(u-1)(|a_1|+\ldots+|a_s|)} G\lambda_s(a_1 \cdot \ldots \cdot a_s) \cdot G\Theta_{u-1}(a_{s+1} \cdot \ldots \cdot a_s)\end{aligned}$$

Usando inducción sobre n, tenemos $\Theta_n(a_1 \cdot \ldots \cdot a_n) = 0$ para todo $n \geq 2$. $\square$

<u>*Demostración*</u>: [**Teorema de Merkulov (2.9)**]

Definamos la función Ψ_n como:

$$\Psi_n(a_1 \cdot \ldots \cdot a_n) = \sum_{\substack{s+u=n+1\\ s,u\geq 1}} \sum_{r=0}^{u-1} (-1)^k \mu_u\left(a_1 \cdot \ldots \cdot a_r \cdot \mu_s(a_{r+1} \cdot \ldots \cdot a_{r+s}) \cdot a_{r+s+1} \cdot \ldots \cdot a_n\right)$$

Probaremos que $\Psi_n(a_1 \cdot \ldots \cdot a_n) = 0$ para todo $n \geq 1$.

Notemos que para $n = 1$:

$$\Psi_1(a_1) = (-1)^{1\cdot 0+0\cdot 0+1\cdot 1} \mu_1(\mu_1(a_1)) = -d \circ d(a_1) = 0$$

Para $n=2$:

$$\begin{aligned}\Psi_2(a_1\cdot a_2) &= \mu_1\left(\mu_2(a_1\cdot a_2)\right)-\mu_2\left(\mu_1(a_1)\cdot a_2\right)-(-1)^{|a_1|}\mu_2\left(a_1\cdot\mu_1(a_2)\right)\\ &= d\left[(id-dG-Gd)\lambda_2(a_1\cdot a_2)\right]+(-id+dG+Gd)\lambda_2(da_1\cdot a_2)\\ &\quad -(-1)^{|a_1|}(id-dG-Gd)\lambda_2(a_1\cdot da_2)\\ &= d\left[a_1\cdot a_2-dG(a_1\cdot a_2)-Gd(a_1\cdot a_2)\right]-da_1\cdot a_2+dG(da_1\cdot a_2)+Gd(da_1\cdot a_2)\\ &\quad -(-1)^{|a_1|}a_1\cdot da_2+(-1)^{|a_1|}dG(a_1\cdot da_2)+(-1)^{|a_1|}Gd(a_1\cdot da_2)\\ &= d(a_1\cdot a_2)-dGd(a_1\cdot a_2)-d(a_1\cdot a_2)+dGd(a_1\cdot a_2)+Gdd(a_1\cdot a_2)=0.\end{aligned}$$

Para $n\geq 3$, notemos que si $s=1$, entonces $u=n$ y el sumando, correspondiente, de Ψ_n es:

$$\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^{n-1+|a_1|+\ldots+|a_r|}\mu_u\left(a_1\cdot\ldots\cdot a_r\cdot\mu_s(a_{r+1}\cdot\ldots\cdot a_{r+s})\cdot a_{r+s+1}\cdot\ldots\cdot a_n\right)$$

$$=\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^{n-1+|a_1|+\ldots+|a_r|}(id-[[d,G]])\lambda_n(a_1\cdot\ldots\cdot a_r\cdot da_{r+1}\cdot a_{r+2}\cdot\ldots\cdot a_n)$$

Si $s=n$, entonces $u=1$ y el sumando, correspondiente, de Ψ_n es:

$$\begin{aligned}\mu_1(\mu_n(a_1\cdot\ldots\cdot a_n)) &= d\left((id-[[d,G]])\lambda_n(a_1\cdot\ldots\cdot a_n)\right)\\ &= \lambda_n(a_1\cdot\ldots\cdot a_n)-dGd\lambda_n(a_1\cdot\ldots\cdot a_n)\end{aligned}$$

Ahora, con $k=s(|a_1|+\ldots+|a_r|)+r(s-1)+(u-1)s$ y para $n\geq 3$ notemos que:

$$\begin{aligned}0 &= p(\Phi_n+\Theta_n)(a_1\cdot\ldots\cdot a_n)\\ &= (id-[[d,G]])\,(\Phi_n+\Theta_n)(a_1\cdot\ldots\cdot a_n)\\ &= (id-[[d,G]])\Bigg[\sum_{\substack{s+u=n+1\\ s,u\geq 2}}\sum_{r=0}^{u-1}(-1)^k\lambda_u(a_1\cdot\ldots\cdot a_r\cdot\lambda_s(a_{r+1}\cdot\ldots\cdot a_{r+s})\cdot a_{r+s+1}\cdot\ldots\cdot a_n)\\ &\quad +d\lambda_n(a_1\cdot\ldots\cdot a_n)+\sum_{r=0}^{u-1}(-1)^{n-1+|a_1|+\ldots+|a_r|}\lambda_n(a_1\cdot\ldots\cdot a_r\cdot da_{r+1}\cdot a_{r+2}\cdot\ldots\cdot a_n)\\ &\quad -\sum_{\substack{s+u=n+1\\ s,u\geq 2}}\sum_{r=0}^{u-1}(-1)^k\lambda_u(a_1\cdot\ldots\cdot a_r\cdot[[d,G]]\,\lambda_s(a_{r+1}\cdot\ldots\cdot a_{r+s})\cdot a_{r+s+1}\cdot\ldots\cdot a_n)\Bigg]\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (id-[[d,G]])\Bigg[d\lambda_n(a_1\cdot\ldots\cdot a_n)+\sum_{r=0}^{u-1}(-1)^{n-1+|a_1|+\ldots+|a_r|}\lambda_n(a_1\cdot\ldots\cdot a_r\cdot da_{r+1}\cdot a_{r+2}\cdot\ldots\cdot a_n)\\
&\quad+\sum_{\substack{s+u=n+1\\ s,u\geq 2}}\sum_{r=0}^{u-1}(-1)^k\lambda_u(a_1\cdot\ldots\cdot a_r\cdot(id-[[d,G]])\lambda_s(a_{r+1}\cdot\ldots\cdot a_{r+s})\cdot a_{r+s+1}\cdot\ldots\cdot a_n)\Bigg]\\
&= (id-[[d,G]])\,d\lambda_n(a_1\cdot\ldots\cdot a_n)\\
&\quad+\sum_{r=0}^{u-1}(-1)^{n-1+|a_1|+\ldots+|a_r|}\,(id-[[d,G]])\,\lambda_n(a_1\cdot\ldots\cdot a_r\cdot da_{r+1}\cdot a_{r+2}\cdot\ldots\cdot a_n)\\
&\quad+\sum_{\substack{s+u=n+1\\ s,u\geq 2}}\sum_{r=0}^{u-1}(-1)^k\,(id-[[d,G]])\,\lambda_u(a_1\cdot\ldots\cdot a_r\cdot\mu_s(a_{r+1}\cdot\ldots\cdot a_{r+s})\cdot a_{r+s+1}\cdot\ldots\cdot a_n)\\
&= d\lambda_n(a_1\cdot\ldots\cdot a_n)-dGd\lambda_n(a_1\cdot\ldots\cdot a_n)\\
&\quad+\sum_{r=0}^{u-1}(-1)^{n-1+|a_1|+\ldots+|a_r|}\,(id-[[d,G]])\,\lambda_n(a_1\cdot\ldots\cdot a_r\cdot da_{r+1}\cdot a_{r+2}\cdot\ldots\cdot a_n)\\
&\quad+\sum_{\substack{s+u=n+1\\ s,u\geq 2}}\sum_{r=0}^{u-1}(-1)^k\mu_u(a_1\cdot\ldots\cdot a_r\cdot\mu_s(a_{r+1}\cdot\ldots\cdot a_{r+s})\cdot a_{r+s+1}\cdot\ldots\cdot a_n)\\
&= \mu_1(\mu_n(a_1\cdot\ldots\cdot a_n))+\sum_{r=0}^{u-1}(-1)^{n-1+|a_1|+\ldots+|a_r|}\mu_n(a_1\cdot\ldots\cdot a_r,\mu_1(a_{r+1}),a_{r+2}\cdot\ldots\cdot a_n)\\
&\quad+\sum_{\substack{s+u=n+1\\ s,u\geq 2}}\sum_{r=0}^{u-1}(-1)^k\mu_u(a_1\cdot\ldots\cdot a_r,\mu_s(a_{r+1}\cdot\ldots\cdot a_{r+s}),a_{r+s+1}\cdot\ldots\cdot a_n)\\
&= \sum_{\substack{s+u=n+1\\ s,u\geq 1}}\sum_{r=0}^{u-1}(-1)^k\mu_u(a_1\cdot\ldots\cdot a_r,\mu_s(a_{r+1}\cdot\ldots\cdot a_{r+s}),a_{r+s+1}\cdot\ldots\cdot a_n)\\
&= \Psi_n(a_1\cdot\ldots\cdot a_n)
\end{aligned}
$$

Así, $\Psi_n(a_1\cdot\ldots\cdot a_n)=0$, lo que teníamos que demostrar. $\square$

2.4 Modelo de Merkulov y Teorema de Transferencia Homotópica

En esta sección probamos que el **Modelo de Merkulov** puede ser visto desde otro punto de vista, como un teorema de transferencia homotópica. Los teoremas de transferencia homotópicas fueron introducidos por Gálvez, Tonks y Vallete en [24] y reformulados por Vallete en el año 2014, ver [23]. Las primeras afirmaciones, son extraídas de Buijs, Moreno-Fernández y Murillo [15] y de Buijs [3].

Definición 2.12:
*Una **contracción** son los datos de un diagrama*

$$K \circlearrowright (M, d_M) \underset{i}{\overset{q}{\rightleftarrows}} (N, d_N)$$

donde (M, d_M) y (N, d_N) son complejos de cocadenas, q e i son funciones lineales graduadas de grado 0 y K es una función lineal graduada de grado -1 (una homotopía de cocadenas, ver 1.17), satisfaciendo las siguientes condiciones:

- *Retracciones por deformación (DR):*

  $$qi = I_N \text{ (DR1)} \quad y \quad I_M - iq = d_M K + K d_M \text{ (DR2)},$$

  donde I_N e I_M son las funciones identidad de N y M, respectivamente.

- *Condiciones de anulación (AC):*

  $$K^2 = 0 \text{ (AC1)}, \quad Ki = 0 \text{ (AC2)} \quad y \quad qK = 0 \text{ (AC3)}$$

Proposición 2.13:
Dos funciones lineales q e i, que satisfacen las condiciones de la definición 2.12, son cuasi-isomorfismos.

Demostración: Tenemos que mostrar que las funciones inducidas

$$H(q) : H(M) \to H(N) \text{ y } H(i) : H(N) \to H(M) \text{ son isomorfismos}$$

Notemos que para $[x] \in H(N)$, la función $H(q) \circ H(i) : H(N) \to H(N)$, queda definida por

$$H(q) \circ H(i)\,([x]) = H(q)\,([i(x)]) = [qi(x)] = [I_N(x)] = [x]$$

Por otro lado para $[x] = x + d_M(M) \in H(M)$ con $x \in \ker d_M$, la función $H(i) \circ H(q) : H(M) \to H(M)$ queda definida por:

$$\begin{aligned} H(i) \circ H(q)\,([x]) &= H(i)\,([q(x)]) = [iq(x)] = [I_M(x) - d_M K(x) - K d_M(x)] \\ &= [x - d_M K(x)] = [x] \end{aligned}$$

Así, $H(q) \circ H(i) = H(I_N)$ y $H(i) \circ H(q) = H(I_M)$. Por lo tanto q e i son quasi-isomorfismos. $\square$

Definición 2.14:
Sea $(A, \{m_i\})$ una $A_\infty-$álgebra. Un ***retracto homotópico*** *(o simplemente retracto), denotado por (A, i, q, K), es una contracción con su cohomología $H(A)$ equipada con diferencial trivial.*

$$\begin{tikzcd} (A, \{m_i\}) \arrow[loop left, "K"] \arrow[r, shift left, "q"] & (H(A), 0) \arrow[l, shift left, "i"] \end{tikzcd}$$

Proposición 2.15:
Dado un complejo de cocadena (M, d) siempre existe un retracto homotópico (M, i, q, K) de M. Además, cualquier retracto homotópico puede ser identificado con una descomposición del espacio vectorial graduado $M = L \oplus B \oplus H$, donde $H \cong H(A)$, $B = \text{img }(d)$ y $L \oplus \ker(d) = M$.

<u>*Demostración*</u>: Sea (M, d) un complejo de cocadena y consideremos la descomposición $M = L \oplus \ker d$. Note que $d : L \to \text{img } d$ es un isomorfismo y $dL = dM = \text{img } d$.

Sea la descomposición $\ker d = dL \oplus H$, donde H es el complemento de dL, respecto a $\ker d$. Así $M = L \oplus dL \oplus H$. Tenemos que $H \cong H(M)$, por teoremas de isomorfismos de espacios vectoriales.

Definamos $q : (M, d) \to (H, 0)$ por $q(x) = h$, donde $x = l \oplus dl' \oplus h$; y definamos $i : (H, 0) \to (M, d)$ por $i(h) = 0 \oplus 0 \oplus h = h$. Tomemos $h = 0 \oplus 0 \oplus h \in H$, luego la condición (DR1) $qi(h) = q(h) = h = I_H(h)$ se cumple.

Sea $x = l \oplus dl' \oplus h \in M$ y definamos $K : M \to M$ por $K(x) = K(l \oplus dl' \oplus h) = l'$. Notemos que la función K está bien definida, pues l' es único, ya que si no lo fuera, tendríamos que $x = l \oplus dl' \oplus h = l \oplus dl'' \oplus h$ con $dl' = dl''$ y así $(l' - l'') \in \ker d$, pero $(l' - l'') \in L$ y $d : L \to \text{img } d$ es isomorfismo. Por lo que concluímos que $l' = l''$.

Así,

$$\begin{aligned}
(DR2): \qquad (I_M - iq)(x) &= x - iq(x) \\
&= l \oplus dl' \oplus h - iq\,(l \oplus dl' \oplus h) \\
&= l \oplus dl'
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(dK + Kd)(x) &= (dK + Kd)(l \oplus dl' \oplus h) \\
&= dK\,(l \oplus dl' \oplus h) + Kd\,(l \oplus dl' \oplus h) \\
&= dl' \oplus Kdl \\
&= l \oplus dl'
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(AC): \quad K^2(x) &= K\,(K\,(l \oplus dl' \oplus h)) = K\,(l' \oplus 0 \oplus 0) = 0 \\
qK(x) &= q\,(K\,(l \oplus dl' \oplus h)) = q\,(l' \oplus 0 \oplus 0) = 0 \\
Ki(h) &= K\,(K\,(0 \oplus 0 \oplus h)) = K\,(0 \oplus 0 \oplus h) = 0
\end{aligned}$$

Tenemos que las condiciones (DR2) y (AC) se satisfacen. Y por lo tanto

$$K \circlearrowright (M,d) \underset{i}{\overset{q}{\rightleftarrows}} (H,0)$$

es una contracción y por consiguiente (M,i,q,K) un retracto homotópico.

Ahora probaremos que cualquier retracto homotópico $K \circlearrowright (M,d) \underset{i}{\overset{q}{\rightleftarrows}} (H,0)$ puede ser identificado con una descomposición.

Definamos $L := Kd(M)$; $B := dK(M)$ y $H := iq(M)$. Basta probar que $M = L \oplus B \oplus H$.

De la condición (DR2) $I_M - iq = dK + Kd$ tenemos que $\forall\ x \in M$,

$$x = Kd(x) + dK(x) + iq(x) \in L \oplus B \oplus H \qquad (*1)$$

Ahora nos basta probar que $B \cap H = \{0\}$ y $L \cap (B \oplus H) = \{0\}$ para afirmar que $M = L \oplus B \oplus H$.

Sea $x \in B \cap H$, entonces existen $x', x'' \in M$ tales que

$$dK(x') \overset{(*2)}{=} x \qquad \text{e} \qquad iq(x'') = x.$$

Luego, $KdK(x') = K(x)$ y $K(x) = \underbrace{Ki}_{=0} q(x'') = 0$, pero $Ki = 0$, por la condición de anulación de la definición 2.12, y de $(*1)$, se tiene que $\forall a \in M$

$$a = Kd(a)+dK(a)+iq(a) \Rightarrow K(a) = K^2d(a)+KdK(a)+Kiq(a) = KdK(a) \qquad (\star)$$

Así, $K(x') = KdK(x') = K(x) = 0$. Tomando d y usando $(*2)$ se tiene que $x = 0$. Y por lo tanto $B \cap H = \{0\}$.

Ahora, sea $x \in L\cap(B \oplus H)$, entonces existen $x', x'', x''' \in M$ tales que $x = Kd(x')$ y $x = dK(x'') + iq(x''')$. Entonces $K(x) = KdK(x'') + Kiq(x''') \overset{(\star)}{=} K(x'')$ puesto que $Ki = 0$ y $K(x) = K^2d(x) = 0$, luego $K(x) = K(x'') = 0$.

Por otra parte, $x = \underbrace{dK(x'')}_{=0} + iq(x''') = iq(x''')$.

Como $x \in L$, $x = Kd(x')$ y de $I_M - iq = dK + Kd$, tenemos:

$$\begin{aligned}
(I_M - iq)(x) = (dK + Kd)(x) \;&\Leftrightarrow\; (I_M - iq)(Kd(x')) = (dK + Kd)(Kd(x')) \\
&\Leftrightarrow\; i\underbrace{qK}_{=0}d(x') - Kd(x') = \underbrace{KdK}_{K}d(x') + d\underbrace{KK}_{=0}(x') \\
&\Leftrightarrow\; -Kd(x') = Kd(x') \\
&\Leftrightarrow\; Kd(x') = 0
\end{aligned}$$

Pero $Kd(x') = x$, luego $x = 0$. Y por lo tanto $L \cap (B \oplus H) = \{0\}$. $\square$

Ahora consideremos $(M, d_M) = (A, d) = (H \oplus B \oplus L, d)$ y $(N, d_N) = (H, d) = (H, 0)$ como definido en el Modelo de Merkulov 2.9. En el siguiente teorema mostramos que las funciones lineales graduadas G, pr_H del teorema de Merkulov y la inclusión $i : H \hookrightarrow A$ satisfacen las condiciones de K, q e i de retracto homotópico, respectivamente.

Teorema 2.16:
Sea una dga $(A, d) = (H \oplus B \oplus L, d)$ con $H \cong \ker d / \operatorname{img} d$, $B = \operatorname{img} d$ y consideremos las funciones lineales graduadas: G, como definida en 2.6; pr_H, como en 2.9; y, la inclusión $i : H \hookrightarrow A$. Entonces G, pr_H e i satisfacen las condiciones de retracto homotópico de la definición 2.12.

Demostración:

$$
\begin{array}{lll}
(\text{DR1}): & \forall\, x \in H,\ pr_H i(x) = pr_H(x \oplus 0 \oplus 0) = x = I_H(x). & \\
(\text{DR2}): & \forall\, x \in A,\ \ (I_A - i\, pr_H)(x) & = \ h \oplus b \oplus l - i\,(h) \\
 & & = \ h \oplus b \oplus l - h \oplus 0 \oplus 0 \\
 & & = \ 0 \oplus b \oplus l. \\
 & \forall\, x \in A,\ \ (dG + Gd)(x) & = \ (dG + Gd)(h \oplus b \oplus l) \\
 & & = \ d\,(0 \oplus 0 \oplus l') + G\,(0 \oplus 0 \oplus dl) \\
 & & = \ (0 \oplus dl' \oplus 0) + G\,(0 \oplus 0 \oplus l) \\
 & & = \ 0 \oplus b \oplus l \\
 & & = \ (I_A - i\, pr_H)(x) \\
 & \text{donde } b = dl' \in \operatorname{img} d \text{ y } Gb = l' \in L. &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
(\text{AC1}): & \forall\, x \in A,\ \ GG(x) & = \ GG\,(h \oplus b \oplus l) \\
 & & = \ G\,(0 \oplus Gl \oplus 0) \\
 & & = \ (0 \oplus G0 \oplus 0) \\
 & & = \ (0 \oplus 0 \oplus 0)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
(\text{AC2}): & \forall\, x \in H,\ \ Gi(x) & = \ Gi\,(h \oplus 0 \oplus 0) \\
 & & = \ G\,(h \oplus 0 \oplus 0) \\
 & & = \ (0 \oplus G0 \oplus 0) \\
 & & = \ (0 \oplus 0 \oplus 0) \\
(\text{AC3}): & \forall\, x \in A,\ \ pr_H G(x) & = \ pr_H G\,(h \oplus b \oplus l) \\
 & & = \ pr_H\,(0 \oplus Gl \oplus 0) \\
 & & = \ 0 = (0 \oplus 0 \oplus 0)
\end{array}
$$

Así tenemos el diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
(A,d) \arrow[loop left, "G"] \arrow[r, shift left, "pr_H"] & (H,0) \arrow[l, shift left, "i"]
\end{tikzcd}.
$$

Por lo que concluímos que el **Modelo de Merkulov** puede ser visto como un retracto homotópico. □

El siguiente teorema de transferencia homotópica es equivalente al teorema de Merkulov.

Teorema 2.17 (Teorema de Transferencia Homotópica):
Sea $(A, d, \cdot)$ una dga y considere un retracto homotópico de A sobre su cohomología H. Entonces, existe una A_∞−álgebra $\{m_n\}$ de H y A_∞−cuasi-isomorfismos estrictos $Q = \{q, 0, 0, \ldots\}$ e $I = \{i, 0, 0, \ldots\}$, tales que

$$K \circlearrowright (A, d) \underset{I}{\overset{Q}{\rightleftarrows}} (H, \{m_n\})$$

Las multiplicaciones de orden superior transferidas se pueden definir recursivamente de la siguiente manera. Definir $K\lambda_1 = I_A$, λ_2 la multiplicación de A, y para $n \geq 3$, sea $m_n = q\lambda_n$, donde:

$$\lambda_n = \lambda_2 \left(\sum_{s=1}^{n-1} (-1)^{s+1} K\lambda_s \otimes K\lambda_{n-s} \right)$$

Capítulo 3

Teoría de Hodge y el Teorema de Zhou

En este capítulo mostraremos que una dga A con métrica (euclideana o hermitiana) siempre posee descomposición de Hodge. Además mostraremos, usando la idea realizada por Zhou en su artículo titulado "Hodge theory and $A_\infty-$Structures on Cohomology" [29], que el complejo de cohomología asociado a la dga A tiene una estructura natural de $A_\infty-$álgebra. En el primer apartado, realizaremos una breve descripción de la descomposición de Hodge en Geometría, y en el segundo apartado un estudio algebraico de este tópico. De hecho, mostraremos que si una dga está dotada de métrica euclidiana o hermitiana, siempre admite una descomposición de Hodge; este resultado es importante para el resultado principal de este capítulo.

3.1 Descomposición de Hodge

La teoría de Hodge fue desarrollada en la década de 1930 por el matemático escocés William Vallance Douglas Hodge como una herramienta en geometría diferencial, especialmente en el estudio de formas diferenciales en una variedad diferenciable M. La teoría de Hodge se utiliza en el estudio de los grupos de cohomología de De Rham de M, mediante el uso del operador laplaciano asociado a una métrica de Riemann definida en M.

Warner en el capítulo 6 de su libro "Foundations of differentiable manifolds and Lie groups" [25, pág. 219], presenta una demostración del teorema de descomposición de Hodge. Wagner consideró M una variedad de Riemann compacta orientada de dimensión n, y muestra que el laplaciano usual tiene una generalización a un operador Δ sobre el espacio de formas diferenciales, conocido como el operador de Laplace-Beltrami. El teorema geométrico de descomposición de Hodge dice que la ecuación $\Delta\omega = \alpha$ tiene una solución ω en las $p-$formas diferenciales en M si y sólo si la $p-$forma α es ortogonal, en un producto interno adecuado en $E^p(M) = \{p-\text{ formas diferenciales de } M\}$ (aquellas para las cuales $\Delta\varphi = 0$), al espacio de las $p-$formas armónicas $H^p(M)$.

El teorema de descomposición de Hodge y las definiciones previas, que expondremos sucintamente en esta sección, son las consideradas por Warner [25]

Sea $(M, \mathfrak{g})$ una variedad Riemanniana compacta orientada sin frontera de dimensión n, p un número entero tal que $0 \leq p \leq n$ y $E^p(M)$ el espacio de todas las $p-$formas diferenciales sobre M. Se define además $E(M) = \bigoplus_{p\geq 0}^{n} E^p(M)$. $\mathfrak{g}$ determina un único producto interno $<,>_{\mathfrak{g}}$ sobre $E^p(M)$.

Definición 3.1:
El operador $*$ de Hodge es un operador lineal que asigna a cada $p-$forma diferencial sobre M una $(n-p)-$forma diferencial que satisface:

- $\omega \wedge *\eta = <\omega, \eta>_{\mathfrak{g}}$
- $** = (-1)^{p(n-p)}$.

El operador de Hodge se define localmente por

$$* \left(\varepsilon^{i_1} \wedge \ldots \wedge \varepsilon^{i_k}\right) = \pm \varepsilon^{j_1} \wedge \ldots \wedge \varepsilon^{j_{n-k}}$$

en términos de una base ortonormal (ε^i), donde los índices $j_1, \ldots, j_{n-k}$ son elegidos para que $(i_1, \ldots, i_k, j_1, \ldots, j_{n-k})$ sea una permutación de S_n.

Sea un operador $\delta : E^p(M) \to E^{p-1}(M)$ definido por $\delta = (-1)^{n(p+1)+1} * d *$, donde d es la derivada exterior.

Observemos que sobre $0-$formas, δ es simplemente el funcional lineal cero. El operador Laplace-Beltrami Δ, llamado laplaciano, es definido por

$$\Delta = \delta d + d\delta.$$

Consideremos el producto interno, $<,>_{\mathfrak{g}}$, en el espacio $E^p(M)$. Se puede probar que para todo $\alpha, \beta \in E^p(M)$ se tiene:

$$<\alpha, \beta>_{\mathfrak{g}} = \int_M \alpha \wedge *\beta$$

Warner prueba las siguientes afirmaciones:

1) δ es el adjunto de d sobre $E(M)$, es decir, $<d\alpha, \beta> = <\alpha, \delta\beta>$.

2) Para cada $\alpha, \beta \in E^p(M)$, se tiene $<\Delta\alpha, \beta>_{\mathfrak{g}} = <\alpha, \Delta\beta>_{\mathfrak{g}}$.

3) $\Delta\alpha = 0 \;\Leftrightarrow\; d\alpha = 0$ y $\delta\alpha = 0$.

Definición 3.2:
$\ker\Delta$ *es el conjunto de todas las formas armónicas y* $H^p(M)$ *el conjunto de todas las* $p-$*formas diferenciales armónicas, es decir*

$$H^p(M) = \{\omega \in E^p(M) \mid \Delta\omega = 0\}$$

Teorema 3.3 (Descomposición de Hodge)**:**
Sea M *una variedad Riemanniana compacta. Para todo* $0 \leq p \leq n$, $H^p(M)$ *es de dimensión finita y tenemos la siguiente descomposición del espacio* $E^p(M)$ *en suma directa:*

$$\begin{aligned} E^p(M) &= H^p(M) \oplus \Delta(E^p(M)) \\ &= H^p(M) \oplus d\,\delta(E^p(M)) \oplus \delta\,d(E^p(M)) \\ &= H^p(M) \oplus d(E^{p-1}(M)) \oplus \delta(E^{p+1}(M)) \end{aligned}$$

Como dijimos al comienzo de este apartado, una consecuencia del teorema de descomposición de Hodge es que la ecuación $\Delta\omega = \alpha$ tiene solución $\omega \in E^p(M)$ si y sólo si la $p-$forma α es ortogonal al espacio de las $p-$formas armónicas, [25, p. 223]. Pues, si $\omega \in E^p(M)$ es solución de $\Delta\omega = \alpha$, tenemos que para cada $\beta \in H^p(M)$, se cumple $<\alpha, \beta>= 0$, pues $<\alpha, \beta>=<\Delta\omega, \beta>=<\omega, \Delta\beta>=<\omega, 0>= 0$. El recíproco no es directo de probar, en el libro de Wagner se expone una demostración detallada.

Otra consecuencia importante es el lema de Poincaré:

Lema 3.4 (Lema de Poincaré)**:**
Sea U un conjunto abierto y estrellado en $\mathbb{R}^n$. Entonces $H^p_{dR}(U) = 0$ para cada $1 \leq p \leq n$, donde $H^p_{dR}(U)$ es el $p-$ésimo grupo de cohomología de De Rham. En otras palabras: Para cada $p-$forma cerrada $\alpha \in E^p(U)$, existe una $(p-1)-$forma $\omega \in E^{p-1}(U)$ tal que $d\omega = \alpha$.

Recordemos que un conjunto abierto $U \subset \mathbb{R}^n$ es estrellado si existe un punto $x_0 \in U$ tal que para cada punto $x \in U$ el segmento que une x_0 con x está completamente contenido en U. Una demostración geométrica de este lema puede ser revisada en [2, pág. 20].

3.2 Descomposición de Hodge y $A_\infty-$álgebra

En esta sección presentaremos una versión algebraica de la teoría geométrica de la sección 3.1 y probaremos, usando el teorema de Merkulov, que si una dga posee una descomposición de Hodge, podemos construir una estructura de $A_\infty-$álgebra en su complejo de cohomología asociado.

Consideremos $(A, d, \wedge)$ una dga y supongamos que A está dotada con una métrica $<,>$ (euclidiana o hermitiana) tal que d tiene un adjunto formal d^*, es decir $<,>$ es una forma bilineal

$$\begin{array}{rccc} <,>\_ : & A \times A & \to & \mathbb{K} \\ & (a,b) & \mapsto & <a,b> \end{array}$$

que es definida positiva, no degenerada y tal que d, d^* satisfacen $<da, b>=<a, d^*b>$. La forma bilineal $<,>= \{<,>_i\}_{n\geq 0}$ actúa solamente sobre elementos de igual grado, es decir

$$<,>_i : \quad A^i \times A^i \;\to\; \mathbb{K}$$

Observemos que para $a \in A^i$ y $b \in A^{i+1}$ tales que $|da| = |b|$, tenemos que $|a| = |d^*b|$ y por lo tanto $|d^*| = -1$.

Proposición 3.5:
El adjunto formal d^* es una función lineal de grado -1 que satisface $d^* \circ d^* = 0$.

Demostración: Se sabe que $|d^*| = -1$ y recordemos que $<a, db>=<d^*a, b>$ y $<a, a>\geq 0$ y $<a, a>= 0$ si y sólo si $a = 0$.

Sean $a, b \in A$ tal que $a \in A^i$ y $b \in A^{i-2}$, tenemos que $0 =<0, a>=<ddb, a>=<db, d^*a>=<b, d^*d^*a>$. Considerando $b = d^*d^*a$, tenemos $0 =<d^*d^*a, d^*d^*a>$ y por tanto $d^*d^*a = 0$. $\square$

Definición 3.6 (Función $\square_d$):
La función $\square_d : A \to A$, está definida por $\square_d = d \circ d^* + d^* \circ d$. Además definimos el espacio $\mathcal{H} := \ker \square_d = \{a \in A \mid \square_d a = 0\}$.

Notemos que el grado de $\square_d$ es cero. Además es posible observar que $\square_d$ es un operador autoadjunto con respecto a la métrica $<,>$, pues

$$\begin{aligned} <\square_d a, b> &= <dd^*a + d^*da, b>=<dd^*a, b> + <d^*da, b>=<d^*a, d^*b> + <da, db> \\ &= <a, dd^*b> + <a, d^*db>=<a, dd^*b + d^*db>=<a, \square_d b> \end{aligned}$$

Observación 3.7:

- La función $\square_d$ conmuta con los diferenciales d y d^*, dado que

$$d \circ \square_d = d(dd^* + d^*d) = dd^*d = (dd^* + d^*d)d = \square_d \circ d$$

$$d^* \circ \square_d = d^*(dd^* + d^*d) = d^*dd^* = (dd^* + d^*d)d^* = \square_d \circ d^*$$

- El espacio $\mathcal{H}$ es igual a $\ker d \cap \ker d^*$. Notemos que la contención $\boxed{\supseteq}$ siempre se cumple, en cambio la contención $\boxed{\subseteq}$ no es evidente. Como $<,>$ es definida positiva, siempre tenemos que $<d^*a, d^*a>\geq 0$ y $<da, da>\geq 0$ para cualquier $a \in \mathcal{H}$. Ahora, si $a \in \mathcal{H}$,

$$0 =<\square_d a, a>=<dd^*a + d^*da, a>=<dd^*a, a> + <d^*da, a>=<d^*a, d^*a> + <da, da>$$

y por tanto $da = 0$ y $d^*a = 0$; así, $a \in \ker d \cap \ker d^*$. $\star$

Definición 3.8 (Descomposición de Hodge)**:**
Sea (A, d) un espacio vectorial graduado con diferencial d y dotado de una métrica $<,>$ tal que d tiene un adjunto formal d^*. Diremos que A admite una descomposición de Hodge si

$$A = (\ker d \cap \ker d^*) \oplus \text{img } d \oplus \text{img } d^* = \mathcal{H} \oplus \text{img } d \oplus \text{img } d^*$$

De la definición podemos observar que si A admite una descomposición de Hodge, para cada $a \in A$ existen $\tilde{a} \in \mathcal{H}$, $\bar{a}$ y $\hat{a}$ en A con $|\tilde{a}| = |a|$, $|\bar{a}| = |a|-1$ y $|\hat{a}| = |a|+1$ de tal manera que $a = \tilde{a} \oplus d\bar{a} \oplus d^*\hat{a}$. Además, observemos que si $da = 0$, entonces $a = \tilde{a} \oplus d\bar{a} \oplus 0$ y si $d^*a = 0$ se tiene que $a = \tilde{a} \oplus 0 \oplus d^*\hat{a}$.

Lema 3.9:
Sea (A, d) un espacio vectorial graduado que admite una descomposición de Hodge. Entonces si $a \in A$, existen $\bar{a}$, $\hat{a} \in A$ tal que $da = dd^*\hat{a}$ y $d^*a = d^*d\bar{a}$.

Demostración: Como $a = \tilde{a} \oplus d\bar{a} \oplus d^*\hat{a} \in A$, entonces $da = 0 \oplus 0 \oplus dd^*\hat{a} = dd^*\hat{a}$ y $d^*a = 0 \oplus d^*d\bar{a} \oplus 0 = d^*d\bar{a}$. $\square$

Esta afirmación es comentada por Zhou al final de la sección "Hodge theory and cohomological splitting" del artículo "Homological perturbation theory and mirror symmetry", [30]. El lema es importante porque caracteriza elementos de la imagen de d y de la imagen de d^*. Esta caracterización nos permitirá demostrar que $\square_d$ restringida a $0 \oplus \text{img } d \oplus \text{img } d^*$ es sobreyectiva (ver proposición 3.12).

En la siguiente afirmación probamos que cualquier espacio vectorial graduado con diferencial (y en particular cualquier dga) dotado de métrica euclidiana o hermitiana, siempre admite una descomposición de Hodge; este resultado no fue considerado por Zhou [29].

Teorema 3.10:
Sea (A, d) un espacio vectorial graduado con diferencial d, dotado de una métrica

(euclidiana o hermitiana) tal que d admite un adjunto formal d^*. Entonces, (A, d) admite una descomposición de Hodge.

En este teorema exponemos un resultado más fuerte que el enunciado por Zhou, dado que probamos $\mathcal{H} \cong H(A, d)$ y no lo exponemos como una hipótesis. <u>*Demostración*</u>: Probaremos que para todo $i \geq 0$ se cumple lo siguiente: el complemento ortogonal C^i de img $d_{i-1} \oplus$ img d^*_{i+1} es $\mathcal{H}_i = \ker d_i \cap \ker d^*_i$. Para esto, primero mostraremos que img $d_{i-1} \perp$ img d^*_{i+1}.

- Sean $a, b \in A$ tal que $|a| = i - 1$ y $|b| = i + 1$, luego

  $$<da, d^*b>=<dda, b>=<0, b>= 0$$

  por lo tanto img $d_{i-1} \perp$ img d^*_{i+1}.

  Luego $A^i = C^i \oplus$ img $d_{i-1} \oplus$ img d^*_{i+1}, con C^i complemento ortogonal de img $d_{i-1} \oplus$ img d^*_{i+1}.

- Por demostrar que $\mathcal{H}^i = C^i$, es decir $\ker d_i \cap \ker d^*_i = C^i$.

  $\boxed{\supseteq}$ Sea $x \in C^i$. Entonces para todo $a \in A^{i-1}$, se tiene $0 =<da, x>=< a, d^*x>$. Puesto que $<,>$ es no degenerada, concluímos que $d^*x = 0$ y $x \in \ker d^*_i$.

  Por otro lado para todo $b \in A^{i+1}$, se tiene $0 =<x, d^*b>=<dx, b>$ y por lo tanto $dx = 0$ y $x \in \ker d_i$. Por lo que $x \in \ker d_i \cap \ker d^*_i = \mathcal{H}^i$.

  $\boxed{\subseteq}$ Sea $x \in \mathcal{H}^i$ y sea $a \in$ img $d_{i-1} \oplus$ img d^*_{i+1}, luego $a = d_{i-1}\bar{a} \oplus d^*_{i+1}\hat{a}$.

  $$\begin{aligned} <x, a> &= <x, d_{i-1}\bar{a} \oplus d^*_{i+1}\hat{a}>=<x, d_{i-1}\bar{a}> + <x, d^*_{i+1}\hat{a}> \\ &= <d^*_i x, \bar{a}> + <d^*_i x, \hat{a}>=<0, \bar{a}> + <0, \hat{a}>= 0 \end{aligned}$$

  Luego $x \in C^i$.

  Así, $\mathcal{H}^i = C^i$.

Concluímos que para cada $i \geq 0$, $A^i = \mathcal{H}^i \oplus$ img $d_{i-1} \oplus$ img d^*_{i+1}, y así $A = \mathcal{H} \oplus$ img $d \oplus$ img d^*. Por lo tanto (A, d) admite una descomposición de Hodge. □

Teorema 3.11:

Si A admite una descomposición de Hodge, entonces $\ker d = \mathcal{H} \oplus$ img d. Y por *lo tanto $\mathcal{H} \cong H(A,d)$, donde $H(A,d)$ es el espacio de cohomología asociado a A con respecto a d.*

<u>*Demostración*</u>: La contención $\supseteq$ siempre se cumple.

$\boxed{\subseteq}$ Sea $a \in A$, luego $a = \tilde{a} \oplus d\bar{a} \oplus d^*\hat{a}$. Como $a \in \ker d$, entonces $da = 0$, pero $da = 0 \oplus 0 \oplus dd^*\hat{a}$, por lo que $dd^*\hat{a} = 0$ y $d^*\hat{a} \in \ker d$. Además $d^*d^*\hat{a} = 0$ y $d^*\hat{a} \in \ker d^*$. Así $d^*\hat{a} \in \mathcal{H}$. Como $\tilde{a} \in \mathcal{H}$, tenemos que $\tilde{a} + d^*\hat{a} \in \mathcal{H}$, luego $a = (\tilde{a} + d^*\hat{a}) \oplus d\bar{a}$. Por lo tanto $a \in \mathcal{H} \oplus \text{img } d$.

Luego, $\mathcal{H} \cong {}^{\ker d}\!/\!_{\text{img } d} = H(A,d)$. $\square$

Nuestro objetivo es construir una estructura de $A_\infty-$álgebra en el complejo de cohomología de una dga con descomposición de Hodge. Queremos usar el resultado de Merkulov, teorema 2.9, por lo que necesitamos construir el operador de homotopía G definido en 2.6. Para esta construcción requerimos del operador de Green, (ver 3.13), y para definirlo es necesario establecer la siguiente proposición.

Proposición 3.12:
La función $\square_d = dd^* + d^*d$ restringida a $0 \oplus \text{img } d \oplus \text{img } d^*$ es invertible.

<u>*Demostración*</u>: Probaremos la biyectividad de

$$\square_d|_{0\oplus\text{img } d\oplus\text{img } d^*} : 0 \oplus \text{img } d \oplus \text{img } d^* \to 0 \oplus \text{img } d \oplus \text{img } d^*$$

1) $\square_d\,(0 \oplus \text{img } d \oplus \text{img } d^*) \subseteq 0 \oplus \text{img } d \oplus \text{img } d^*$.

Sea $a \in 0 \oplus \text{img } d \oplus \text{img } d^*$, luego $a = 0 \oplus d\bar{a} \oplus d^*\hat{a}$.

$$\begin{aligned}
\square_d(a) &= dd^*a + d^*da \\
&= dd^*(0 \oplus d\bar{a} \oplus d^*\hat{a}) + d^*d(0 \oplus d\bar{a} \oplus d^*\hat{a}) \\
&= dd^*0 \oplus dd^*d\bar{a} \oplus dd^*d^*\hat{a} + d^*d0 \oplus d^*dd\bar{a} \oplus d^*dd^*\hat{a} \\
&= 0 \oplus dd^*d\bar{a} \oplus 0 + 0 \oplus 0 \oplus d^*dd^*\hat{a} \\
&= 0 \oplus dd^*d\bar{a} \oplus d^*dd^*\hat{a} \in 0 \oplus \text{img } d \oplus \text{img } d^*
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\square_d|_{0\oplus\text{img } d\oplus\text{img } d^*} : 0 \oplus \text{img } d \oplus \text{img } d^* \to 0 \oplus \text{img } d \oplus \text{img } d^*$.

2) Es inyectiva: Si $\square_d(a) = 0$, entonces $a \in \mathcal{H}\oplus 0 \oplus 0$ y como $a \in 0\oplus\text{img } d\oplus\text{img } d^*$, concluímos que $a = 0$.

3) Es sobreyectiva: Sea $b \in 0 \oplus \text{img } d \oplus \text{img } d^*$, por demostrar que existe $a \in 0 \oplus \text{img } d \oplus \text{img } d^*$ tal que $\square_d(a) = b$. Para probar esto usaremos el lema 3.9.

   Caso 1: $b' = 0 \oplus d\bar{b} \oplus 0 = 0 \oplus dd^*\hat{\bar{b}} \oplus 0 = 0 \oplus dd^*d\bar{\hat{\bar{b}}} \oplus 0 = 0 \oplus dd^*d\bar{\hat{\bar{b}}} + d^*dd\bar{\hat{\bar{b}}} \oplus 0$
   $= \square_d\left(0 \oplus d\bar{\hat{\bar{b}}} \oplus 0\right)$. Entonces si $a' = 0 \oplus d\bar{\hat{\bar{b}}} \oplus 0$, se tiene $\square_d(a') = b'$.

   Caso 2: $b'' = 0\oplus 0\oplus d^*\hat{b} = 0\oplus 0\oplus d^*d\bar{\hat{b}} = 0\oplus 0\oplus d^*dd^*\hat{\hat{b}} = 0\oplus 0\oplus dd^*d^*\hat{\hat{b}} + d^*dd^*\hat{\hat{b}}$
   $= \square_d\left(0 \oplus 0 \oplus d^*\hat{\hat{b}}\right)$. Entonces si $a'' = 0 \oplus 0 \oplus d^*\hat{\hat{b}}$, se tiene $\square_d(a'') = b''$.

   En general sea $b = 0 \oplus d\bar{b} \oplus d^*\hat{b} = 0 \oplus b' \oplus b'' = \square_d(0 \oplus a' \oplus a'')$. Basta tomar $a = 0 \oplus a' \oplus a''$ y se tiene que $\square_d(a) = b$. Por tanto $\square_d|_{0\oplus\text{img } d\oplus\text{img } d^*}$ es sobreyectiva.

Luego por 1), 2) y 3) $\square_d|_{0\oplus\text{img } d\oplus\text{img } d^*}$ es invertible. $\square$

Sea $\square_d^{-1} = (\square_d|_{0\oplus\text{img } d\oplus\text{img } d^*})^{-1}$, la función inversa de $\square_d$ restringida a $0\oplus\text{img } d\oplus \text{img } d^*$.

Definición 3.13 (Operador de Green)**:**
Se define el operador de Green $G_d : A \to A$, como $G_d = i \circ \square_d^{-1} \circ pr^c_{\mathcal{H}}$, donde $pr^c_{\mathcal{H}} : A = \mathcal{H} \oplus \text{img } d \oplus \text{img } d^* \to 0 \oplus \text{img } d \oplus \text{img } d^*$ es la proyección complementaria a $\mathcal{H}$ e i es la inclusión.

En diagrama tenemos,

$$A \xrightarrow{pr^c_{\mathcal{H}}} 0 \oplus \text{img } d \oplus \text{img } d^* \xrightarrow{\square_d^{-1}} 0 \oplus \text{img } d \oplus \text{img } d^* \xrightarrow{i} A$$

Observemos que el grado del operador de Green es 0. Denotamos por a^H la proyección a $\mathcal{H}$ de $a = \tilde{a} \oplus d\bar{a} \oplus d^*\hat{a}$, es decir $a^H = pr_{\mathcal{H}}(a) = \tilde{a} \oplus 0 \oplus 0$.

Proposición 3.14:
Las funciones lineales d y d^* conmutan con el operador de Green.

Demostración: Probaremos que $dG_d = G_d d$. Sea $b = \tilde{b} \oplus b' \oplus b''$ con $b' \in \text{img } d$ y $b'' \in \text{img } d^*$. Existen $a' \in \text{img } d$ y $a'' \in \text{img } d^*$ tales que $\Box_d(a') = b'$ y $\Box_d(a'') = b''$, como establecidos en proposición 3.12. Como $\Box_d(a'') = b''$ y $d\Box_d = \Box_d d$, tenemos $d\Box_d(a'') = db''$ y $\Box_d da'' = db''$, pero $da'', db'' \in 0 \oplus \text{img } d \oplus \text{img } d^*$, por lo que $da'' = \Box_d^{-1} db''$. Así,

$$\begin{aligned} dG_d(b) &= d\, i\, \Box_d^{-1} pr^c_{\mathcal{H}}(\tilde{b} \oplus b' \oplus b'') \\ &= d\, i\, \Box_d^{-1}(0 \oplus b' \oplus b'') \\ &= d\, i(0 \oplus a' \oplus a'') \\ &= d(0 \oplus a' \oplus a'') \\ &= 0 \oplus da'' \oplus 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} G_d d(b) &= i\, \Box_d^{-1}\, pr^c_{\mathcal{H}}\, d(\tilde{b} \oplus b' \oplus b'') \\ &= i\, \Box_d^{-1}\, pr^c_{\mathcal{H}}(0 \oplus 0 \oplus db'') \\ &= i\, \Box_d^{-1}(0 \oplus db'' \oplus 0) \\ &= i(0 \oplus da'' \oplus 0) \\ &= 0 \oplus da'' \oplus 0 \end{aligned}$$

Por lo que concluímos que $dG_d = G_d d$. De manera análoga se muestra que d^* conmuta con G_d. $\Box$

Corolario 3.15:

El operador de Green conmuta con $\Box_d$.

Demostración: La demostración es inmediata a partir de la proposición 3.14. Pues, $G_d\Box_d = G_d(dd^* + d^*d) = G_d dd^* + G_d d^* d = dG_d d^* + d^* G_d d = dd^* G_d + d^* dG_d = (dd^* + d^*d)G_d = \Box_d G_d$. $\Box$

Proposición 3.16:

Si $a \in 0 \oplus \text{img } d \oplus \text{img } d^*$, entonces $\Box_d G_d(a) = a$.

Demostración: Si $a \in 0 \oplus \text{img } d \oplus \text{img } d^*$, entonces $a = 0 \oplus \bar{a} \oplus \hat{a}$, donde $\bar{a} \in \text{img } d$ y $\hat{a} \in \text{img } d^*$.

- Como $\bar{a} \in \text{img } d$, tenemos que existe $\bar{b} \in \text{img } d$ tal que $\Box_d \bar{b} = \bar{a}$. Luego, $\Box_d G_d \bar{a} = G_d \Box_d \bar{a} = \left(i \circ \Box_d^{-1} \circ pr^c_{\mathcal{H}}\right)(\Box_d \bar{a}) = \left(i \circ \Box_d^{-1}\right)(\Box_d \bar{a}) = i\,(\bar{a}) = \bar{a}$.
- Como $\hat{a} \in \text{img } d^*$, tenemos que existe $\hat{b} \in \text{img } d$ tal que $\Box_d \hat{b} = \hat{a}$. Luego, $\Box_d G_d \hat{a} = G_d \Box_d \hat{a} = \left(i \circ \Box_d^{-1} \circ pr^c_{\mathcal{H}}\right)(\Box_d \hat{a}) = \left(i \circ \Box_d^{-1}\right)(\Box_d \hat{a}) = i\,(\hat{a}) = \hat{a}$.

Por lo que concluímos que $\Box_d G_d(a) = \Box_d G_d\,(0 \oplus \bar{a} \oplus \hat{a}) = \Box_d G_d\,(0 \oplus \bar{a} \oplus 0) + \Box_d G_d\,(0 \oplus 0 \oplus \hat{a}) = 0 \oplus \bar{a} \oplus 0 + 0 \oplus 0 \oplus \hat{a} = 0 \oplus \bar{a} \oplus \hat{a} = a$. $\Box$

Corolario 3.17:
Si $a \in A$, *entonces* $\Box_d G_d(a) = a - a^H$.

<u>*Demostración*</u>: Como $a \in A = \mathcal{H} \oplus \text{img } d \oplus \text{img } d^*$, $a = \tilde{a} \oplus \bar{a} \oplus \hat{a}$, tenemos

$$\Box_d G_d (a) = \Box_d G_d (\tilde{a} \oplus 0 \oplus 0) + \Box_d G_d (0 \oplus \bar{a} \oplus \hat{a}) = 0 \oplus 0 \oplus 0 + 0 \oplus \bar{a} \oplus \hat{a}$$

Así, concluímos que $\Box_d G_d(a) = a - a^H$. $\Box$

Del corolario anterior tenemos que si $a = \tilde{a} \oplus \bar{a} \oplus \hat{a}$, entonces:

$$a - a^H = \Box_d G_d a = d (d^* G_d a) + d^* (G_d da)$$

Esto muestra que el operador de Green determina una descomposición de Hodge explícita, pues $a = a^H \oplus d (d^* G_d a) \oplus d^* (G_d da) \in \mathcal{H} \oplus \text{img } d \oplus \text{img } d^*$.

Ahora, supongamos que tenemos una dga $(A, d, \wedge)$. Sabemos que el producto de la dga es cerrado. Sin embargo el producto de dos elementos de $\mathcal{H}$ puede no pertenecer a $\mathcal{H}$. Pues sean $a, b \in \mathcal{H}$,

$$\begin{aligned} \Box_d(a \wedge b) &= dd^*(a \wedge b) + d^*d(a \wedge b) \\ &= dd^*(a \wedge b) + d^* (da \wedge b) + (-1)^{|a|} d^* (a \wedge db) \\ &= dd^*(a \wedge b) + d^* (0 \wedge b) + (-1)^{|a|} d^* (a \wedge 0) \\ &= dd^*(a \wedge b). \end{aligned}$$

Así, nada garantiza que $\Box_d(a \wedge b) = 0$. Entonces definimos, para $a, b \in \mathcal{H}$ el producto $\circ$ usando la proyección: $a \circ b = (a \wedge b)^H$. El siguiente lema nos muestra que el producto $\circ$ es asociativo.

Lema 3.18:
Sean $a, b, c \in \mathcal{H}$, *entonces* $((a \circ b) \circ c) = (a \circ (b \circ c))$, *y por tanto* $(\mathcal{H}, \circ)$ *es un álgebra asociativa.*

<u>*Demostración*</u>: Notemos que $((a \circ b) \circ c) = \left((a \wedge b)^H \circ c\right) = \left((a \wedge b)^H \wedge c\right)^H$ y que $(a \circ (b \circ c)) = \left(a \circ (b \wedge c)^H\right) = \left(a \wedge (b \wedge c)^H\right)^H$.

Tenemos, de la descomposición de Hodge otorgada por el operador de Green, que

$(a \wedge b) - (a \wedge b)^H = dd^* G_d(a \wedge b) + d^* G_d d(a \wedge b)$, luego

$$(a \wedge b)^H = (a \wedge b) - dd^* G_d(a \wedge b) - d^* G_d d(a \wedge b) \qquad (*)$$

Notemos que $d^* G_d d(a \wedge b) = d^* G_d \left(da \wedge b + (-1)^{|a|} a \wedge db\right) = 0$, pues $da = 0$ y $db = 0$, ya que $a, b \in \mathcal{H}$. Así,

$$(a \wedge b)^H = (a \wedge b) - dd^* G_d(a \wedge b) \qquad (**)$$

Ahora,

$$\begin{aligned}
(a \wedge b)^H \wedge c &= \left((a \wedge b) - dd^* G_d\,(a \wedge b)\right) \wedge c \\
&= (a \wedge b) \wedge c - (dd^* G_d(a \wedge b)) \wedge c \\
&= a \wedge b \wedge c - \left[(d\,(d^* G_d(a \wedge b))) \wedge c + (-1)^{|d^* G_d(a \wedge b)|} d^* G_d(a \wedge b) \wedge \underbrace{dc}_{=0} \right] \\
&= a \wedge b \wedge c - d\left((d^* G_d(a \wedge b)) \wedge c\right).
\end{aligned}$$

Entonces, usando $(**)$ para $\left((a \wedge b)^H \wedge c\right)^H$, tenemos:

$$\begin{aligned}
\left((a \wedge b)^H \wedge c\right)^H &= (a \wedge b)^H \wedge c - dd^* G_d \left((a \wedge b)^H \wedge c\right) \\
&= (a \wedge b) \wedge c - d\,(d^* G_d(a \wedge b) \wedge c) \\
&\quad - dd^* G_d\,(a \wedge b \wedge c - d\,(d^* G_d(a \wedge b) \wedge c)) \\
&= a \wedge b \wedge c - d\,(d^* G_d(a \wedge b) \wedge c) - dd^* G_d\,(a \wedge b \wedge c) \\
&\quad + dd^* G_d\,(d\,(d^* G_d(a \wedge b) \wedge c)) \\
&= (a \wedge b \wedge c)^H - (d\,(d^* G_d(a \wedge b) \wedge c))^H \\
&= (a \wedge b \wedge c)^H
\end{aligned}$$

donde hemos usado que $(d\,(d^* G_d(a \wedge b) \wedge c))^H = 0$, pues $d\,(d^* G_d(a \wedge b) \wedge c) \in \operatorname{img} d$.

Análogamente se prueba que $\left(a \wedge (b \wedge c)^H\right)^H = (a \wedge b \wedge c)^H$. Entonces,

$$(a \circ b) \circ c = \left((a \wedge b)^H \wedge c\right)^H = (a \wedge b \wedge c)^H = \left(a \wedge (b \wedge c)^H\right)^H = a \circ (b \circ c)$$

Por lo tanto, $(\mathcal{H}, \circ)$ es asociativo. $\square$

Otra forma de mostrar que $(\mathcal{H}, \circ)$ es asociativo es a través del isomorfismo entre

$\mathcal{H}$ y $H(A,d)$ como se muestra en el siguiente resultado:

Lema 3.19:
El isomorfismo entre espacios vectoriales $\varphi : \mathcal{H} \to H(A,d)$, $a \mapsto [a]$, es un isomorfismo de anillo $(\mathcal{H}, \circ) \to (H(A,d), \wedge)$.

<u>*Demostración*</u>: Tenemos que,
$$\begin{aligned}\varphi(a \circ b) &= \varphi\left((a\wedge b)^H\right) = \left[(a\wedge b)^H\right] \\ &= [a\wedge b - dd^*G_d(a\wedge b)] = [a\wedge b] = [a]\wedge[b] \\ &= \varphi(a)\wedge\varphi(b).\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\varphi\left((a\circ b)\circ c\right) &= \varphi\left(\left[(a\wedge b)^H\wedge c\right]^H\right) = \left[\left[(a\wedge b)^H\wedge c\right]^H\right] \\ &= \left[(a\wedge b)^H\wedge c\right] = \left[(a\wedge b)^H\right]\wedge[c] \\ &= [a\wedge b]\wedge[c] = [a]\wedge[b]\wedge[c] \\ &= [a]\wedge[b\wedge c] = [a]\wedge\left[(b\wedge c)^H\right] \\ &= \left[a\wedge(b\wedge c)^H\right] = \left[\left(a\wedge(b\wedge c)^H\right)^H\right] \\ &= \varphi\left(a\circ(b\circ c)\right)\end{aligned}$$

Y como φ es inyectiva, (ver pág. 34), tenemos que $(a\circ b)\circ c = a\circ(b\circ c)$. □

Resumiendo, para cualquier a y b en $\mathcal{H}$, $a\wedge b$ no necesariamente vive en $\mathcal{H}$, pero en los lemas anteriores probamos que definiendo $a\circ b = (a\wedge b)^{\mathcal{H}}$ tenemos $(\mathcal{H},\circ)$ es un álgebra asociativa. Por lo que podemos enunciar el siguiente teorema de Zhou [29].

Teorema 3.20 (Teorema de Zhou)**:**
Para toda dga $(A,d,\cdot)$ con métrica euclidiana o hermitiana tal que d tiene un adjunto formal d^*. Entonces $(A,d,\cdot)$ admite una descomposición de Hodge, $A = \mathcal{H}\oplus \mathrm{img}\ d\oplus \mathrm{img}\ d^*$, y existe una estructura de $A_\infty-$álgebra en $\mathcal{H}$ con $m_1 = d$, $m_2 = \circ$.

En el capítulo anterior, en la construcción del Modelo de Merkulov de una estructura de $A_\infty-$álgebra para $H(A,d)$, fue necesario definir una función G que restringida a $B = \mathrm{img}\ d$, actúa como inversa de d, ver definición 2.6. En el presente caso tenemos, para cada $a \in A$:

$$a^H = (id - dd^* G_d - d^* dG_d)a = (id - d(G_d d^*) - (G_d d^*)d)\, a = (id - [[d, G_d d^*]])\, a$$

Luego si definimos $G = G_d d^*$ y usamos el Modelo de Merkulov, tenemos que el espacio $\mathcal{H}$, de todos los elementos armónicos de A, tiene una estructura natural de $A_\infty-$álgebra, puesto que podemos definir el par (H, G) de la página 35 como $(\mathcal{H}, G_d d^*)$. Finalizamos este capítulo con el siguiente teorema que nos formaliza lo anterior; su demostración es inmediata usando el teorema de Merkulov, teorema 2.9.

A pesar de que Merkulov y Zhou no han trabajado juntos, nosotros consideraremos como un solo teorema los principales resultados de Merkulov [13] y Zhou [29], que llamaremos el teorema de Zhou-Merkulov.

Teorema 3.21 (Teorema de Zhou-Merkulov)**:**
Para toda dga $(A, d, \cdot)$ con métrica euclidiana o hermitiana tal que d tiene un adjunto formal d^*, A tiene descomposición de Hodge $A = \mathcal{H} \oplus \operatorname{img} d \oplus \operatorname{img} d^*$, y existe una estructura de $A_\infty-$álgebra en $\mathcal{H}$ con multiplicaciones superiores $m_1 = d$, $m_2 = \circ$, y para $n \geq 3$ $m_n = (id - [[d, G_d d^*]])\, \lambda_n = pr_{\mathcal{H}} \lambda_n$, con λ_n definida como en 2.7.

Capítulo 4

$A_\infty-$Estructuras en Geometría Riemanniana

El teorema de Hodge implica la existencia de una $A_\infty-$álgebra natural asociada a una variedad Riemanniana compacta, orientable y de dimensión n. Nosotros probamos la existencia de una $A_\infty-$álgebra diferente (a priori) sobre variedades Riemannianas usando trabajos de Eiseman y Stone [19, 20]. Primero, en este capítulo, re-escribiremos lo realizado por Eiseman y Stone en [20], desde una perspectiva algebraica.

Además, en este capítulo presentamos los resultados principales de nuestra investigación que es: a partir de las mismas álgebras graduadas, pero con diferenciales distintos, uno "perturbación" del otro, es posible construir estructuras cuasi-isomorfas, a nivel de $A_\infty-$álgebras, en sus respectivos complejos de cohomología. Entonces como caso particular, probaremos que si M es una variedad Riemanniana sin frontera, compacta, orientable y de dimensión n, la cohomología de De Rham asociada a los espacios de $k-$formas $(\Omega(M), d, \wedge)$, donde d es la derivada exterior y $\wedge$ el producto exterior; y la cohomología asociada a $(\Omega(M), d_h, \wedge)$ poseen estructuras $A_\infty-$cuasi-isomorfas cuando la "perturbación" es invertible o induce una equivalencia de cocadenas.

4.1 $h-$Álgebra diferencial graduada

Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo y consideremos E un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Definimos un espacio vectorial graduado $A = \{A^n\}_{n\geq 0}$ donde, $A^0 = \mathbb{K}$, $A^1 = E$ y $A^n = \bigwedge^n A^1$ para $n \geq 2$, donde,

$$\bigwedge^n A^1 = {T^n A^1}\big/{L} \qquad \text{con } T^n A^1 = \underbrace{A^1 \otimes \ldots \otimes A^1}_{n \text{ veces}} \text{ y } L = \left\langle v \otimes w - (-1)^{|v|\cdot|w|} w \otimes v \right\rangle,$$

es el álgebra graduada conmutativa libre de grado n. Notemos que A es un álgebra graduada conmutativa, ya que es una álgebra exterior natural, que denotamos por $(A, \cdot)$. Sin perdida de generalidad, sea $\alpha = a_1 \otimes \ldots \otimes a_n =: a_1 \cdot \ldots \cdot a_n \in A$ con $|a_i| = 1$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ y $|\alpha| = n$.

Definición 4.1 (Endomorfismo inducido $h^{(q)}$)**:**
Sea $\underline{h}$ un endomorfismo, definimos $\underline{h} : E \to E$. $\underline{h}$ induce un endomorfismo $h^{(q)} : A^p \to A^p$ para cualquier entero no negativo q, definido por

$$h^{(q)}(a_1 \cdot \ldots \cdot a_p)$$
$$= \begin{cases} 0 & , \; si\ p < q \\ \displaystyle\sum_{\sigma \in sh(q,p-q)} sgn(\sigma)\ \underline{h}\left(a_{\sigma(1)}\right) \cdot \ldots \cdot \underline{h}\left(a_{\sigma(q)}\right) \cdot a_{\sigma(q+1)} \cdot \ldots \cdot a_{\sigma(p)} & , \; si\ 0 \leq q < p \end{cases}$$

donde $sh(q, p-q) = \{\sigma \in S_p \mid \sigma(1) < \ldots < \sigma(q) \text{ y } \sigma(q+1) < \ldots < \sigma(p)\} \subset S_p$, es decir $\sigma \in sh(q, p-q) \subset S_p$ es una permutación, denominada *shuffle*, que $\sigma(1) < \ldots < \sigma(q)$ y $\sigma(q+1) < \ldots < \sigma(p)$. Eilenberg y Mac Lane [9] introdujeron el álgebra de Shuffle en un estudio homotópico. Otros autores, como Yang [28, pág. 12], Loday y Vallete [22], han desarrollado este tópico en profundidad.

Nota: Para simplificar notación, usaremos $\underline{h}a_{\sigma(i)}$ en vez de $\underline{h}\left(a_{\sigma(i)}\right)$.

Observación 4.2: Con respecto a la función $h^{(q)}$ podemos destacar lo siguiente:

- Para $0 \leq q \leq p$,

$$
\begin{aligned}
h^{(q)}(a_1 \cdot \ldots \cdot a_p) &= \sum_{\sigma \in sh(q,p-q)} sgn(\sigma)\ \underline{h}a_{\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot \underline{h}a_{\sigma(q)} \cdot a_{\sigma(q+1)} \cdot \ldots \cdot a_{\sigma(p)} \\
&= \frac{1}{(p-q)!q!} \sum_{\sigma \in S_p} sgn(\sigma)\ \underline{h}a_{\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot \underline{h}a_{\sigma(q)} \cdot a_{\sigma(q+1)} \cdot \ldots \cdot a_{\sigma(p)}
\end{aligned}
$$

- $h^{(q)}$ es una función lineal de grado 0 para todo entero no negativo q.
- $h^{(0)} = id_{A^p}$, pues

$$
h^{(0)}(a_1 \cdot \ldots \cdot a_p) = \sum_{\sigma \in sh(0,p-0)} sgn(\sigma) a_{\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{\sigma(p)} = a_1 \cdot \ldots \cdot a_p
$$

- $h^{(p)}(a_1 \cdot \ldots \cdot a_p) = \sum_{\sigma \in sh(p,p-p)} sgn(\sigma)\underline{h}a_{\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot \underline{h}a_{\sigma(p)} = \underline{h}a_1 \cdot \ldots \cdot \underline{h}a_p$
- $h^{(1)}(a_1 \cdot \ldots \cdot a_p) = \sum_{i=1}^{p} a_1 \cdot \ldots \cdot a_{i-1} \cdot \underline{h}a_i \cdot a_{i+1} \cdot \ldots \cdot a_p$. Probamos en la proposición 4.4 que $h^{(1)}$ es una derivación de grado 0 sobre toda el álgebra graduada.
- $h^{(q)}$ puede escribirse recursivamente para cualquier entero $q \geq 0$, como probamos en lema 4.3. $\star$

Lema 4.3:
Para cada entero positivo q se tiene

$$
h^{(q)} = \frac{1}{q} \sum_{k=0}^{q-1} (-1)^{k+q-1} \left(h^{q-k}\right)^{(1)} h^{(k)}
$$

Demostración: En primer lugar, mostraremos que la igualdad se cumple si $q = 1$ y $q = 2$, para luego demostrarlo para los otros casos.

$\boxed{q = 1}$ Del lado derecho de la igualdad, tenemos

$$
\frac{1}{1} \sum_{k=0}^{1-1} (-1)^{k+1-1} \left(h^{1-k}\right)^{(1)} h^{(k)} = (-1)^0 \left(h^{1-0}\right)^{(1)} h^{(0)} = h^{(1)}
$$

Por lo que para $q = 1$ se cumple.

$\boxed{q=2}$ Del lado derecho de la igualdad se tiene

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2-1}(-1)^{k+2-1}\left(h^{2-k}\right)^{(1)}h^{(k)} &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{1}(-1)^{k-1}\left(h^{2-k}\right)^{(1)}h^{(k)}\\ &= \frac{1}{2}\left[(-1)^{1}\left(h^{2}\right)^{(1)}h^{(0)}+(-1)^{2}\left(h^{1}\right)^{(1)}h^{(1)}\right]\\ &= \frac{1}{2}\left[h^{(1)}h^{(1)}-\left(h^{2}\right)^{(1)}\right]\end{aligned}$$

Basta demostrar que $h^{(1)}h^{(1)}=2h^{(2)}+(h^2)^{(1)}$ para que la igualdad se cumpla. En efecto,

$$\begin{aligned}\left(2h^{(2)}+(h^2)^{(1)}\right)(a_1\cdot\ldots\cdot a_p) &= 2h^{(2)}a_1\cdot\ldots\cdot a_p+(h^2)^{(1)}a_1\cdot\ldots\cdot a_p\\ &= 2\left[\sum_{\sigma\in sh(2,p-2)} sgn(\sigma)\ \underline{h}a_{\sigma(1)}\cdot\underline{h}a_{\sigma(2)}\cdot a_{\sigma(3)}\cdot\ldots\cdot a_{\sigma(p)}\right]\\ &\qquad+\sum_{i=1}^{p}a_1\cdot\ldots\cdot a_{i-1}\cdot\underline{h}\ \underline{h}a_i\cdot a_{i+1}\cdot\ldots\cdot a_p\\ &= \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{i-1}a_1\cdot\ldots\cdot a_{j-1}\cdot\underline{h}a_j\cdot a_{j+1}\cdot\ldots\cdot a_{i-1}\cdot\underline{h}a_i\cdot a_{i+1}\cdot\ldots\cdot a_p\\ &\quad+\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=i+1}^{p}a_1\cdot\ldots\cdot a_{i-1}\cdot\underline{h}a_i\cdot a_{i+1}\cdot\ldots\cdot a_{j-1}\cdot\underline{h}a_j\cdot a_{j+1}\cdot\ldots\cdot a_p\\ &\quad+\sum_{i=1}^{p}a_1\cdot\ldots\cdot a_{i-1}\cdot\underline{h}^2a_i\cdot a_{i+1}\cdot\ldots\cdot a_p\\ &= \sum_{i=1}^{p}h^{(1)}(a_1\cdot\ldots\cdot a_{i-1}\cdot\underline{h}a_i\cdot a_{i+1}\cdot\ldots\cdot a_p)\\ &= h^{(1)}\left(\sum_{i=1}^{p}a_1\cdot\ldots\cdot a_{i-1}\cdot\underline{h}a_i\cdot a_{i+1}\cdot\ldots\cdot a_p\right)\\ &= h^{(1)}h^{(1)}(a_1\cdot\ldots\cdot a_p)\end{aligned}$$

Por lo que para $q=2$ se cumple.

$\boxed{q>1}$ Supongamos primero que $0<k\leq q-1<q<p$ y sea $a_1\cdot\ldots\cdot a_p\in A^p$. Tenemos que

$$\begin{aligned}&\frac{1}{q}\sum_{k=0}^{q-1}(-1)^{k+q-1}\left(h^{q-k}\right)^{(1)}h^{(k)}=\\ &= \frac{1}{q}\Big[(-1)^{q-1}(h^q)^{(1)}h^{(0)}+(-1)^{q}\left(h^{q-1}\right)^{(1)}h^{(1)}+(-1)^{q+1}\left(h^{q-2}\right)^{(1)}h^{(2)}\\ &\qquad+\ldots+(-1)^{q-2+q-1}(h^2)^{(1)}h^{(q-2)}+(-1)^{q-1+q-1}(h^1)^{(1)}h^{(q-1)}\Big]\\ &= \frac{1}{q}\Big[(-1)^{q-1}(h^q)^{(1)}+(-1)^{q}\left(h^{q-1}\right)^{(1)}h^{(1)}+(-1)^{q+1}\left(h^{q-2}\right)^{(1)}h^{(2)}\\ &\qquad+\ldots+(-1)^{-3}(h^2)^{(1)}h^{(q-2)}+h^{(1)}h^{(q-1)}\Big]\end{aligned}$$

Consideremos dos términos consecutivos de la sumatoria,

$$(-1)^{k+q-1}\left(h^{q-k}\right)^{(1)} h^{(k)} \qquad \text{y} \qquad (-1)^{k+q}\left(h^{q-k-1}\right)^{(1)} h^{(k+1)}$$

De $(-1)^{k+q-1}\left(h^{q-k}\right)^{(1)} h^{(k)}(a_1 \cdot \ldots \cdot a_p)$, sabemos que $h^{(k)}(a_1 \cdot \ldots \cdot a_p)$ posee $\binom{p}{k}$ términos distintos de la forma $\underline{h}a_{\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot \underline{h}a_{\sigma(k)} \cdot a_{\sigma(k+1)} \cdot \ldots \cdot a_{\sigma(p)}$ para cualquier $\sigma \in S_p$. Ahora, $(-1)^{k+q-1}\left(h^{q-k}\right)^{(1)} h^{(k)}(a_1 \cdot \ldots \cdot a_p)$ tiene $\binom{p}{k}\binom{p}{1}$ términos de dos tipos.

- (Del tipo 1) Para cualquier $\tau \in S_p$ existen $\binom{p}{k}\binom{k}{1}$ distintos términos de la forma

$$\underline{h}^{q-k+1}a_{\tau(1)} \cdot \underline{h}a_{\tau(2)} \cdot \ldots \cdot \underline{h}a_{\tau(k)} \cdot a_{\tau(k+1)} \cdot \ldots \cdot a_{\tau(p)}$$

- (Del tipo 2) Para cualquier $\rho \in S_p$ existen $\binom{p}{k}\binom{p-k}{1}$ distintos términos de la forma

$$\underbrace{\underline{h}a_{\rho(1)} \cdot \ldots \cdot \underline{h}a_{\rho(k)} \cdot \underline{h}^{q-k}a_{\rho(k+1)} \cdot a_{\rho(k+2)} \cdot \ldots \cdot a_{\rho(p)}}_{(*1)}$$

Similarmente en $\left(h^{q-k-1}\right)^{(1)} h^{(k+1)}(a_1 \cdot \ldots \cdot a_p)$ yacen $\binom{p}{k+1}\binom{p}{1}$ términos, de los cuales $\binom{p}{k+1}\binom{k+1}{1}$ son de la forma

$$\underbrace{\underline{h}^{q-k}a_{\tau(1)} \cdot \underline{h}a_{\tau(2)} \cdot \ldots \cdot \underline{h}a_{\tau(k+1)} \cdot a_{\tau(k+2)} \cdot \ldots \cdot a_{\tau(p)}}_{(*2)}$$

para cualquier $\tau \in S_p$; mientras que $\binom{p}{k+1}\binom{p-k-1}{1}$ términos son de la forma

$$\underline{h}a_{\rho(1)} \cdot \ldots \cdot \underline{h}a_{\rho(k+1)} \cdot \underline{h}^{q-k-1}a_{\rho(k+2)} \cdot a_{\rho(k+3)} \cdot \ldots \cdot a_{\rho(p)}$$

para cualquier $\rho \in S_p$.

Considerando las formulas de $(*1)$ y $(*2)$ tenemos que

$$\binom{p}{k}\binom{p-k}{1}-\binom{p}{k+1}\binom{p}{1} = \frac{p!(p-k)!}{(p-k)!k!(p-k-1)!}-\frac{p!(k+1)!}{(p-k-1)!(k+1)!k!}=0,$$

$(-1)^{q-k-1}$ y $(-1)^{q-(k+1)-1}$ tienen diferente signo y además $\binom{p}{k+1}\binom{p-k-1}{1} = \frac{p!}{(p-k-1)!(k+1)!}\cdot\frac{(p-k-1)!}{(p-k-2)!1!} = (p-k-1)\binom{p}{k+1}$.

Entonces sobreviven los términos de $k=0$, los de tipo 1 cuando $k=1$ y los del tipo 2 cuando $k=q-1$. Esto es,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{q}(-1)^{q-1}\left(h^{q}\right)^{(1)} h^{(0)}(a_1\cdot\ldots\cdot a_p) \\
& \quad +\frac{1}{q}(-1)^{q}\sum_{i=1}^{p} a_1\cdot\ldots\cdot a_{i-1}\cdot \underline{h}a_i\cdot a_{i+1}\cdot\ldots\cdot a_p \\
& \quad +\frac{1}{(p-q+1)!q!}\sum_{\sigma\in S_p} sgn(\sigma)\sum_{i=q}^{p}\underline{h}a_{\sigma(1)}\cdot\ldots\cdot\underline{h}a_{\sigma(q-1)}\cdot a_{\sigma(q)}\cdot\ldots\cdot a_{\sigma(i-1)}\cdot \\
& \qquad\qquad \cdot\underline{h}a_{\sigma(i)}\cdot a_{\sigma(i+1)}\cdot\ldots\cdot a_{\sigma(p)} \\
= & \frac{1}{q}(-1)^{q-1}\left(h^{q}\right)^{(1)}(a_1\cdot\ldots\cdot a_p)+\frac{1}{q}(-1)^{q}\left(h^{q}\right)^{(1)}(a_1\cdot\ldots\cdot a_p) \\
& \quad +\frac{1}{(p-q+1)!q!}\left(p-(q-1)\right)\sum_{\tau\in S_p} sgn(\tau)\underline{h}a_{\tau(1)}\cdot\ldots\cdot\underline{h}a_{\tau(q)}\cdot a_{\tau(q+1)}\cdot\ldots\cdot a_{\tau(p)} \\
= & \frac{1}{(p-q)!q!}\sum_{\tau\in S_p} sgn(\tau)\underline{h}a_{\tau(1)}\cdot\ldots\cdot\underline{h}a_{\tau(q)}\cdot a_{\tau(q+1)}\cdot\ldots\cdot a_{\tau(p)} \\
= & \sum_{\tau\in sh(q,p-q)} sgn(\tau)\underline{h}a_{\tau(1)}\cdot\ldots\cdot\underline{h}a_{\tau(q)}\cdot a_{\tau(q+1)}\cdot\ldots\cdot a_{\tau(p)} \\
= & h^{(q)}(a_1\cdot\ldots\cdot a_p)
\end{aligned}$$

Por lo tanto $h^{(q)}$ puede escribirse recursivamente para cualquier entero $q\geq 0$. □

Proposición 4.4:
La función $h^{(1)}$ es una derivación de grado 0 sobre toda el álgebra graduada.

Demostración: Sean a, b en A, sin pérdida de generalidad consideremos

$$a = a_1\cdot\ldots\cdot a_m \text{ y } b = b_1\cdot\ldots\cdot b_n.$$

Definamos $c_i = \begin{cases} a_i & \text{si } 1 \leq i \leq m \\ b_{i-m} & \text{si } m+1 \leq i \leq m+n \end{cases}$. Luego,

$$\begin{aligned}
h^{(1)}(a \cdot b) &= h^{(1)}(a_1 \cdot \ldots \cdot a_m \cdot b_1 \cdot \ldots \cdot b_n) \\
&= h^{(1)}(c_1 \cdot \ldots \cdot c_{m+n}) \\
&= \sum_{i=1}^{m+n} c_1 \cdot \ldots \cdot c_{i-1} \cdot \underline{h} c_i \cdot c_{i+1} \cdot \ldots \cdot c_{m+n} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{m} c_1 \cdot \ldots \cdot c_{i-1} \cdot \underline{h} c_i \cdot c_{i+1} \cdot \ldots \cdot c_m \right) \cdot c_{m+1} \cdot \ldots \cdot c_{m+n} \\
&\qquad + c_1 \cdot \ldots \cdot c_m \cdot \left(\sum_{i=m+1}^{m+n} c_{m+1} \cdot \ldots \cdot c_{i-1} \cdot \underline{h} c_i \cdot c_{i+1} \cdot \ldots \cdot c_{m+n} \right) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{m} a_1 \cdot \ldots \cdot a_{i-1} \cdot \underline{h} a_i \cdot a_{i+1} \cdot \ldots \cdot a_m \right) \cdot b_1 \cdot \ldots \cdot b_n \\
&\qquad + a_1 \cdot \ldots \cdot a_m \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_1 \cdot \ldots \cdot b_{i-1} \cdot \underline{h} b_i \cdot b_{i+1} \cdot \ldots \cdot b_{m+n} \right) \\
&= h^{(1)}(a_1 \cdot \ldots \cdot a_m) \cdot b_1 \cdot \ldots \cdot b_n + a_1 \cdot \ldots \cdot a_m \cdot h^{(1)}(b_1 \cdot \ldots \cdot b_n) \\
&= h^{(1)}(a) \cdot b + a \cdot h^{(1)}(b) \\
&= h^{(1)}(a) \cdot b + (-1)^{0 \cdot |a|} a \cdot h^{(1)}(b)
\end{aligned}$$

Por lo que $h^{(1)}$ es una derivación de grado 0. □

Supongamos que $(A, d, \cdot)$ es un álgebra diferencial graduada (dga), definiremos una función lineal d_h de grado 1, como candidata a ser un diferencial "perturbado" para A. Esta es una construcción clásica, pues la función lineal d_h fue definida por Frölicher y Nijenhuis en [16] como una derivación alternativa en el anillo graduado de formas diferenciales a partir de $\underline{h}$ y de la derivada exterior d. Cabe destacar que en el artículo de Frölicher y Nijenhuis no es sencillo demostrar que d_h es una derivación. Para ello los autores, a lo largo de toda la primera parte de su artículo, definen y establecen propiedades entre formas escalares, formas vectoriales y entre formas escalares y vectoriales, que son necesarias para probar una proposición [16, Prop. 4.5], que dice que d_h es una derivación. Nosotros presentamos una demostración algebraica y sucinta a lo realizado por Frölicher y Nijenhuis.

Definición 4.5 (d_h):
Sea $(A, d, \cdot)$ una dga; se define la función lineal de grado 1, $d_h : A \to A$ como $d_h = h^{(1)}d - dh^{(1)}$.

Proposición 4.6:
La función lineal d_h es una derivación de grado 1. Es decir, para todo a, b en A se cumple que

$$d_h(a \cdot b) = d_h a \cdot b + (-1)^{|a|} a \cdot d_h b$$

<u>*Demostración*</u>: Sean a, b en A. Usando el hecho que d y $h^{(1)}$ son derivaciones (ver proposición 4.4), tenemos:

$$\begin{aligned}
d_h(a \cdot b) &= \left[h^{(1)}d - dh^{(1)}\right](a \cdot b) \\
&= h^{(1)}d(a \cdot b) - dh^{(1)}(a \cdot b) \\
&= h^{(1)}\left[da \cdot b + (-1)^{|a|} a \cdot db\right] - d\left[h^{(1)}a \cdot b + a \cdot h^{(1)}b\right] \\
&= h^{(1)}(da \cdot b) + (-1)^{|a|} h^{(1)}(a \cdot db) - d\left(h^{(1)}a \cdot b\right) - d\left(a \cdot h^{(1)}b\right) \\
&= h^{(1)}da \cdot b + da \cdot h^{(1)}b + (-1)^{|a|} h^{(1)}a \cdot db + (-1)^{|a|} a \cdot h^{(1)}db \\
&\quad - dh^{(1)}a \cdot b - (-1)^{|h^{(1)}a|} h^{(1)}a \cdot db - da \cdot h^{(1)}b - (-1)^{|a|} a \cdot dh^{(1)}b \\
&= h^{(1)}da \cdot b + (-1)^{|a|} a \cdot h^{(1)}db - dh^{(1)}a \cdot b - (-1)^{|a|} a \cdot dh^{(1)}b \\
&= \left[h^{(1)}da - dh^{(1)}a\right] \cdot b + (-1)^{|a|} a \cdot \left[h^{(1)}db - dh^{(1)}b\right] \\
&= \left(h^{(1)}d - dh^{(1)}\right)(a) \cdot b + (-1)^{|a|} a \cdot \left(h^{(1)}d - dh^{(1)}\right)(b) \\
&= d_h a \cdot b + (-1)^{|a|} a \cdot d_h b
\end{aligned}$$

Como $|d_h| = |h^{(1)}d - dh^{(1)}| = |d| + |h^{(1)}| = 1 + 0 = 1$. Concluímos que d_h es una derivación de grado 1. $\square$

Proposición 4.7:
Si $\underline{h} = id_{A^1}$, entonces $d_h = d$.

<u>*Demostración*</u>: Puesto que $d(a_1 \cdot \ldots \cdot a_p) = \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k-1} a_1 \cdot \ldots \cdot a_{k-1} \cdot d(a_k) \cdot a_{k+1} \cdot \ldots \cdot a_p$ con $d(a) \in A^2$ para cualquier $a \in A^1$, así $d(a) = \sum_{i=1}^{n} b_i \cdot c_i$, con $b_i, c_i \in A^1$. Tenemos $d_h(a_1 \cdot \ldots \cdot a_p) = h^{(1)}d(a_1 \cdot \ldots \cdot a_p) - dh^{(1)}(a_1 \cdot \ldots \cdot a_p)$. Note que,

$$
\begin{aligned}
h^{(1)}d(a_1\cdot\ldots\cdot a_p) &= h^{(1)}\left(\sum_{k=1}^{p}(-1)^{k-1}a_1\cdot\ldots\cdot a_{k-1}\cdot d(a_k)\cdot a_{k+1}\cdot\ldots\cdot a_p\right)\\
&= \sum_{k=1}^{p}(-1)^{k-1}h^{(1)}\left(a_1\cdot\ldots\cdot a_{k-1}\cdot d(a_k)\cdot a_{k+1}\cdot\ldots\cdot a_p\right)\\
&= \sum_{k=1}^{p}(-1)^{k-1}h^{(1)}\left(a_1\cdot\ldots\cdot a_{k-1}\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}b_{ki}\cdot c_{ki}\right)\cdot a_{k+1}\cdot\ldots\cdot a_p\right)\\
&= \sum_{k=1}^{p}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{k-1}h^{(1)}\left(a_1\cdot\ldots\cdot a_{k-1}\cdot b_{ki}\cdot c_{ki}\cdot a_{k+1}\cdot\ldots\cdot a_p\right)
\end{aligned}
$$

Definamos $m_j \in A^1$ como:

$$
m_j = \begin{cases} a_j & , \quad j \leq k-1 \\ b_{ki} & , \quad j = k \\ c_{ki} & , \quad j = k+1 \\ a_{j-1} & , \quad j \geq k+2,\ j \leq p-1 \end{cases}
$$

Reemplazando, se tiene:

$$
\begin{aligned}
h^{(1)}d(a_1\cdot\ldots\cdot a_p) &= \sum_{k=1}^{p}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{k-1}h^{(1)}\left(m_1\cdot\ldots\cdot m_{p+1}\right)\\
&= \sum_{k=1}^{p}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{k-1}\sum_{\sigma\in sh(1,p)}sgn(\sigma)\underline{h}m_{\sigma(1)}\cdot m_{\sigma(2)}\cdot\ldots\cdot m_{\sigma(p+1)}\\
&= \sum_{k=1}^{p}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{k-1}\sum_{\sigma\in sh(1,p)}sgn(\sigma)m_{\sigma(1)}\cdot\ldots\cdot m_{\sigma(p+1)}\\
&= \sum_{k=1}^{p}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{k-1}(p+1)m_1\cdot\ldots\cdot m_{p+1}\\
&= (p+1)\sum_{k=1}^{p}(-1)^{k-1}\sum_{i=1}^{n}a_1\cdot\ldots\cdot a_{k-1}\cdot b_{ki}\cdot c_{ki}\cdot a_{k+1}\cdot\ldots\cdot a_p\\
&= (p+1)\sum_{k=1}^{p}(-1)^{k-1}a_1\cdot\ldots\cdot a_{k-1}\cdot d(a_k)\cdot a_{k+1}\cdot\ldots\cdot a_p\\
&= (p+1)d(a_1\cdot\ldots\cdot a_p)
\end{aligned}
$$

El segundo término,

$$\begin{aligned}
dh^{(1)}(a_1 \cdot \ldots \cdot a_p) &= \sum_{\sigma\in sh(1,p-1)} sgn(\sigma)\ d\left(\underline{h}a_{\sigma(1)}a_{\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot a_{\sigma(p)}\right)\\
&= \sum_{\sigma\in sh(1,p-1)} sgn(\sigma) d\left(a_{\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{\sigma(p)}\right)\\
&= \sum_{k=1}^{p}(-1)^{k-1} \sum_{\sigma\in sh(1,p-1)} sgn(\sigma) a_{\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{\sigma(k-1)} \cdot\\
&\qquad \cdot d(a_{\sigma(k)}) \cdot a_{\sigma(k+1)} \cdot \ldots \cdot a_{\sigma(p)}\\
&= p\ \sum_{k=1}^{p}(-1)^{k-1} a_1 \cdot \ldots \cdot a_{k-1} \cdot d(a_k) \cdot a_{k+1} \cdot \ldots \cdot a_p\\
&= p\ d(a_1 \cdot \ldots \cdot a_p)
\end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}
d_h(a_1 \cdot \ldots \cdot a_p) &= h^{(1)} d(a_1 \cdot \ldots \cdot a_p) - dh^{(1)}(a_1 \cdot \ldots \cdot a_p)\\
&= (p+1) d(a_1 \cdot \ldots \cdot a_p) - p\ d(a_1 \cdot \ldots \cdot a_p)\\
&= d(a_1 \cdot \ldots \cdot a_p)
\end{aligned}$$

En consecuencia $d_h = d$ si $\underline{h} = id_{A^1}$. $\square$

A continuación introducimos una variante del tensor de Nijenhuis (también conocido como tensor de Frölicher-Nijenhuis) Este corchete es una extensión del corchete de Lie de campos de vectores de formas diferenciales vector-valuadas sobre una variedad diferenciable. La variante que usaremos es para álgebras diferenciales graduadas.

Definición 4.8 (Tensor de Nijenhuis)**:**
El tensor de Nijenhuis es una función lineal de grado 1 $[\![\underline{h},\underline{h}]\!] : A \to A$ *y definido por*

$$[\![\underline{h},\underline{h}]\!] = -h^{(2)}d + d_h h^{(1)} + dh^{(2)}$$

Observación 4.9: El tensor de Nijenhuis $[\![\underline{h},\underline{h}]\!]$ es un operador de homotopía entre $(A, d, \cdot)$ y $(s(sA), d, \cdot)$. Es decir, es un operador de homotopía entre la dga y la suspensión de la suspensión de la dga, ver definición 1.15. Así, el siguiente diagrama conmuta,

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & A^{i-1} \arrow[r, "d"] \arrow[d, "d_h \circ d_h"'] & A^{i} \arrow[r, "d"] \arrow[d, "d_h \circ d_h"'] \arrow[dl, "\llbracket \underline{h}, \underline{h} \rrbracket"'] & A^{i+1} \arrow[r] \arrow[d, "d_h \circ d_h"'] \arrow[dl, "\llbracket \underline{h}, \underline{h} \rrbracket"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & s(sA)^{i-1} \arrow[r, "d"'] & s(sA)^{i} \arrow[r, "d"'] & s(sA)^{i+1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Lema 4.10:

Si el tensor de Nijenhuis se anula, entonces d_h es un diferencial sobre A. En efecto, $d_h \circ d_h = d\llbracket \underline{h}, \underline{h} \rrbracket + \llbracket \underline{h}, \underline{h} \rrbracket d$.

<u>*Demostración*</u>:

$$\begin{aligned}
d\llbracket \underline{h}, \underline{h} \rrbracket + \llbracket \underline{h}, \underline{h} \rrbracket d &= -dh^{(2)}d + dd_h h^{(1)} + ddh^{(2)} - h^{(2)}dd + d_h h^{(1)}d + dh^{(2)}d \\
&= dd_h h^{(1)} + d_h h^{(1)} d \\
&= dh^{(1)}dh^{(1)} + h^{(1)}dh^{(1)}d - dh^{(1)}h^{(1)}d \\
&= h^{(1)}dh^{(1)}d - h^{(1)}ddh^{(1)} - dh^{(1)}h^{(1)}d + dh^{(1)}dh^{(1)} \\
&= \left(h^{(1)}d - dh^{(1)}\right)\left(h^{(1)}d - dh^{(1)}\right) \\
&= d_h \circ d_h .
\end{aligned}$$

Tenemos de la proposición (4.6) que d_h es derivación de grado 1, por lo que si $\llbracket \underline{h}, \underline{h} \rrbracket = 0$, d_h es un diferencial. $\square$

Con este lema, podemos construir una dga usando el álgebra original $(A, d, \cdot)$, pero con el diferencial "perturbado por $\underline{h}$". Así, en esta sección hemos probado que $(A, d_h, \cdot)$ es una dga.

4.2 $h-$Laplaciano

Sea $(A, d, \cdot)$ una dga, tal que $A = \{A^n\}_{n \geq 0}$ donde, $A^0 = \mathbb{K}$, $A^1 = E$ y $A^n = \bigwedge^n A^1$ para $n \geq 2$, E espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, con característica cero.

Asumiremos que $A = \{A^n\}_{n \geq 0}$ tiene una métrica euclidiana o hermitiana, es decir no degenerada, definida positiva y apropiadamente simétrica,

$$<,>: A \times A \to \mathbb{K},$$

y que el diferencial d tiene un adjunto formal δ, es decir $<,>_i$: $A^i \times A^i \to \mathbb{K}$ y $<da, b>_i=<a, \delta b>_{i-1}$.

Ahora, dado un endomorfismo $\underline{h} : A^1 \to A^1$ y el diferencial d_h, construíremos un adjunto para d_h. Para esto, consideremos A^{1^*} el espacio de los funcionales lineales de A^1, es decir

$$A^{1^*} = \{\alpha : A \to \mathbb{K},\ \alpha \text{ función lineal}\}$$

Definimos la traspuesta de $\underline{h}$ como

$$\begin{array}{rcccccc} \underline{h}_t : & A^{1^*} & \to & A^{1^*} & & & \\ & \alpha & \mapsto & \underline{h}_t(\alpha) : & A^1 & \to & \mathbb{K} \\ & & & & a & \mapsto & \alpha\,(\underline{h}a) \end{array}$$

La métrica nos permite inyectar A^1 en A^{1^*}, mediante la aplicación

$$\begin{array}{rcccccc} \varphi : & A^1 & \to & A^{1^*} & & & \\ & a & \mapsto & <a, \bullet>_1 : & A^1 & \to & \mathbb{K} \\ & & & & b & \mapsto & <a, b>_1 \end{array}$$

Proposición 4.11:
La aplicación φ es inyectiva.

<u>*Demostración*</u>: Sean a, b en A^1 tales que $\varphi(a) = \varphi(b)$, entonces $<a, \bullet>_1=<b, \bullet>_1$. Sea $c \in A^1$ cualquiera, entonces

$$<a, c>_1=<b, c>_1 \quad \Rightarrow \quad <a, c>_1 - <a, c>_1= 0 \quad \Rightarrow \quad <a - b, c>_1= 0$$

Como $<,>$ es no degenerada, se tiene $a - b = 0$ y por tanto $a = b$. Por lo que φ es inyectiva. $\square$

Vamos a definir $(A^1)' = \varphi(A^1)$ como la imagen del funcional φ y vamos a restringir $\underline{h}_t$ a nuestra definición, es decir con la identificación de A^1 con $(A^1)'$. Así,

$$\underline{h}_t : A^1 \cong (A^1)' \to (A^1)' \cong A^1$$

Notemos que $\underline{h}_t$ está bien definida, pues $\underline{h}_t((A^1)') \subseteq (A^1)'$. En efecto, si $\beta \in \underline{h}_t((A^1)') \Rightarrow \exists\ \alpha \in (A^1)' = \varphi(A^1)$ tal que $\underline{h}_t(\alpha) = \beta \Rightarrow \exists\ c \in A^1$ tal que $\varphi(c) = \alpha\ \wedge\ \underline{h}_t(\alpha) = \beta$. Como $\underline{h}c \in A^1$, tenemos $\varphi\left(\underline{h}c\right) = \underline{h}_t\left(\varphi(c)\right) = \underline{h}_t\left(\alpha\right) = \beta$. Y concluímos que $\beta \in (A^1)' = \varphi(A^1)$.

Nuestra definición de $\underline{h}_t$ ahora es: $\underline{h}_t : A^1 \to A^1$, definida por $a \mapsto \underline{h}_t(a)$, y determinada como sigue, para cada $b \in A^1$,

$$<\underline{h}_t(a), b>_1 = <a, \underline{h}(b)>_1$$

Proposición 4.12:
La traspuesta $\underline{h}_t$ es un endomorfismo.

<u>*Demostración*</u>: Sean a, b, c en A^1 y $k \in \mathbb{K}$. Luego,

$$\begin{aligned} <\underline{h}_t(ka+b), c>_1 &= <ka+b, \underline{h}c>_1 \\ &= k <a, \underline{h}c>_1 + <b, \underline{h}c>_1 \\ &= k <\underline{h}_t(a), c>_1 + <\underline{h}_t(b), c>_1 \\ &= <k\underline{h}_t(a) + \underline{h}_t(b), c>_1 \end{aligned}$$

Así, $\underline{h}_t(ka+b) = k\underline{h}_t(a) + \underline{h}_t(b)$. Por lo tanto $\underline{h}_t \in End(A^1)$. $\square$

Con la proposición anterior, podemos extender $\underline{h}_t$ a ${h_t}^{(q)} \in End(A^p)$ como:

$${h_t}^{(q)}(a_1 \cdot \ldots \cdot a_p)$$

$$= \begin{cases} 0 & ,\ \text{si } p < q \\ \displaystyle\sum_{\sigma \in sh(q,p-q)} sgn(\sigma)\ \underline{h}_t a_{\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot \underline{h}_t a_{\sigma(q)} \cdot a_{\sigma(q+1)} \cdot \ldots \cdot a_{\sigma(p)} & ,\ \text{si } 0 \leq q < p \end{cases}$$

Observación 4.13: Si A^1 es un espacio vectorial de dimensión finita, la traspuesta $\underline{h}_t$ puede definirse de manera explícita de la siguiente manera. Sea $\{\omega^1, \ldots, \omega^n\}$ una base ordenada de A^1.

Si $p > n$, entonces $A^p = 0$. También $\omega^j \cdot \omega^j = 0$ debido a $|\omega^j| = 1$. Y para cualquier $\omega^j \in A^1$, $j = 1, \ldots, n$, tenemos $\underline{h}\omega^j \in A^1$, así $\underline{h}\omega^j = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} h_i^j \omega^i$, donde

$h_i^j \in \mathbb{K}$.

Se define $\underline{h}_t : A^1 \to A^1$ la traspuesta de $\underline{h}$, como $\underline{h}_t \omega^j = \sum_{i=1}^{n} h_j^i \omega^i$. Al considerar $(A, d, \cdot)$ una dga definida como antes y asumiendo que A^1 es de dimensión finita, decimos que A es de tipo finito. $\star$

Proposición 4.14:
$h^{(0)}$ y ${h_t}^{(0)}$ son adjuntos con respecto a la métrica de A^1 y si $h^{(1)}$ y ${h_t}^{(1)}$ son adjuntos, entonces $h^{(q)}$ y ${h_t}^{(q)}$ también lo son para cada $q = 2, 3, \ldots, n$ con respecto a la métrica de A.

<u>*Demostración*</u>: Sea a, b en A. Si $q = 0$, tenemos $h^{(0)} = {h_t}^{(0)} = id_A$ y

$$<a, h^{(0)}b> = <a, b> = <{h_t}^{(0)}a, b>$$

Entonces $h^{(0)}$ y ${h_t}^{(0)}$ son adjuntos.

Supongamos que $h^{(1)}$ y ${h_t}^{(1)}$ son adjuntos. Demostraremos lo pedido usando inducción sobre q y el hecho que $h^{(q)}$ puede escribirse recursivamente para cualquier endomorfismo $\underline{h}$, ver lema 4.3. Sean a, b en A,

$$\begin{aligned}
<a, h^{(q)}b> &= <a, \frac{1}{q} \sum_{k=0}^{q-1} (-1)^{q+k-1} \left(h^{q-k}\right)^{(1)} h^{(k)}b> \\
&= \frac{1}{q} \sum_{k=0}^{q-1} (-1)^{q+k-1} <a, \left(h^{q-k}\right)^{(1)} h^{(k)}b> \\
&= \frac{1}{q} \sum_{k=0}^{q-1} (-1)^{q+k-1} <\left(h^{q-k}\right)_t^{(1)} a, h^{(k)}b> \\
&= \frac{1}{q} \sum_{k=0}^{q-1} (-1)^{q+k-1} <{h_t}^{(k)} \left(h^{q-k}\right)_t^{(1)} a, b> \\
&= \frac{1}{q} \sum_{k=0}^{q-1} (-1)^{q+k-1} <\left(\left(h^{q-k}\right)^{(1)} h^{(k)}\right)_t a, b> \\
&= <\frac{1}{q} \sum_{k=0}^{q-1} (-1)^{q+k-1} \left(\left(h^{q-k}\right)^{(1)} h^{(k)}\right)_t a, b> \\
&= <\left(\frac{1}{q} \sum_{k=0}^{q-1} (-1)^{q+k-1} \left(h^{q-k}\right)^{(1)} h^{(k)}\right)_t a, b> \\
&= <{h_t}^{(q)}, b>
\end{aligned}$$

Entonces $h^{(q)}$ y ${h_t}^{(q)}$ son adjuntos. $\square$

Observación 4.15: En el artículo de Eiseman y Stone [20], se define $<\alpha,\beta>= \int_M \alpha \wedge *\beta$, donde α, β en $\Omega^p(M)$, $p-$formas diferenciables sobre una variedad Riemanniana compacta M, y $*$ es el operador de Hodge. Con esta definición de métrica, se puede probar que $h^{(1)}$ y ${h_t}^{(1)}$ son adjuntos. $\star$

Proposición 4.16:
Si $h^{(1)}$ y ${h_t}^{(1)}$ son adjuntos, entonces el adjunto de d_h es $\delta_h = \delta {h_t}^{(1)} - {h_t}^{(1)}\delta$.

<u>*Demostración*</u>: Sean $a \in A^p$ y $b \in A^{p-1}$.

$$\begin{aligned} <a, d_h b> &= <a, h^{(1)}db - dh^{(1)}b> \\ &= <a, h^{(1)}db> - <a, dh^{(1)}b> \\ &= <{h_t}^{(1)}a, db> - <\delta a, h^{(1)}b> \\ &= <\delta {h_t}^{(1)}a, b> - <{h_t}^{(1)}\delta a, b> \\ &= <\delta {h_t}^{(1)}a - {h_t}^{(1)}\delta a, b> \\ &= <\delta_h a, b> \end{aligned}$$

Por lo tanto d_h y δ_h son adjuntos. $\square$

El operador δ_h es llamado $\underline{h}-$codiferencial.

Corolario 4.17:
Si $h^{(1)}$ y ${h_t}^{(1)}$ son adjuntos y $\underline{h} = id_{A^1}$, entonces $\delta_h = \delta$.

<u>*Demostración*</u>: Tenemos que si $\underline{h} = id_{A^1}$, entonces $\underline{h}_t = id_{A^1}$. Sean a, b en A, tal que $|a| = p$ y $|b| = p+1$. Recordemos que

$$\begin{aligned} {h_t}^{(1)}(a_1 \cdot \ldots \cdot a_p) &= \sum_{\sigma \in sh(1,p-1)} sgn(\sigma)\underline{h}_t a_{\sigma(1)} \cdot a_{\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot a_{\sigma(p)} \\ &= \sum_{\sigma \in sh(1,p-1)} sgn(\sigma) a_{\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{\sigma(p)} \\ &= p\,(a_1 \cdot \ldots \cdot a_p) \end{aligned}$$

De lo anterior y por la linealidad de ${h_t}^{(q)}$ para cada q entero no negativo, tenemos que para todo $a \in A^p$ se tiene que ${h_t}^{(1)}a = pa$. Luego ${h_t}^{(1)}b = (p+1)b$. Así,

$$\begin{aligned}
<a, \delta_h b> &= <a, \delta {h_t}^{(1)} b - {h_t}^{(1)} \delta b> \\
&= <a, \delta {h_t}^{(1)} b> - <a, {h_t}^{(1)} \delta b> \\
&= <da, {h_t}^{(1)} b> - <{h_t}^{(1)} a, \delta b> \\
&= <da, (p+1) b> - <pa, \delta b> \\
&= (p+1) <da, b> - p <a, \delta b> \\
&= (p+1) <a, \delta b> - p <a, \delta b> \\
&= <a, \delta b>
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\delta_h = \delta$. $\square$

Supongamos ahora que $\underline{h} \in End(A^1)$ con $[\![\underline{h}, \underline{h}]\!] = 0$, y que $h^{(1)}$ y ${h_t}^{(1)}$ adjuntos. Generalizamos el clásico operador de Laplace-Beltrami a $\square_{d_h} : A \to A$, definido por $\square_{d_h} = d_h \delta_h + \delta_h d_h$ y lo llamamos $\underline{h}-$Laplaciano.

Definición 4.18:
Para cualquier $\underline{h} \in End(A^1)$, los elementos del espacio

$$\mathcal{H}_h = \ker \square_{d_h} := \{a \in A \mid \square_{d_h}(a) = 0\} = \ker(d_h) \cap \ker(\delta_h)$$

son llamados $\underline{h}-$armónicos. De igual forma $\operatorname{img} d_h := d_h A$ *e* $\operatorname{img} \delta_h := \delta_h A$ *son llamados subespacios $\underline{h}-$exactos y $\underline{h}-$coexactos, respectivamente.*

Notemos que $\underline{h}-$exactos y $\underline{h}-$coexactos son ortogonales cuando $[\![\underline{h}, \underline{h}]\!] = 0$, pues para α, β en A^p, $< d_h \alpha, \delta_h \beta > = < d_h \circ d_h \alpha, \beta > = < ([\![\underline{h}, \underline{h}]\!] d + d [\![\underline{h}, \underline{h}]\!]) \alpha, \beta > = 0$. Además $\mathcal{H}_h$ es ortogonal con $\underline{h}-$exactos y $\underline{h}-$coexactos. En efecto, dado que si $\alpha \in \mathcal{H}_h = \ker(d_h) \cap \ker(\delta_h)$, ver observación 3.7, se tiene

$$<\alpha, \delta_h \beta + d_h \gamma> = <\alpha, \delta_h \beta> + <\alpha, d_h \gamma> = <d_h \alpha, \beta> + <\delta_h \alpha, \beta> = 0$$

Es decir, tenemos la siguiente descomposición de Hodge

$$A = \mathcal{H}_h \oplus \operatorname{img} d_h \oplus \operatorname{img} \delta_h$$

Además, existe, por el teorema de Zhou-Merkulov, una estructura de $A_\infty-$álgebra sobre $\mathcal{H}_h \cong H(A, d_h)$ con multiplicaciones de orden superior $m_1 = d_h$, $m_2 = \circ$ y $m_n = (id_{\mathcal{H}_h} - [d_h, G_{d_h}\delta_h])\, \lambda_n = \pi\lambda_n$ para $n \geq 3$.

4.3 $h - A_\infty-$Álgebra en Geometría

En esta sección queremos mostrar nuestros resultados principales.

Sean $(A, d, \cdot)$ y $(A, d_h, \cdot)$ dos dga's definidas como antes, y consideremos $H(A, d) \cong \mathcal{H}$ y $H(A, d_h) \cong \mathcal{H}_h$ sus respectivos complejos de cohomología. Si $\{m_n\}_{n\geq 1}$ y $\{\mu_n\}_{n\geq 1}$ son las multiplicaciones de orden superior de $\mathcal{H}$ y $\mathcal{H}_h$, respectivamente. Entonces $\left(\mathcal{H}, \{m_n\}_{n\geq 1}\right)$ y $\left(\mathcal{H}_h, \{\mu_n\}_{n\geq 1}\right)$ son $A_\infty-$álgebras.

Sea $\tilde{h} : (A, d, \cdot) \to (A, d_h, \cdot)$ una función lineal de grado 0, definida por

$$\begin{array}{rccc} \tilde{h}: & (A, d, \cdot) & \to & (A, d_h, \cdot) \\ & a & \mapsto & \tilde{h}(a) = h^{|a|}(a) \end{array}$$

Por la linealidad será suficiente asumir que $a = a_1 \cdot \ldots \cdot a_p$ con a_i de grado 1 para cada i, así $\tilde{h}(a_1 \cdot \ldots \cdot a_p) = h^{(p)}(a_1 \cdot \ldots \cdot a_p) = \underline{h}a_1 \cdot \ldots \cdot \underline{h}a_p$.

Lema 4.19:
La función lineal $\tilde{h} : (A, d, \cdot) \to (A, d_h, \cdot)$ es un morfismo de álgebras diferenciales graduadas si $[\![\underline{h}, \underline{h}]\!] = 0$.

<u>*Demostración*</u>: Para que $\tilde{h}$ sea un morfismo de dga, debemos mostrar que para cada a, b en A se tiene $\tilde{h}(a{\cdot}b) = \tilde{h}(a){\cdot}\tilde{h}(b)$; para una identidad $1_A \in A$, $\tilde{h}(1_A) = 1_A$; y, $\tilde{h}d(a) = d_h\tilde{h}(a)$ para todo $a \in A$.

Por la linealidad de h es suficiente considerar a, b en A con $a = a_1 \cdot \ldots \cdot a_p$ y $b = b_1{\cdot}\ldots{\cdot}b_q$. Así, $\tilde{h}(a{\cdot}b) = h^{(p+q)}(a_1{\cdot}\ldots{\cdot}a_p{\cdot}b_1{\cdot}\ldots{\cdot}b_q) = \underline{h}a_1{\cdot}\ldots{\cdot}\underline{h}a_p{\cdot}\underline{h}b_1{\cdot}\ldots{\cdot}\underline{h}b_p = h^{(p)}(a_1 \cdot \ldots \cdot a_p) \cdot h^{(q)}(b_1 \cdot \ldots \cdot b_q) = \tilde{h}(a) \cdot \tilde{h}(b)$.

Sea $1_A \in A^0$ una identidad de $(A, \cdot)$, así $\tilde{h}(1_A) = h^{(0)}(1_A) = id_A(1_A) = 1_A$.

Notamos que si $|a| = 0$, entonces $d_h\tilde{h}(a) = d_h(a) = h^{(1)}d(a) - dh^{(1)}(a) = h^{(1)}d(a) = \tilde{h}d(a)$.

Ahora, si $1 \leq |a|$, podemos proseguir por inducción sobre $|a|$. El caso $|a| = 1$ sigue directamente que $[\![\underline{h},\underline{h}]\!] = 0$, ya que $d_h h^{(1)} = h^{(2)}d - dh^{(2)}$ y como $|a| < 2$, tenemos $h^{(2)}d(a) = 0$ and $h^{(2)}d(a) = d_h h^{(1)}(a)$. Además $\tilde{h}d(a) = d_h\tilde{h}(a)$. Supongamos que la proposición es verdadera para cada $a \in A^{p-1}$. Sea $a = a_1 \cdot \ldots \cdot a_p \in A^p$,

$$\begin{aligned}
\tilde{h}d(a_1 \cdot \ldots \cdot a_p) &= h^{(p+1)}d\,(a_1 \cdot \ldots \cdot a_p) \\
&= h^{(p+1)}\left(d\,(a_1 \cdot \ldots \cdot a_{p-1}) \cdot a_p\right) \\
&\qquad +(-1)^{p-1}h^{(p+1)}\,(a_1 \cdot \ldots \cdot a_{p-1} \cdot da_p) \\
&= h^{(p)}d\,(a_1 \cdot \ldots \cdot a_{p-1}) \cdot h^{(1)}\,(a_p) \\
&\qquad +(-1)^{p-1}h^{(p-1)}\,(a_1 \cdot \ldots \cdot a_{p-1}) \cdot h^{(2)}da_p \\
&= d_h h^{(p-1)}\,(a_1 \cdot \ldots \cdot a_{p-1}) \cdot h^{(1)}\,(a_p) \\
&\quad +(-1)^{p-1}h^{(p-1)}\,(a_1 \cdot \ldots \cdot a_{p-1}) \cdot d_h h^{(1)}\,(a_p) \\
&= d_h\left(h^{(p-1)}\,(a_1 \cdot \ldots \cdot a_{p-1}) \cdot h^{(1)}\,(a_p)\right) \\
&= d_h\left(h^{(p)}\,(a_1 \cdot \ldots \cdot a_p)\right) \\
&= d_h\tilde{h}(a)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\tilde{h} : (A, d, \cdot) \to (A, d_h, \cdot)$ es un morfismo álgebras diferenciales graduadas. $\square$

Lema 4.20:
Si existe $\underline{h}^{-1}$, entonces existe $\tilde{h}^{-1}$ tal que $\tilde{h}\tilde{h}^{-1} = id_A = \tilde{h}^{-1}\tilde{h}$.

Demostración: Note que $\underline{h}^{-1}$ es una función lineal graduada tal que

$$\underline{h} \circ \underline{h}^{-1} = id_{A^1} = \underline{h}^{-1} \circ \underline{h}$$

Sea $\tilde{h}^{-1} : A \to A$ la función graduada definida por $\tilde{h}^{-1}(a) = \left(\underline{h}^{-1}\right)^{(|a|)}(a)$ para cada $a \in A$. Puesto que $\underline{h}^{-1}$ en una función lineal, el endomorfismo inducido $\left(\underline{h}^{-1}\right)^{(p)}$ para cualquier entero no negativo p, es una función lineal graduada.

Ahora, consideremos $a = a_1 \cdot \ldots \cdot a_p \in A^p$,

$$\begin{aligned}
\tilde{h} \circ \tilde{h}^{-1}(a_1 \cdot \ldots \cdot a_p) &= \tilde{h}\left(\left(\underline{h}^{-1}\right)^{(p)}(a_1 \cdot \ldots \cdot a_p)\right) \\
&= h^{(p)}\left(\underline{h}^{-1}a_1 \cdot \ldots \cdot \underline{h}^{-1}a_p\right) \\
&= \underline{h}\,\underline{h}^{-1}a_1 \cdot \ldots \cdot \underline{h}\,\underline{h}^{-1}a_p \\
&= a_1 \cdot \ldots \cdot a_p
\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}\tilde{h}^{-1}\tilde{h}(a_1\cdot\ldots\cdot a_p) &= \tilde{h}^{-1}h^{(p)}(a_1\cdot\ldots\cdot a_p)\\ &= \left(\underline{h}^{-1}\right)^{(p)}(\underline{h}a_1\cdot\ldots\cdot\underline{h}a_p)\\ &= \underline{h}^{-1}\,\underline{h}a_1\cdot\ldots\cdot\underline{h}^{-1}\,\underline{h}a_p\\ &= a_1\cdot\ldots\cdot a_p\end{aligned}$$

Así, existe $\tilde{h}^{-1}$. $\square$

Los siguientes resultados nos dicen que a partir de las mismas álgebras graduadas, pero no del mismo diferencial, es posible construir estructuras $A_\infty-$cuasi-isomorfas en sus respectivos complejos de cohomología. Por lo tanto, si M es una variedad Riemanniana sin frontera, compacta, orientable y de dimensión n, la cohomología de De Rham asociada a los espacios de $k-$formas $(\Omega(M), d, \wedge)$, donde d y $\wedge$ son una derivada exterior y un producto exterior, respectivamente; y la cohomología asociada a $(\Omega(M), d_h, \wedge)$ son estructuras $A_\infty-$cuasi-isomorfas.

Teorema 4.21:
Sea $\underline{h} : A^1 \to A^1$ una función lineal tal que existe $\underline{h}^{-1}$ y $[\![\underline{h},\underline{h}]\!] = 0$; entonces existe un cuasi-isomorfismo de dga's, $\tilde{h} : (A, d, \cdot) \to (A, d_h, \cdot)$. Además, $\tilde{h}$ induce un cuasi-isomorfismo de $A_\infty-$álgebra entre $\left(\mathcal{H}, \{m_n\}_{n\geq 1}\right)$ y $\left(\mathcal{H}_h, \{\mu_n\}_{n\geq 1}\right)$.

<u>*Demostración*</u>: Consideremos $\tilde{h} : (A, d, \cdot) \to (A, d_h, \cdot)$ definido por $\tilde{h}(a) = h^{(|a|)}(a)$ para cada $a \in A$. Por los lemas 4.19 y 4.20, $\tilde{h}$ es un morfismo de dga's con inversa $\tilde{h}^{-1}$. Puesto que $\tilde{h}$ es una equivalencia de cocadenas y $H(\tilde{h}) : H(A, d) \to H(A, d_h)$, concluímos que $[a] \mapsto [\tilde{h}(a)]$ es un isomorfismo, ver teorema 1.21 . Por lo tanto $\tilde{h}$ es un cuasi-isomorfismo.

Puesto que $\mathcal{H} \cong H(A, d)$ y $\mathcal{H}_h \cong H(A, d_h)$, transportamos la $A_\infty-$estructura de $H(A, d)$ y de $H(A, d_h)$ a $\mathcal{H}$ y $\mathcal{H}_h$. Sean $\left(\mathcal{H}, \{m_n\}_{n\geq 1}\right)$ y $\left(\mathcal{H}_h, \{\mu_n\}_{n\geq 1}\right)$ las estructuras de$A_\infty-$álgebras obtenidas mediante el teorema de Zhou-Merkulov. Sea $f : \mathcal{H} \to \mathcal{H}_h$ un $A_\infty-$morfismo definido por $f = \{f_i\}_{i\geq 1}$ con $|f_i| = 1 - i$, donde $f_i = \begin{cases} H(\tilde{h}) & \text{si } i = 1\\ 0 & \text{si } i \neq 1\end{cases}$. Note que $|H(\tilde{h})| = 0$ y para cada $n \geq 1$ las identidades $MI(n)$, ver definición 2.3, se transforman en:

$$H(\tilde{h}) \circ m_n = \mu_n \circ \underbrace{H(\tilde{h}) \otimes \ldots \otimes H(\tilde{h})}_{n \text{ veces}}.$$

El $A_\infty-$morfismo f es un cuasi-isomorfismo. En efecto, $f_1 = H(\tilde{h})$ es un cuasi-isomorfismo entre $H(A,d) \cong (\mathcal{H}, m_1) = (\mathcal{H}, d)$ y $H(A, d_h) \cong (\mathcal{H}_h, \mu_1) = (\mathcal{H}_h, d_h)$, pues para cada $a \in \mathcal{H}$ tenemos $\tilde{h}(a) \in \mathcal{H}_h$ y viceversa. Así, si $a \in \mathcal{H}$ con $|a| = p$, entonces $da = 0$ y $d_h\tilde{h}(a) = d_h h^{(p)}(a) = h^{(p+1)}da = 0$ por lo que $\tilde{h}(a) \in \mathcal{H}_h$. Contrariamente, si $\tilde{h}(a) \in \mathcal{H}_h$ con $|\tilde{h}(a)| = |a| = p$, entonces $h^{(p+1)}da = d_h\tilde{h}(a) = 0$, y $da \in \ker h^{(p+1)} \subset \ker \tilde{h} = \{0\}$, porque $\tilde{h}$ es invertible, así $da = 0$ y $a \in \mathcal{H}$. $\square$

El siguiente resultado no requiere de la invertibilidad de la función lineal $\tilde{h}$, pero sí que $\mathcal{H}$ sea de tipo finito, es decir una subálgebra graduada de A es de tipo finito.

Teorema 4.22:
Sea $\underline{h} : A^1 \to A^1$ un endomorfismo tal que el morfismo $\tilde{h}$ es una equivalencia de cocadenas y suponga además $\mathcal{H}$ de tipo finito y $[\![\underline{h}, \underline{h}]\!] = 0$. Entonces existe un cuasi-isomorfismo de dga's $h : (A, d, \cdot) \to (A, d_h, \cdot)$. Además, $\tilde{h}$ induce un cuasi-isomorfismo de $A_\infty-$álgebra entre $\big(\mathcal{H}, \{m_n\}_{n\geq 1}\big)$ y $\big(\mathcal{H}_h, \{\mu_n\}_{n\geq 1}\big)$.

<u>*Demostración*</u>: Consideremos $\tilde{h} : (A, d, \cdot) \to (A, d_h, \cdot)$ definida por $\tilde{h}(a) = h^{(|a|)}(a)$ para cada $a \in A$. Por el lema 4.19 y el hecho que $\tilde{h}$ es una equivalencia de cocadenas, tenemos que $H(\tilde{h}) : H(A, d) \to H(A, d_h)$, $[a] \mapsto [\tilde{h}(a)]$ es un isomorfismo, ver 1.21. Por lo tanto $\tilde{h}$ es un cuasi-isomorfismo.

Puesto que $\mathcal{H} \cong H(A, d)$ y $\mathcal{H}_h \cong H(A, d_h)$, transportamos la $A_\infty-$estructura de $H(A, d)$ y de $H(A, d_h)$ a $\mathcal{H}$ y $\mathcal{H}_h$. Sean $\big(\mathcal{H}, \{m_n\}_{n\geq 1}\big)$ y $\big(\mathcal{H}_h, \{\mu_n\}_{n\geq 1}\big)$ las estructuras de $A_\infty-$álgebras obtenidas mediante el teorema de Zhou-Merkulov. Sea $f : \mathcal{H} \to \mathcal{H}_h$ un $A_\infty-$morfismo definido por $f = \{f_i\}_{i\geq 1}$ con $|f_i| = 1 - i$, donde $f_i = \begin{cases} H(\tilde{h}) & \text{si } i = 1 \\ 0 & \text{si } i \neq 1 \end{cases}$. Note que $|H(\tilde{h})| = 0$ y para cada $n \geq 1$ las identidades $MI(n)$ son:

$$H(\tilde{h}) \circ m_n = \mu_n \circ \underbrace{H(\tilde{h}) \otimes \ldots \otimes H(\tilde{h})}_{n \text{ veces}}.$$

El $A_\infty-$morfismo f es un cuasi-isomorfismo. En efecto, $f_1 = H(\tilde{h})$ es un cuasi-isomorfismo entre $H(A,d) \cong (\mathcal{H}, m_1) = (\mathcal{H}, d)$ y $H(A, d_h) \cong (\mathcal{H}_h, \mu_1) = (\mathcal{H}_h, d_h)$. Note que podemos identificar $H(\tilde{h})$ con $\tilde{h}$ cuando consideramos $\mathcal{H} \cong H(A,d)$ y $\mathcal{H}_h \cong H(A, d_h)$.

Nosotros no sólo probaremos el hecho que $\tilde{h} : (\mathcal{H}, d) \to (\mathcal{H}_h, d_h)$ es un quasi-isomorfismo, sino que es un isomorfismo. Porque: para cualquier $a \in \mathcal{H}$, $d_h\tilde{h}(a) = \tilde{h}da = \tilde{h}(0) = 0$ y $\tilde{h}(a) \in \mathcal{H}_h$; para cada $a, b \in \mathcal{H}$, $\tilde{h}(a \cdot b) \in \mathcal{H}_h$, en efecto $d_h\left(\tilde{h}(a \cdot b)\right) = d_h\left(\tilde{h}(a) \cdot \tilde{h}(b)\right) = d_h\tilde{h}(a) \cdot \tilde{h}(b) + (-1)^{|\tilde{h}(a)|}\tilde{h}(a) \cdot d_h\tilde{h}(b) = 0 \cdot \tilde{h}(b) + (-1)^{|\tilde{h}(a)|}\tilde{h}(a) \cdot 0 = 0$; puesto que $\ker \tilde{h}|_{\mathcal{H}} = \{0\}$, la función lineal h es inyectiva; como $\mathcal{H}$ es de tipo finito, entonces $\mathcal{H}_h$ también lo es. Así $\tilde{h}$ es sobreyectiva y por lo tanto un isomorfismo. $\square$

La demostración de los siguientes corolarios es inmediata.

Corolario 4.23:
Sea $\underline{h} : A^1 \to A^1$ un endomorfismo tal que el morfismo $\tilde{h}$ es una equivalencia de cocadenas y suponga además A^1 de dimensión finita y $[\![\underline{h}, \underline{h}]\!] = 0$. Entonces existe un cuasi-isomorfismo de dga's $h : (A, d, \cdot) \to (A, d_h, \cdot)$. Además, $\tilde{h}$ induce un cuasi-isomorfismo de $A_\infty-$álgebra entre $\left(\mathcal{H}, \{m_n\}_{n\geq 1}\right)$ y $\left(\mathcal{H}_h, \{\mu_n\}_{n\geq 1}\right)$.

Corolario 4.24:
Sea M una variedad compacta diferenciable de dimensión n, considere el espacio de las $k-$formas diferenciables, $\Omega^*(M) = \bigoplus_{k=0}^{n} \Omega^k(M)$ con diferencial d y producto $\wedge$, derivada exterior y producto exterior, respectivamente. Sea además

$$\underline{h} : \Omega^1(M) \to \Omega^1(M)$$

un endomorfismo tal que el morfismo $\tilde{h}$ es una equivalencia de cocadenas y $[\![\underline{h}, \underline{h}]\!] = 0$. Entonces existe un cuasi-isomorfismo de dga's $h : (\Omega^*(M), d, \wedge) \to (\Omega^*(M), d_h, \wedge)$. Además, $\tilde{h}$ induce un cuasi-isomorfismo de $A_\infty-$álgebra entre $\left(H_{dR}(M), \{m_n\}_{n\geq 1}\right)$ y $\left(\mathcal{H}_h, \{\mu_n\}_{n\geq 1}\right)$, donde $H_{dR}(M)$ es la cohomología de De Rham.

<u>*Demostración*</u>: Dado que M es una variedad compacta, ver [25, pág. 226] , entonces $H_{dR}(M)$ es de tipo finito, por lo que se obtiene el resultado. $\square$

Bibliografía

[1] G. de Rham, *Variétés différentiables: formes, courants, formes harmoniques*, Troisième, Publications de lÍnstitut de Mathématique de lÚniversité de Nancago, III, Actualités Scientifiques et Industrielles, Hermann, Paris, 1973.

[2] I. Agricola; T. Friedrich, *Global Analysis: Differential Forms in Analysis, Geometry, and Physics*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 52, American Mathematical Society, 2002.

[3] U. Buijs; J.J. Gutiérrez, *Homotopy transfer and rational models for mapping spaces*, Journal of Homotopy and Related Structures **11, No. 2** (2016), 309–332.

[4] T.V. Kadeishvili, *On the homology theory of fiber spaces*, Translated in Russ. Math. Surv. 35 **No. 3** (1980), 231–238.

[5] H. Kajiura, *Homotopy algebra morphism and geometry of classical string field theories*, Nuclear Physics B630 [PM] (2002), 361–432.

[6] ______, *An $A_\infty-$Structure for lines in a plane*, Internat. Math. Res. Notices (IMRN) **20** (2009), 3919–3955.

[7] B. Keller, *Introduction to $A_\infty-$algebras and modules*, Homology Homotopy Appl. **3 (1)** (2001), 1–35.

[8] ______, *A−infinity algebras, modules and functor categories*, Amer. Math. Soc. Providence (2006), 67–93. in: Trends in Representation Theory of algebras and related topics.

[9] S. Eilenberg; S. Mac Lane, *On the groups of $H(\pi, n)$. i*, Annals of Mathematics, Second Series **58** (1953), 55–106.

[10] J. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, Second Edition, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag New York, 2013.

[11] Y. Soibelman M. Kontsevich, *Notes on $A_\infty-$algebras, $A_\infty-$categories and non-commutative geometry. I*, Lecture Notes in Physics (2009), 153–219. Chapter 8 in: Homological Mirror Symmetry.

[12] J. Peter May, *A Concise Course in Algebraic Topology*, first, Chicago Lectures in Mathematics series, 1999.

[13] S.A. Merkulov, *Strong homotopy algebras of a Kahler manifold*, Internat. Math. Res. Notices (IMRN) **No. 3** (1999), 153–164.

[14] M. J. Moreno, *Álgebras Diferenciales Graduadas, $A_\infty-$Álgebras y Teoría de Hodge*, Master's Thesis, 2014.

[15] U. Buijs; J.M. Moreno-Fernández; A. Murillo, *A_∞ structures and Massey products*, arXiv:1801.03408 (2018).

[16] A. Frölicher; A. Nijenhuis, *Theory of vector-valued differential forms. Part I: Derivations of the graded ring differential forms*, Indag. Math. **18** (1956), 338–359.

[17] J.D. Stasheff, *Homotopy associativity of $H-$spaces I*, Trans. Amer. Math. Soc **168** (1963), 275–292.

[18] ———, *Homotopy associativity of $H-$spaces II*, Trans. Amer. Math. Soc **168** (1963), 293–312.

[19] A.P. Stone, *Higher order conservation laws*, J. Differential Geom. **3** (1969), 447–456.

[20] P.R. Eiseman; A.P. Stone, *A generalized Hodge theory*, J. Differential Geom. **9** (1974), 169–176.

[21] Y. Félix; S. Halperin; J. C. Thomas, *Rational homotopy theory*, first, Graduate Texts in Mathematics, vol. 205, Springer-Verlag New York, 2001.

[22] J.L. Loday; B. Vallete, *Algebraic Operads*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol. 346, Springer-Heidelberg, 2012.

[23] B. Vallette, *Algebra + Homotopy = Operad*, Symplectic, Poisson and Noncommutative Geometry - MSRI Publications **62** (2014), 229–290.

[24] I. Galvez-Carrillo; A. Tonks; B. Vallette, *Homotopy Batalin-Vilkovisky algebras*, Journal of Noncommutative Geometry **6** (2012), 539–602.

[25] F. W. Warner, *Foundations of Differentiable Manifold and Lie Groups*, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag New York, 1983.

[26] D. M. Lu; Palmieri; Q. S. Wu; and J. J. Zhang, *Regular algebras of dimension 4 and their $A_\infty-$Ext-algebras*, Duke Math. J. **137** (2007), no. 3, 381–584.

[27] ———, *A-infinity structure on ext-algebras*, Journal Pure Appl. Algebra **213** (2009), 2017–2037.

[28] Qunfeng Yang, *Some graded Lie algebra structures associated with Lie algebras and Lie algebroids, Toronto Univerity*, Ph.D. Thesis, 1999.

[29] J. Zhou, *Hodge theory and $A_\infty-$Structures on Cohomology*, Internat. Math. Res. Notices (IMRN) **No. 2** (2000), 71–78.

[30] ———, *Homological perturbation theory and mirror symmetry*, Acta Mathematica Sinica **Vol. 19, No. 4** (2003).