

Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia
Departamento de Matemática y Ciencia de la Computación



Hacia una demostración de la arco conexidad de la isentropa de entropía cero de la familia cuadrática de Lorenz lexicográfica: burbujas de entropía constante y cotas superiores para las burbujas de entropía cero

Autor: Solange Ximena Maricel Aranzubia Vera

Profesor Guía: Rafael Eusebio Labarca Briones

Tesis presentada al Departamento de Matemática y Ciencia de la Computación de la Facultad de Ciencia de la Universidad de Santiago de Chile, para optar al grado de Doctor en Ciencia Mención Matemática.

Santiago, Chile

2015

©2015, Solange Ximena Maricel Aranzubia Vera

Se autoriza la reproducción total o parcial, con fines académicos, por cualquier medio o procedimiento, incluyendo la cita bibliográfica que acredita al trabajo y a su autor.

Contents

Resumen	vii
Abstract	ix
Agradecimientos	xi
Contents	xii
Introduction	1
1 Preliminaries	5
2 Burbujas de Entropía Constante	19
2.1 Theorem A	20
2.1.1 Proof of the Theorem A	27
2.1.2 An Example	35
2.2 Proof of the Theorem B	40
3 Cota superior para ciertas burbujas de subshift derivados de sucesiones primarias en el mundo lexicográfico	42
3.1 Teorema C	56

3.1.1	Algoritmo periodo primo	59
3.1.2	Algoritmo periodo no primo	80
3.1.3	Demostración del Teorema C	117
3.2	Anexo	127
Conclusiones		273
Bibliography		275

Introduction

En este trabajo presentamos algunas contribuciones a la comprensión de la dinámica de ciertos subshifts del mundo lexicográfico y su aplicación al estudio de las bifurcaciones de la familia genérica cuadrática de aplicaciones de tipo Lorenz lexicográficos.

Consideramos $\Sigma_2 = \{\theta : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}\}$ y $T : [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1] \rightarrow [0, 1]$ definido por $T(x) = 3x$ si $x \in [0, \frac{1}{3}]$ y $T(x) = 3(-x + 1)$ si $x \in [\frac{2}{3}, 1]$.

Sea $\Lambda_T = \bigcap_{j=0}^{\infty} T^{-j} \left([0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1] \right)$ el conjunto maximal invariante asociado a T en $[0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$. Para cada $x \in \Lambda_T$ podemos definir su itinerario por $I_T(x) : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$, $I_T(x)(j) = i \Leftrightarrow T^j(x) \in I_i$, donde $I_0 = [0, \frac{1}{3}]$ y $I_1 = [\frac{2}{3}, 1]$. La aplicación $x \rightarrow I_T(x)$ es una biyección de Λ_T en Σ_2 y sirve para definir:

- Una topología τ_T en Σ_2 por $U \subset \Sigma_2$ es abierto si y sólo si $I_T^{-1}(U) \subset \Lambda_T$ es abierto.
- Un orden en Σ_2 por $\theta \leq_T \beta \Leftrightarrow I_T^{-1}(\theta) \leq I_T^{-1}(\beta)$ en Λ_T .

En Σ_2 consideramos el shift $\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ definido por $\sigma(\theta)(i) = \theta_{i+1}$, esto es $\sigma(\theta_0, \theta_1, \theta_2, \dots) = (\theta_1, \theta_2, \dots)$. Resulta ser que $I_T : \Lambda_T \rightarrow \Sigma_2$ es una conjugación topológica entre $T|_{\Lambda_T} : \Lambda_T \rightarrow \Lambda_T$ y $\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ (esto es $\sigma \circ I_T = I_T \circ T|_{\Lambda_T}$).

Una sucesión $a \in \Sigma_2$ ($b \in \Sigma_2$) se dice minimal (maximal) para σ en el orden lexicográfico si ocurre que $a \leq \sigma^i(a)$ ($\sigma^i(b) \leq b$) para cada $i \in \mathbb{N}_0$.

Si descomponemos $\Sigma_2 = \Sigma_0 \cup \Sigma_1$, $\Sigma_i = \{\theta \in \Sigma_2; \theta = (i, \theta_1, \theta_2, \dots)\}$, $i = 0, 1$, en-

tonces denotaremos por $Min_2 = \{a \in \Sigma_2; a \text{ es minimal y } a \in \Sigma_0\}$ el conjunto de sucesiones minimales de Σ_2 que están en Σ_0 . De manera similar definimos $Max_2 = \{b \in \Sigma_2; b \text{ es maximal y } b \in \Sigma_1\}$.

Para cada $a \in Min_2, a \neq \underline{0}$ se define $b(a) = \sup\{\sigma^i(a); i \in \mathbb{N}_0\}$. Es facil verificar que $b(a)$ es maximal.

Dados $\alpha \in \Sigma_0, \beta \in \Sigma_1$ se define $\Sigma[\alpha, \beta] = \bigcap_{j=0}^{\infty} \sigma^{-j}([\alpha, \beta]) = \{\theta \in [\alpha, \beta]; \alpha \leq \sigma^j(\theta) \leq \beta, \forall j \in \mathbb{N}\} =$ conjunto maximal invariante para σ en el intervalo $[\alpha, \beta]$.

Como señalado en [18] podemos considerar las tres funciones $\varphi, \psi, \chi : \Sigma_0 \rightarrow \Sigma_1$, definido por:

$$\varphi(\alpha) = \inf\{\beta \in \Sigma_1; \Sigma[\alpha, \beta] \neq \emptyset\}$$

$$\psi(\alpha) = \inf\{\beta \in \Sigma_1; \Sigma[\alpha, \beta] \text{ contiene infinitos elementos}\}$$

$$\chi(\alpha) = \inf\{\beta \in \Sigma_1; \Sigma[\alpha, \beta] \text{ es no numerable}\}.$$

Es claro que $\Sigma[\alpha, \beta]$ es no vacío para $\beta \geq \varphi(\alpha)$; tiene infinitos elementos si $\beta > \psi(\alpha)$ y es un subshift con dinámica no trivial si $\beta \geq \chi(\alpha)$. También, siguiendo a [18]; si $\varphi(\alpha) \leq \beta \leq \chi(\alpha)$, entonces $h_{top}(\sigma|_{\Sigma[\alpha, \beta]}) =$ entropía topológica de la restricción de σ a $\Sigma[\alpha, \beta] = 0$ y si $\chi(\alpha) < \beta$, entonces $h_{top}(\sigma|_{\Sigma[\alpha, \beta]}) > 0$

En una parte de nuestro trabajo se hace necesario calcular de manera explicita el valor de $\chi(a)$ para una sucesión minimal $a \in A_\infty^\infty$ (ver capitulo 1 para la definición de A_∞^∞) y esto es nuestro lema 1.0.10. En particular, se tiene que si $a \in A_\infty^\infty$ y $b = b(a) = \sup\{\sigma^i(a); i \in \mathbb{N}_0\}$ entonces $h_{top}(\sigma|_{\Sigma[a, b]}) = 0$ (observación 2.0.16 parte 2)).

Asociada con $a \in Min_2$ podemos definir el conjunto $\Sigma[a] = \{d \in Max_2; \Sigma[a, d] \neq \emptyset\}$ y el mundo lexicográfico como $LW = \{(a, d) \in Min_2 \times Max_2; \{a, d\} \subset \Sigma[a, d]\}$. En particular, para todo $(a, d) \in LW$, se cumple que si $a(d) = \min\{\sigma^i(d); i \in \mathbb{N}_0\}$, entonces $a \leq a(d) < b(a) \leq d$. Asociado con $a \in Min_2 \cap Per(\sigma)$ y $d \in Max_2 \cap Per(\sigma), d \neq \underline{1}$, tales que $(a, d) \in LW$ podemos definir la (a, d) -gorgona $A_\infty^\infty(a, d)$ (ver capítulo 1) que

es un conjunto de sucesiones periódicas en Min_2 que se definen a partir de a y d .

Un resultado principal de este trabajo es el siguiente: $\forall a \in A_\infty^\infty(a, d)$ se cumple que $h_{top}(\sigma|_{\Sigma[\alpha, b(\alpha)]}) = h_{top}(\sigma|_{\Sigma[a, d]})$. En general, para cada $\alpha \in A_\infty^\infty(a, d)$ ocurre que $\Sigma[a, d] \subset \Sigma[\alpha, b(\alpha)]$; lo interesante es que no aumenta la entropía de σ al considerar su restricción a $[\alpha, b(\alpha)]$. De hecho, el conjunto $A_\infty^\infty(a, d)$ tiene una cantidad no enumerable de fines $\alpha \in Min_2$ y para cada uno de ellos ocurre que $h_{top}(\sigma|_{\Sigma[\alpha, b(\alpha)]}) = h_{top}(\sigma|_{\Sigma[a, d]})$ (esto se obtiene del teorema A y de la continuidad de la entropía probada en [18]).

Llamaremos a la estructura $(\Sigma_2, \sigma, \tau_T, \leq_T)$ espacio lexicográfico. Este espacio modela bastante bien a la familia genérica cuadrática $F_{(\mu, \nu)} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$F_{(\mu, \nu)}(x) = \begin{cases} \nu - x^2, & x < 0 \\ -\mu + x^2, & x > 0 \end{cases}$$

Entretanto, el trasvasije de los resultados para el espacio lexicográfico a la familia genérica cuadrática no es trivial y esto es normal que así sea ya que el espacio lexicográfico es un espacio topológico completamente desconexo, cerrado y perfecto. De hecho Labarca y Moreira en [19], hacen una descripción razonable de la teoría de bifurcaciones asociada a la familia cuadrática genérica usando como parámetros las sucesiones $(a, b) \in LW$. Pero ahora, por ejemplo, no es claro que la aplicación $(\mu, \nu) \rightarrow h_{top}(F_{(\mu, \nu)}|_{\Lambda_{(\mu, \nu)}})$ donde $\Lambda_{(\mu, \nu)} = \bigcap_{j=0}^{\infty} F_{(\mu, \nu)}^{-j}([- \mu, \nu])$ sea continua.

Mucho menos aún es claro que el conjunto $\{(\mu, \nu), h_{top}(F_{(\mu, \nu)}|_{\Lambda_{(\mu, \nu)}}) = 0\}$ sea conexo o arcoconexo. A este respecto, señalamos que J. Milnor colocó en el trabajo [11], el problema de determinar si las isentropas de una categoría dada de aplicaciones es conexa o no. En esa dirección y en el trabajo [29], el mismo Milnor junto a Charles Tresser prueban que las isentropas de las aplicaciones polinomiales cúbicas son conexas. Para ello utilizan parametrizaciones apropiadas de este espacio polinomial y el hecho de que en el espacio considerado la función entropía topológica es continua. De hecho

y en esta dirección, Henk Bruin y Sebastian Van Strein [6] han probado recientemente que las isentropas, para polinomios reales de grado $b + 1$ con $b-$ máximos o mínimos, no degenerados, contenidos en el interior del intervalo I y que satisfacen $f(\partial I) \subset \partial I$; son conexas. La demostración, en ambos casos, no es elemental.

A nosotros nos gustaría probar que el conjunto $H_0 = \{(\mu, \nu); h_{top}(F_{(\mu, \nu)})|_{\Lambda_{(\mu, \nu)}} = 0\}$ es conexo o, mejor aún, arco-conexo (ya que en este caso es conexo). En este sentido nuestro segundo resultado principal. A saber: Sea $a \in A_\infty$ y $b = b(a)$, se tiene $h_{top}(\sigma|_{\Sigma[a_-\underline{b}, b_+\underline{a}]}) = \frac{1}{per(a)} \log(2)$.

Aquí si $a = \underline{0a_1a_2 \dots a_k1}, b = b(a) = \underline{1b_1b_2 \dots b_k0}$ entonces $a_- = 0a_1a_2 \dots a_k0$ y $b_+ = 1b_1b_2 \dots b_k1$ y $a_-\underline{b} = 0a_1a_2 \dots a_k0\underline{1b_1b_2 \dots b_k0}$; $b_+\underline{a} = 1b_1b_2 \dots b_k1\underline{0a_1a_2 \dots a_k1}$. Este resultado nos entrega el cálculo de la entropía topológica del subshift

$\sigma|_{\Sigma[a_-\underline{b}, b_+\underline{a}]} : \Sigma[a_-\underline{b}, b_+\underline{a}] \rightarrow \Sigma[a_-\underline{b}, b_+\underline{a}]$ en función del periodo de a . Por ejemplo si $\underline{0001}, a_-\underline{b} = \underline{00001000}, b_+\underline{a} = \underline{10010001}$ y $h_{top}(\sigma|_{\Sigma[\underline{00001000}, \underline{10010001}]}) = \frac{1}{4} \log(2)$.

Este resultado, y la verificación de que el resultado anunciado en [19] como sección 4.3 está correcto, tienen como consecuencia que H_0 es arcoconexo. En efecto, el razonamiento que sigue a la proposición 3.1.2 diría que la intersección de las regiones encajonadas

$B(\underline{\alpha_i}, (\alpha_i)_-\underline{\beta_i}, \underline{\beta_i}, (\beta_i)_+\underline{\alpha_i})$ sería un conjunto de entropía cero que puede conectarse con el cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$ por un camino continuo que se va construyendo por los conjuntos $C_1(\underline{\alpha_i}, (\beta_i)_+\underline{\alpha_i}) \cup C_2(\underline{\alpha_i}, \underline{\beta_i}) \cup C_3((\alpha_i)_-\underline{\beta_i}, \underline{\beta_i})$. Resta pues, para tener una demostración simple de la conexidad de la isentropa para la familia cuadrática señalada, probar que lo anunciado en [19] sección 4.3 es cierto para cada $a \in Min_2 \cap Per(\sigma)$.

Esta tesis está escrita en español e inglés. En inglés aquellas partes que ya forman un trabajo que ha sido sometido a publicación (con el teorema A y corolarios) y en español aquellos resultados de reciente demostración y que vendrían a constituir trabajos que serán sometidos a publicación.

Chapter 1

Preliminaries

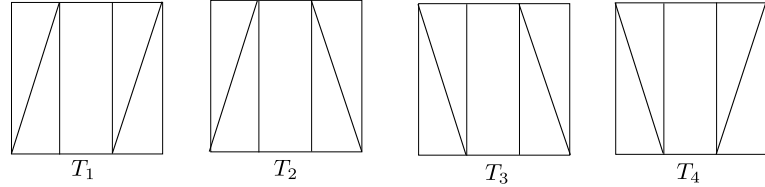
It is well known that one of the purposes of the topological theory of Dynamical Systems is to find universal models describing the topological dynamics of a large class of systems (see for instance [3], [8], [30]).

One of these universal models is the shift on n -symbols (Σ_n, d, σ) where Σ_n is the set of sequences $\{\theta : \mathbb{N}_0 \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, n-1\}\}$ endowed with certain metric, d , and $\sigma : \Sigma_n \rightarrow \Sigma_n$ is the shift map defined by $(\sigma(\theta))(i) = \theta(i+1)$. This model has been introduced to model one dimensional dynamics, by Metropolis, Stein, Stein at [27] and [28] (actually, for $n = 2$ with a different (said “naive”) presentation) and eventually stated formally by J. Milnor and W. Thurston at [29], where the notion of a signed order in the shift space (Σ_n, d, σ) was also defined.

In fact, several signed orders can be defined in Σ_n in a different way. Let us do this here. Let $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{2n-1} = 1$ be $2n$ points in the unit interval $[0, 1]$. Let $I_j = [x_{2j}, x_{2j+1}]$ for $j = 0, 1, 2, \dots, n-1$; and $T : \bigcup_{j=0}^{n-1} I_j \rightarrow [0, 1]$ be a map such that its restriction to I_j is linear and onto $[0, 1]$, for any $j = 0, 1, \dots, n-1$. The restriction of the map T to any interval I_j can be either orientation preserving or orientation reversing.

Hence, we may define 2^n piecewise linear maps $T : \bigcup_{j=0}^{n-1} I_j \rightarrow [0, 1]$ as before.

For example for $n = 2$ we have the following applications:



Let $Lin(n)$ denote the set formed by these 2^n maps. Associated to any $T \in Lin(n)$ we have its maximal invariant set $\Lambda_T = \{x \in \bigcup_{j=0}^{n-1} I_j; T^i(x) \in \bigcup_{j=0}^{n-1} I_j, \text{ for all } i \in \mathbb{N}\}$. In this set, we consider the induced topology by the euclidean topology of the interval $[0, 1]$.

It is not hard to see that the set Λ_T is bijective to Σ_n . In fact, the itinerary map $I_T : \Lambda_T \rightarrow \Sigma_n$ defined by $I_T(x)(i) = j$ if and only if $T^i(x) \in I_j$ is bijective. Its inverse map $I_T^{-1} : \Sigma_n \rightarrow \Lambda_T$ is given by $I_T^{-1}(\theta) = I_{\theta_0} \cap T^{-1}(I_{\theta_1}) \cap T^{-2}(I_{\theta_2}) \cap \dots = \bigcap_{j=0}^{\infty} T^{-j}(I_{\theta_j})$, where, from now and on, we denote $\theta = (\theta_0\theta_1\theta_2 \dots)$. Hence, by using the bijective map $I_T : \Lambda_T \rightarrow \Sigma_n$ we can induce in Σ_n :

- (a) A topology $\tau_T : U \subset \Sigma_n$ is open if and only if $I_T^{-1}(U) \subset \Lambda_T$ is open, and
- (b) An order $\theta \leq_T \beta$ in Σ_n if and only if $I_T^{-1}(\theta) \leq I_T^{-1}(\beta)$ in Λ_T .

Let us denote by $\Sigma_n(T)$ the ordered, compact topological space $(\Sigma_n, \tau_T, \leq_T)$. In this way, we have introduced 2^n of these ordered compact metric spaces.

These models has been extensively used to obtain a great amount of information about maps defined in an interval (see for instances [3, 8, 14, 16, 17, 18, 19, 26]); vector fields on three dimensional manifolds (see for instance [5, 10, 13, 15, 21, 22, 32]) among other kinds of dynamical systems.

In the special case of one dimensional dynamics, the shift of two symbols may be used to study increasing (decreasing) map with one discontinuity like the Lorenz maps, unimodal maps like the quadratic family or increasing-decreasing (decreasing-increasing) maps with one discontinuity. Namely, for $n = 2$ the ordered metric compact space $(\Sigma_2, \tau_T, \leq_T)$ corresponding to the increasing-increasing map T is known as the lexicographical space which generates the lexicographical world (see for instance [16, 17, 18, 19, ?, 24]) which is denoted LW.

In the present work we will deal with the lexicographical world. That is, here we consider the set Σ_2 with the topology endowed by the distance

$$d(\alpha, \beta) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\bar{d}(\alpha_i, \beta_i)}{2^i},$$

where

$$\bar{d}(\alpha_i, \beta_i) = \begin{cases} 0, & \alpha_i = \beta_i \\ 1, & \alpha_i \neq \beta_i \end{cases}$$

It is not hard to see that in this case the topology τ_T coincides with the topology τ_d , defined by the metric d (here T is the increasing-increasing map).

Let $\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ be the shift map $\sigma(\theta_0, \theta_1, \theta_2, \dots) = (\theta_1, \theta_2, \dots)$. Let Σ_0 and Σ_1 denote the sets $\{\theta \in \Sigma_2 ; \theta_0 = 0\}$ and $\{\theta \in \Sigma_2 ; \theta_0 = 1\}$ respectively. It is clear that $\Sigma_2 = \Sigma_0 \cup \Sigma_1$.

In Σ_2 we consider the lexicographical order: $\theta < \alpha$ for any $\theta \in \Sigma_0$ and $\alpha \in \Sigma_1$ or $\theta < \alpha$ if there is $n \in \mathbb{N}$ such that $\theta_i = \alpha_i$ for $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ and $\theta_n = 0$ and $\alpha_n = 1$. It is not hard to see that this order correspond to \leq_T , for T the increasing-increasing map.

For $a \leq b$ in Σ_2 let $[a, b]$ denote the interval $\{\theta \in \Sigma_2 | a \leq \theta \leq b\}$. $\Sigma[a, b]$ will denote the set $\bigcap_{n=0}^{\infty} \sigma^{-n}([a, b])$.

Let a denote the finite string $a = a_0a_1 \dots a_n$ and \underline{a} be the infinite sequence $\underline{a} = a_0a_1 \dots a_n$. For example, if $a = 0011$ then $\underline{a} = \underline{0011} = 00110011001100110011 \dots$

Let $Max_2 = \{\theta \in \Sigma_2; \sigma^i(\theta) \leq \theta, \forall i \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ and $Min_2 = \{\alpha \in \Sigma_2; \alpha \leq \sigma^i(\alpha), \forall i \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ denotes the sets of *maximal* and *minimal* sequences in the lexicographical order.

Definition 1.0.1. The set $LW = \{(a, b) \in Min_2 \times Max_2; \{a, b\} \subset \Sigma[a, b]\}$ will be called the lexicographical world.

Definition 1.0.2. 1. If $\underline{a} \in Min_2$, $a \neq \underline{0}$ then $b(a) = \sup\{\sigma^i(a); i \in \mathbb{N}\} \in Max_2$

2. If $\underline{d} \in Max_2$, $d \neq \underline{1}$ then $a(d) = \inf\{\sigma^i(d); i \in \mathbb{N}\} \in Min_2$.

Example: If $a = \underline{001} \in Min_2$, then $b(a) = \underline{100}$

If $d = \underline{110} \in Max_2$, then $a(d) = \underline{011}$.

Definition 1.0.3. 1. If $a = 0a_1a_2 \dots a_{n-1}1$ then $a_- = 0a_1a_2 \dots a_{n-1}0$

2. If $b = 1b_1b_2 \dots b_{n-1}0$ then $b_+ = 1b_1b_2 \dots b_{n-1}1$.

Definition 1.0.4. If $\underline{a}_1, \underline{a}_2$ are two sequences then we define $m(a_1, a_2)$ by $m(a_1, a_2) = \underline{a_1a_2}$.

For instance for $\underline{a}_1 = \underline{001}$ and $\underline{a}_2 = \underline{01}$ we have $m(a_1, a_2) = \underline{00101}$.

Definition 1.0.5. We can define map $\varphi, \psi, \chi : \Sigma_0 \longrightarrow \Sigma_1$ by :

$$\varphi(a) = \inf\{b \in \Sigma_1 : \Sigma[a, b] \neq \emptyset\}$$

$$\psi(a) = \inf\{b \in \Sigma_1 : \Sigma[a, b] \text{ contains } \infty\text{-elements}\} \text{ and}$$

$$\chi(a) = \inf\{b \in \Sigma_1 : \Sigma[a, b] \text{ is uncountable}\}$$

For example $\varphi(\underline{0}) = \psi(\underline{0}) = \chi(\underline{0}) = \underline{10}$; $\psi(\underline{01}) = \chi(\underline{01}) = \underline{1}$

Theorem 1.0.6. [18] The function $\chi : \Sigma_0 \longrightarrow \Sigma_1$ satisfies the following:

1. For $a < \underline{001}$, we have $\chi(a) = \sigma \circ T_{0,01} \circ \chi \circ T_{0,01}^*(a)$
2. For $\underline{001} \leq a \leq \underline{00110}$, we have $\chi(a) = 1T_{01,10} \circ \chi \circ T_{01,10}^*(\sigma(a))$
3. For $\underline{00110} \leq a \leq \underline{01}$, we have $\chi(a) = \underline{110}$
4. For $\underline{01} \leq a \leq \underline{01}$, we have $\chi(a) = T_{10,1} \circ \chi \circ T_{10,1}^*(1a)$

Where $T_{x,y}$ is the renormalization function and $T_{x,y}^*$ is the inverse of the renormalization function.

Theorem 1.0.7. ([18]) *The set $\{(a, b) \in \Sigma_0 \times \Sigma_1 : \text{the topological entropy of the function } (\sigma \mid \Sigma[a, b]) : \Sigma[a, b] \rightarrow \Sigma[a, b] \text{ is zero}\}$ is equal the set $\{(a, b) \in \Sigma_0 \times \Sigma_1 : b \leq \chi(a)\}$*

Definition 1.0.8. Sea $A_0 = \{\underline{0^n 1}, \underline{01^m}; n, m \in \mathbb{N}\}$

Es decir $A_0 = \{\dots, \underline{00001}, \underline{0001}, \underline{001}, \underline{01}, \underline{011}, \underline{0111}, \underline{01111}, \dots\}$

Sea $A_1 = \{m(a_1, a_2), \underline{a_1} < \underline{a_2} \text{ sucesiones consecutivas en } A_0\} \cup A_0$ y

$A_{n+1} = \{m(a_1, a_2); \underline{a_1} < \underline{a_2} \text{ sucesiones consecutivas en } A_n\} \cup A_n$

$$\begin{array}{l}
A_0 = \{\dots, \underline{00001}, \underline{0001}, \underline{001}, \underline{01}, \underline{011}, \underline{0111}, \underline{01111}, \dots\} \\
A_1 = \{\dots, \underline{0001}, \underline{0001001}, \underline{001}, \underline{00101}, \underline{01}, \underline{01011}, \underline{011}, \underline{0110111}, \underline{0111}, \dots\} \\
\quad \quad \quad \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \\
\quad \quad \quad m(\underline{0001}, \underline{001}) \quad m(\underline{001}, \underline{01}) \quad m(\underline{01}, \underline{011}) \quad m(\underline{011}, \underline{0111}) \\
A_2 = \{\dots, \underline{001}, \underline{00100101}, \underline{00101}, \underline{0010101}, \underline{01}, \underline{0101011}, \underline{01011}, \underline{01011011}, \underline{011}, \dots\}
\end{array}$$

Sea $A_\infty = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$

Para $\underline{a} \in A_\infty$ sea

$A_0(\underline{a}) = \{\underline{a_-(b(a))^{m-1}b(a)_+}, \underline{a_-b(a)_+a^{n-1}}; n, m \in \mathbb{N}\}$ $A_1(\underline{a}) = \{m(a_1, a_2); \underline{a_1} < \underline{a_2} \text{ son sucesiones consecutivas en } A_0(\underline{a})\} \cup A_0(\underline{a})$

$A_{n+1}(\underline{a}) = \{m(a_1, a_2); \underline{a_1} < \underline{a_2} \in A_n(\underline{a}) \text{ son sucesiones consecutivas}\} \cup A_n(\underline{a})$ Y sea

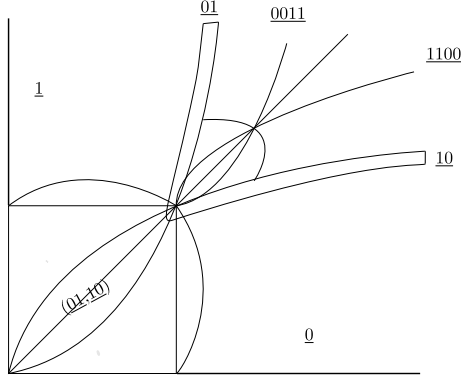
$A_\infty(\underline{a}) = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n(\underline{a})$

Ejemplo:

Sea $a = \underline{01} \in A_\infty$, entonces

$$A_0(a) = \{\dots \underline{00101011}, \underline{001011}, \underline{0011}, \underline{001101}, \underline{00110101}, \dots\}$$

$$A_1(a) = \{\dots \underline{001011}, \underline{0010110011}, \underline{0011}, \underline{0011001101}, \underline{001101}, \underline{00110100110101}, \dots\}$$



Denotamos por $A_\infty^0 = A_\infty$ y $A_\infty^1 = \bigcup_{\underline{a} \in A_\infty} A_\infty(\underline{a}) \cup A_\infty^0$

Ahora, asociado con cada $\underline{a} \in A_\infty^1$ podemos construir

$$A_0^2(\underline{a}) = \{\underline{a_-(b(a))^{m-1}(b(a))_+}, \underline{a_-b(a)_+a^{n-1}}; n, m \in \mathbb{N}\}$$

$$A_{n+1}^2(\underline{a}) = \{m(a_1, a_2); \underline{a_1} < \underline{a_2} \text{ son sucesiones consecutivas en } A_n^2(\underline{a})\} \cup A_n^2(\underline{a})$$

$$A_\infty^2(\underline{a}) = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n^2(\underline{a}) \text{ y } A_\infty^2 = \bigcup_{\underline{a} \in A_\infty^1} A_\infty^2(\underline{a}) \cup A_\infty^1$$

Luego, del mismo modo podemos definir A_∞^{n+1} y $A_\infty^\infty = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_\infty^n$

Observation 1.0.9. Existen sucesiones minimales $\underline{a} \in \text{Min}_2$ tal que $\underline{a} \notin A_\infty^\infty$.

Por ejemplo $\underline{a} = \underline{00111}, \underline{a} = \underline{000111}, \underline{a} = \underline{001011011}$.

Lemma 1.0.10. 1. Para todo $a \in A_\infty^\infty$, $c \in [a_-b_+a, \underline{a}]$ se tiene que $\chi(c) = b_+a$

2. Para todo $a \in A_\infty$ se tiene que $\chi(a\underline{b}) = b_+a\underline{b}$

Proof. La función χ satisfice:

1. Si $a < \underline{001}$; $\chi(a) = \sigma \circ T_{0,01} \circ \chi \circ T_{0,01}^*(a)$
2. Si $\underline{001} \leq a \leq \underline{001101}$; $\chi(a) = 1T_{01,10} \circ \chi \circ T_{01,10}^*(\sigma(a))$
3. Si $\underline{001101} \leq a \leq \underline{01}$; $\chi(a) = \underline{1101}$
4. Si $\underline{01} < a \leq \underline{01}$; $\chi(a) = T_{10,1} \circ \chi \circ T_{10,1}^*(a)$

Primero probaremos el lema para $a \in A_0$

Si $a = \underline{01}$, entonces $\underline{001101} \leq c \leq \underline{01}$ y $\chi(c) = \underline{1101} = b_+a$

Si $a = \underline{001}$, entonces $\underline{000101001} \leq c \leq \underline{001}$, así

$$T_{0,01}^*(\underline{000101001}) \leq T_{0,01}^*(c) \leq T_{0,01}^*(\underline{001})$$

$$\Rightarrow \underline{001101} \leq T_{0,01}^*(c) \leq \underline{01}$$

$$\Rightarrow \chi(c) = \sigma \circ T_{0,01} \circ \chi \circ T_{0,01}^*(c)$$

$$\Rightarrow \chi(c) = \sigma \circ T_{0,01}(\underline{1101}) = \sigma(\underline{0101001}) = \underline{101001} = b_+a$$

Supongamos que es válido para $a_1 = \underline{0_{n-1}1}$

Sea $a = \underline{0_n1}$, entonces

$$\underline{0_{n+1}10_{n-1}10_n1} \leq c \leq \underline{0_n1}$$

$$\Rightarrow T_{0,01}^*(\underline{0_{n+1}10_{n-1}10_n1}) \leq T_{0,01}^*(c) \leq T_{0,01}^*(\underline{0_n1})$$

$$\Rightarrow \underline{0_n10_{n-2}10_{n-1}1} \leq T_{0,01}^*(c) \leq \underline{0_{n-1}1}$$

$$\Rightarrow \chi(T_{0,01}^*(c)) = \underline{10_{n-2}10_{n-1}1}. \text{ Así}$$

$$\begin{aligned} \chi(c) &= \sigma \circ T_{0,01} \circ \chi \circ T_{0,01}^*(c) \\ &= \sigma \circ T_{0,01}(\underline{10_{n-2}10_{n-1}1}) \\ &= \sigma(\underline{010_{n-2}010_{n-1}01}) \\ &= \underline{10_{n-1}10_n1} \\ &= b_+a \end{aligned}$$

Análogo para $a = \underline{01_n}$

Así el resultado es válido para todo $a \in A_0$

Demostremoslo ahora para $a \in A_1$

Si $a \in A_1$ entonces $a \in A_0$ o $a = m(a_1, a_2); a_1, a_2 \in A_0$

Si $a \in A_0$ el resultado está probado.

Entonces supongamos que $a = m(a_1, a_2); a_1, a_2 \in A_0$

Supongamos que $a = \underline{00101}$, entonces

$$0010010101\underline{00101} \leq c \leq \underline{00101}$$

$$\Rightarrow T_{0,01}^* (0010010101\underline{00101}) \leq T_{0,01}^* (c) \leq T_{0,01}^* (\underline{00101})$$

$$\Rightarrow 010111\underline{011} \leq T_{0,01}^* (c) \leq \underline{011}$$

$$\Rightarrow \chi(T_{0,01}^* (c)) = 111\underline{011}$$

Así

$$\begin{aligned} \chi(c) &= \sigma \circ T_{0,01} \circ \chi \circ T_{0,01}^* (c) \\ &= \sigma \circ T_{0,01} (111\underline{011}) \\ &= \sigma (010101\underline{00101}) = 10101\underline{00101} \\ &= b_{+\underline{a}} \end{aligned}$$

Supongamos que es válido para $a_1 = \underline{0_n 10_{n-1} 1}$.

Sea $a = \underline{0_{n+1} 10_n 1}$, entonces tenemos que

$$0_{n+1} 10_{n+1} 10_n 10_n \underline{0_{n+1} 10_n 1} \leq c \leq \underline{0_{n+1} 10_n 1}$$

Entonces

$$T_{0,01}^* \left(0_{n+1} 10_{n+1} 10_n 10_n \underline{0_{n+1} 10_n 1} \right) \leq T_{0,01}^* (c) \leq T_{0,01}^* \left(\underline{0_{n+1} 10_n 1} \right)$$

$$\Rightarrow 0_n 10_n 10_{n-1} 10_{n-1} \underline{0_n 10_{n-1} 1} \leq T_{0,01}^* (c) \leq \underline{0_n 10_{n-1} 1}$$

Así

$$\chi(T_{0,01}^* (c)) = 10_{n-1} 10_{n-1} \underline{0_n 10_{n-1} 1}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \chi(c) &= \sigma \circ T_{0,01} \circ \chi \circ T_{0,01}^* (c) \\ &= \sigma \circ T_{0,01} \left(10_{n-1} 10_{n-1} \underline{0_n 10_{n-1} 1} \right) \\ &= \sigma \left(010_{n-1} 010_{n-1} \underline{010_n 010_{n-1} 01} \right) \\ &= 10_n 10_n \underline{0_{n+1} 10_n 1} \\ &= b_{+\underline{a}} \end{aligned}$$

La demostración es análoga para $a = \underline{01_n 01_{n+1}}$.

Así el resultado es válido para todo $a \in A_1$.

Supongamoslo válido para todo $a \in A_n$

Si $a \in A_{n+1}$, entonces $a \in A_n$ o $a = \underline{(a_1)^{n+1}a_2}$ o $a = \underline{(a_1)^n a_2 (a_1)^{n-1} a_2}$
o $a = \underline{(a_1)^{n-1} a_2 (a_1)^{n-1} a_2 (a_1)^{n-2} a_2}$ o $a = \underline{(a_1)^{n-1} a_2 (a_1)^{n-2} a_2 (a_1)^{n-2} a_2}$, etc. donde a_1 y
 a_2 son los períodos de sucesiones consecutivas en A_0

Si $a \in A_n$ el resultado esta listo.

Sea $a = \underline{(a_1)^{n+1}a_2}$

Primero supongamos que $a = \underline{(001)^{n+1}01}$

Para demostrar el resultado para a primero observemos que

Si $a_0 = \underline{(01)^{n+1}1} = \underline{(01)^n 011} \in A_n$ entonces $\chi(c) = 11(01)^n 1 \underline{(01)^{n+1}1}$, donde

$$\underline{(01)^{n+1}011(01)^n 1 \underline{(01)^{n+1}1}} \leq c \leq \underline{(01)^{n+1}1}$$

Si $a = \underline{(001)^{n+1}01}$, entonces $\underline{(001)^{n+1}0010(100)^n 101(001)^{n+1}01} \leq c \leq \underline{(001)^{n+1}01}$

$$\Rightarrow T_{0,01}^* \left(\underline{(001)^{n+1}0010(100)^n 101(001)^{n+1}01} \right) \leq T_{0,01}^*(c) \leq T_{0,01}^* \left(\underline{(001)^{n+1}01} \right)$$

$$\Rightarrow \underline{(01)^{n+1}011(01)^{n-1}011(01)^{n+1}1} \leq T_{0,01}^*(c) \leq \underline{(01)^{n+1}1}$$

$$\Rightarrow \chi(T_{0,01}^*(c)) = 11(01)^n 1 \underline{(01)^{n+1}1}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \chi(c) &= \sigma \circ T_{0,01} \circ \chi \circ T_{0,01}^*(c) \\ &= \sigma \circ T_{0,01} \left(11(01)^n 1 \underline{(01)^{n+1}1} \right) \\ &= \sigma \left(0101(001)^n 01 \underline{(001)^{n+1}01} \right) \\ &= 101(001)^n 01 \underline{(001)^{n+1}01} \\ &= b_+ \underline{a} \end{aligned}$$

Ahora supongamos que el resultado es válido para $\underline{(0_m 1)^{n+1}(0_{m-1} 1)}$

Sea $a = \underline{(0_{m+1} 1)^{n+1}(0_m 1)}$, entonces

$$\underline{(0_{m+1} 1)^{n+1}0_{m+1} 10_m 1(0_{m+1} 1)^n 0_m 1(0_{m+1} 1)^{n+1}0_m 1} \leq c \leq \underline{(0_{m+1} 1)^{n+1}0_m 1}$$

$$\Rightarrow T_{0,01}^* \left(\underline{(0_{m+1} 1)^{n+1}0_{m+1} 10_m 1(0_{m+1} 1)^n 0_m 1(0_{m+1} 1)^{n+1}0_m 1} \right) \leq T_{0,01}^*(c) \leq$$

$$\leq T_{0,01}^* \left(\underline{(0_{m+1} 1)^{n+1}0_m 1} \right)$$

$$\Rightarrow \underline{(0_m 1)^{n+1}0_m 10_{m-1} 1(0_m 1)^n 0_{m-1} 1(0_m 1)^{n+1}0_{m-1} 1} \leq T_{0,01}^*(c) \leq \underline{(0_m 1)^{n+1}0_{m-1} 1}$$

$$\Rightarrow \chi(T_{0,01}^*(c)) = 10_{m-1} 1(0_m 1)^n 0_{m-1} 1 \underline{(0_m 1)^{n+1}0_{m-1} 1}$$

Así

$$\begin{aligned}
\chi(c) &= \sigma \circ T_{0,01} \circ \chi \circ T_{0,01}^*(c) \\
&= \sigma \circ T_{0,01} \left(10_{m-1}1(0_m1)^n 0_{m-1}1 \underline{(0_m1)^{n+1}0_{m-1}1} \right) \\
&= \sigma \left(010_{m-1}01(0_m01)^n 0_{m-1}01 \underline{(0_m01)^{n+1}0_{m-1}01} \right) \\
&= 10_m1(0_{m+1}1)^n 0_m1 \underline{(0_{m+1}1)^{n+1}0_m1} \\
&= b_{+\underline{a}}
\end{aligned}$$

De manera análoga se prueba si $a = \underline{(01_m)^{n+1}01_{m+1}}$

Ahora supongamos que $a = \underline{(a_1)^n a_2 (a_1)^{n-1} a_2}$

Primero supongamos que $a = \underline{(001)^n 01 (001)^{n-1} 01}$, así

$$\begin{aligned}
&(001)^n 01 (001)^{n-1} 00101 (001)^{n-1} 01 (001)^{n-1} 01 \underline{(001)^n 01 (001)^{n-1} 01} \leq c \leq \\
&\leq \underline{(001)^n 01 (001)^{n-1} 01} \\
&\Rightarrow T_{0,01}^* \left(\underline{(001)^n 01 (001)^{n-1} 00101 (001)^{n-1} 01 (001)^{n-1} 01 (001)^n 01 (001)^{n-1} 01} \right) \leq \\
&\leq T_{0,01}^*(c) \leq T_{0,01}^* \left(\underline{(001)^n 01 (001)^{n-1} 01} \right) \\
&\Rightarrow (01)^n 1 (01)^{n-1} 011 (01)^{n-1} 1 (01)^{n-1} 1 \underline{(01)^n 1 (01)^{n-1} 1} \leq T_{0,01}^*(c) \leq \underline{(01)^n 1 (01)^{n-1} 1} \\
&\Rightarrow (01)^n 1 (01)^{n-1} 011 (01)^{n-1} 1 (01)^{n-1} 1 \underline{(01)^n 1 (01)^{n-1} 1} \leq T_{0,01}^*(c) \leq \underline{(01)^{n-1} 011 (01)^{n-2} 011} \\
&\Rightarrow \chi(T_{0,01}^*(c)) = 11(01)^{n-1} 1 (01)^{n-1} 1 \underline{(01)^n 1 (01)^{n-1} 1}
\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\chi(c) &= \sigma \circ T_{0,01} \circ \chi \circ T_{0,01}^*(c) \\
&= \sigma \circ T_{0,01} \left(11(01)^{n-1} 1 (01)^{n-1} 1 \underline{(01)^n 1 (01)^{n-1} 1} \right) \\
&= \sigma \left(0101(001)^{n-1} 01 (001)^{n-1} 01 \underline{(001)^n 01 (001)^{n-1} 01} \right) \\
&= 101(001)^{n-1} 01 (001)^{n-1} 01 \underline{(001)^n 01 (001)^{n-1} 01} \\
&= b_{+\underline{a}}
\end{aligned}$$

Inductivamente supongamos que $a = \underline{(0_{m+1}1)^n 0_m 1 (0_{m+1}1)^{n-1} 0_m 1}$, entonces

$$\begin{aligned}
&(0_{m+1}1)^n 0_m 1 (0_{m+1}1)^{n-1} 0_{m+1} 1 0_m 1 (0_{m+1}1)^{n-1} 0_m 1 (0_{m+1}1)^{n-1} 0_m 1 \\
&\underline{(0_{m+1}1)^n 0_m 1 (0_{m+1}1)^{n-1} 0_m 1} \leq c \leq \underline{(0_{m+1}1)^n 0_m 1 (0_{m+1}1)^{n-1} 0_m 1}
\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
&T_{0,01}^* \left(\underline{(0_{m+1}1)^n 0_m 1 (0_{m+1}1)^{n-1} 0_{m+1} 1 0_m 1 (0_{m+1}1)^{n-1} 0_m 1 (0_{m+1}1)^{n-1} 0_m 1} \right) \\
&\underline{(0_{m+1}1)^n 0_m 1 (0_{m+1}1)^{n-1} 0_m 1} \leq T_{0,01}^*(c) \leq T_{0,01}^* \left(\underline{(0_{m+1}1)^n 0_m 1 (0_{m+1}1)^{n-1} 0_m 1} \right) \\
&\Rightarrow (0_m 1)^n 0_{m-1} 1 (0_m 1)^{n-1} 0_m 1 0_{m-1} 1 (0_m 1)^{n-1} 0_{m-1} 1 (0_m 1)^{n-1} 0_{m-1} 1 \\
&\underline{(0_m 1)^n 0_{m-1} 1 (0_m 1)^{n-1} 0_{m-1} 1} \leq T_{0,01}^*(c) \leq \underline{(0_m 1)^n 0_{m-1} 1 (0_m 1)^{n-1} 0_{m-1} 1}
\end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned}
\sigma \circ T_{0,01} \circ \chi \circ T_{0,01}^*(c) &= \\
&= \sigma \circ T_{0,01} \left(10_{m-1}1(0_m1)^{n-1}0_{m-1}1(0_m1)^{n-1}0_{m-1}\underline{(0_m1)^n0_{m-1}1(0_m1)^{n-1}0_{m-1}1} \right) \\
&= \sigma \left(010_m1(0_{m+1}1)^{n-1}0_m1(0_{m+1}1)^{n-1}0_m1\underline{(0_{m+1}1)^n0_m1(0_{m+1}1)^{n-1}0_m1} \right) \\
&= 10_m1(0_{m+1}1)^{n-1}0_m1(0_{m+1}1)^{n-1}0_m1\underline{(0_{m+1}1)^n0_m1(0_{m+1}1)^{n-1}0_m1} \\
&= b_+a
\end{aligned}$$

Análogo si $a = \underline{(01_m)^n01_{m+1}(01_m)^{n-1}01_{m+1}}$ Sucesivamente se prueba para cualquier $a \in A_{n+1}$. Así para $a \in A_\infty$ se tiene que si $c \in [a_-, b_+a, a]$ entonces $\chi(c) = b_+a$.

Probemos el resultado para A_1^1

Sea $a_0 = \underline{01}$ y $a = \underline{a_-}b_+ = \underline{0011}$

Así tenemos que

$$\begin{aligned}
00101101\underline{0011} &\leq c \leq \underline{0011} \\
\Rightarrow 0101101\underline{0011} &\leq \sigma(c) \leq \underline{0110} \\
\Rightarrow T_{01,10}^*(0101101\underline{0011}) &\leq T_{01,10}^*(\sigma(c)) \leq T_{01,10}^*(\underline{0110}) \\
\Rightarrow 0011\underline{01} &\leq T_{01,10}^*(\sigma(c)) \leq T_{01,10}^*\underline{01}
\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\chi(c) &= 1T_{01,10} \circ \chi \circ T_{01,10}^*(\sigma(c)) \\
&= 1T_{01,10} (11\underline{01}) \\
&= 110100\underline{110} \\
&= 1101\underline{0011} \\
&= (b(0011))_+ \underline{0011} \\
&= b_+a
\end{aligned}$$

Si $a = \underline{(a_0)_-}b_0(b_0)_+ = \underline{001011}$, entonces

$$\begin{aligned}
001010110011\underline{001011} &\leq c \leq \underline{001011} \\
\Rightarrow 01010110011\underline{001011} &\leq \sigma(c) \leq \underline{010110} \\
\Rightarrow T_{01,10}^*(01010110011\underline{001011}) &\leq T_{01,10}^*(\sigma(c)) \leq T_{01,10}^*(\underline{010110}) \\
\Rightarrow 000101\underline{001} &\leq T_{01,10}^*(\sigma(c)) \leq \underline{001}
\end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned}
\chi(c) &= 1T_{01,10} \circ \chi \circ T_{01,10}^*(\sigma(c)) \\
&= 1T_{01,10} (101\underline{001}) \\
&= 11001100\underline{10110} \\
&= 110011\underline{001011} \\
&= b_+ \underline{a}
\end{aligned}$$

Ahora Sea $a = (a_0)_-(b_0)^n(b_0)_+ = \underline{00(10)^n11}$, entonces,

$$\begin{aligned}
&00(10)^n101100(10)^{n-1}1\underline{100(10)^n11} \leq c \leq \underline{00(10)^n11} \\
&\Rightarrow 0(10)^n101100(10)^{n-1}1\underline{100(10)^n11} \leq \sigma(c) \leq \underline{0(10)^n110} \\
&\Rightarrow T_{01,10}^* \left(0(10)^n101100(10)^{n-1}1\underline{100(10)^n11} \right) \leq T_{01,10}^*(\sigma(c)) \leq T_{01,10}^* \left(\underline{0(10)^n110} \right) \\
&\Rightarrow 0^{n+2}10^n\underline{10^{n+1}1} \leq T_{01,10}^*(\sigma(c)) \leq \underline{0^{n+1}1}
\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\chi(c) &= 1T_{01,10} \circ \chi \circ T_{01,10}^*(\sigma(c)) \\
&= 1T_{01,10} (10^n\underline{10^{n+1}1}) \\
&= 110(01)^n10\underline{(01)^{n+1}10} \\
&= 1100(10)^{n-1}1\underline{100(10)^n11} \\
&= b_+ \underline{a}
\end{aligned}$$

Supongamos que el resultado es válido para $\underline{(a_1)_-(b_1)^m(b_1)_+}$, donde $a_1 = \underline{0_{n-1}1}$. Demostremoslo para $a = \underline{(a_0)_-(b_0)^m(b_0)_+}$, donde $a_0 = \underline{0_n1}$, así tenemos que

$$\begin{aligned}
&0_{n+1}(10_n)^m10_n10_{n-1}10_{n+1}(10_n)^{m-1}10_{n-1}\underline{10_{n+1}(10_n)^m10_{n-1}1} \leq c \leq \underline{0_{n+1}(10_n)^m10_{n-1}1} \\
&\Rightarrow T_{0,01}^* \left(0_{n+1}(10_n)^m10_n10_{n-1}10_{n+1}(10_n)^{m-1}10_{n-1}\underline{10_{n+1}(10_n)^m10_{n-1}1} \right) \leq T_{0,01}^*(c) \leq \\
&\leq T_{0,01}^* \left(\underline{0_{n+1}(10_n)^m10_{n-1}1} \right) \\
&\Rightarrow 0_n1(0_{n-1}1)^{m-1}0_{n-1}10_{n-1}10_{n-2}10_n1(0_{n-1}1)^{m-2}0_{n-1}10_{n-2}\underline{10_n1(0_{n-1}1)^{m-1}10_{n-1}10_{n-2}1} \\
&\leq T_{0,01}^*(c) \leq \underline{0_n1(0_{n-1}1)^{m-1}0_{n-1}10_{n-2}1}
\end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned}
\chi(c) &= \sigma \circ T_{0,01} \circ \chi \circ T_{0,01}^*(c) \\
&= \sigma \circ T_{0,01} \left(10_{n-2}10_n1(0_{n-1}1)^{m-1}0_{n-2}\underline{10_n1(0_{n-1}1)^m0_{n-2}1} \right) \\
&= \sigma \left(010_{n-1}10_{n+1}1(0_n1)^{m-1}0_{n-1}\underline{10_{n+1}1(0_n1)^m0_{n-1}1} \right) \\
&= 10_{n-1}10_{n+1}1(0_n1)^{m-1}0_{n-1}\underline{10_{n+1}1(0_n1)^m0_{n-1}1} \\
&= b_+ \underline{a}
\end{aligned}$$

y continuamos inductivamente para A_∞^∞ .

La demostración de la segunda parte de este lema 1.0.10 es análoga a la de la parte

Observation 1.0.11. Si ocurre que $d \in Max_2$ es tal que $d > b_+ \underline{a}$ y $c \in [a_- b_+ \underline{a}, \underline{a}]$

entonces $h_{top}(c, d) = h_{top}(\sigma |_{\bigcap_{j=0}^{\infty} \sigma^{-j}([c, d])}) > 0$

Asímismo, si $c < a_- b_+ \underline{a}$, entonces existe n tal que $c < \alpha_n = \underline{a_- b_+ a_n} < a_- b_+ \underline{a}$ y

$\chi(c) \leq \chi(\underline{a_- b_+ a_n}) = \chi(\alpha_n) = (\beta_n)_+ \underline{\alpha_n} = (b_+ a_{n+1})_+ \underline{a_- b_+ a_n} < b_+ \underline{a} = \chi(a_- b_+ \underline{a})$.

Así $\Lambda[\underline{a_- b_+ a_n}, \chi(\underline{a_- b_+ a_n})] \subset int(\Lambda[c, b_+ \underline{a}])$ y por lo tanto

$h_{top}(c, b_+ \underline{a}) = h_{top}(\sigma |_{\bigcap_{j=0}^{\infty} \sigma^{-j}([c, b_+ \underline{a}]})} > 0$.

En particular, si ocurre que $b_+ \underline{a} < d$ y $c < a_- b_+ \underline{a}$ entonces $h_{top}(c, d) > 0$.

De la misma manera podemos verificar que si $\underline{b} \leq d \leq b_+ a_- \underline{b}$ y $c < a_- \underline{b}$ entonces

$h_{top}(c, d) > 0$ y para $b_+ a_- \underline{b} \leq d$ se tiene que $h_{top}(a_- \underline{b}, d) > 0$.

Ya que $a_- \underline{b} < a_- b_+ \underline{a}$, entonces $h_{top}(a_- \underline{b}, b_+ \underline{a}) > 0$ para cada $a \in A_{\infty}^{\infty}$.

Sea $\underline{a} \in \Sigma_0$ una sucesión minimal periódica y $\underline{d} \in \Sigma_1$ una sucesión maximal periódica

tal que $\underline{a} \leq a(\underline{d}) \leq b(\underline{a}) \leq \underline{d}$. Asociada al par $(\underline{a}, \underline{d}) \in Min_2 \times Max_2$ definimos la

(a, d) -gorgona de la siguiente manera:

$$A_0(\underline{a}, \underline{d}) = \{\underline{a_- d^n d_+}, \underline{a_- d_+ a^n}; n, m \in \mathbb{N}_0\}$$

$$A_{n+1}(\underline{a}, \underline{d}) = \{m(a_1, a_2), \underline{a_1} < \underline{a_2} \text{ son sucesiones consecutivas en } A_n(\underline{a}, \underline{d})\} \cup A_n(\underline{a}, \underline{d});$$

$$n \geq 0$$

$$A_{\infty}^0(\underline{a}, \underline{d}) = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n(\underline{a}, \underline{d})$$

$$A_0^1(\underline{\alpha}) = \{\underline{\alpha_- b(\alpha)^n b(\alpha)_+}, \underline{\alpha_- b(\alpha)_+ \alpha^n}, n, m \in \mathbb{N}_0\}$$

$$A_{n+1}^1(\underline{\alpha}) = \{m(a_1, a_2); \underline{a_1} < \underline{a_2} \in A_n^1(\underline{\alpha}) \text{ son sucesiones consecutivas}\} \cup A_n^1(\underline{\alpha})$$

$$A_{\infty}^1(\underline{\alpha}) = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n^1(\underline{\alpha}) \text{ y } A_{\infty}^1(\underline{a}, \underline{d}) = \bigcup_{\underline{\alpha} \in A_{\infty}^0(\underline{a}, \underline{d})} A_{\infty}^1(\underline{\alpha}) \cup A_{\infty}^0(\underline{a}, \underline{d})$$

Ahora, para $\underline{\alpha} \in A_{\infty}^1(\underline{a}, \underline{d})$ definimos $A_0^2(\underline{\alpha}), A_1^2(\underline{\alpha}), \dots, A_{\infty}^2(\underline{\alpha})$ como antes y

$$A_{\infty}^2(\underline{a}, \underline{d}) = \bigcup_{\underline{\alpha} \in A_{\infty}^1(\underline{a}, \underline{d})} A_{\infty}^2(\underline{\alpha}) \cup A_{\infty}^1(\underline{a}, \underline{d}).$$

Y sucesivamente para $\underline{\alpha} \in A_{\infty}^n(\underline{a}, \underline{d})$ definimos $A_0^{n+1}(\underline{\alpha}), A_1^{n+1}(\underline{\alpha}), \dots, A_{\infty}^{n+1}(\underline{\alpha})$ y

$$A_{\infty}^{n+1}(\underline{a}, \underline{d}) = \bigcup_{\underline{\alpha} \in A_{\infty}^n(\underline{a}, \underline{d})} A_{\infty}^{n+1}(\underline{\alpha}) \cup A_{\infty}^n(\underline{a}, \underline{d}).$$

La (a, d) -gorgona es el conjunto:

$$A_\infty^\infty(\underline{a}, \underline{d}) = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_\infty^n(\underline{a}, \underline{d})$$

Observemos que la (a, d) -gorgona esta formada sólo por órbitas periodicas minimales (ver [24]).

Chapter 2

Burbujas de Entropía Constante

Lemma 2.0.12. Para todo $\underline{a} \in A_0$, $h_{top}(\sigma|_{\Sigma[\underline{a}, b(\underline{a})]}) = 0$

Proof. Probaremos que $\chi(\underline{a}) = b(\underline{a})_{+\underline{a}}$.

Para $\underline{a} = \underline{01}$, $\chi(\underline{01}) = \underline{110} = \underline{1101} = b(\underline{a})_{+\underline{a}}$.

Asumamos que el resultado es valido para $\underline{a} = \underline{0^n 1}$ y lo probaremos para $\underline{a} = \underline{0^{n+1} 1}$

Por teorema 1.0.6 tenemos que

$$\begin{aligned}\chi(\underline{a}) &= \sigma \circ T_{0,01} \circ \chi \circ T_{0,01}^*(\underline{a}) \\ &= \sigma \circ T_{0,01} \circ \chi(\underline{0^n 1}) \\ &= \sigma \circ T_{0,01}(10^{n-1} \underline{10^n 1}) \\ &= \sigma(010^{n-1} 0 \underline{10^n 01}) \\ &= \underline{10^n 10^{n+1} 1} \\ &= b(\underline{0^{n+1} 1})_{+\underline{a}}\end{aligned}$$

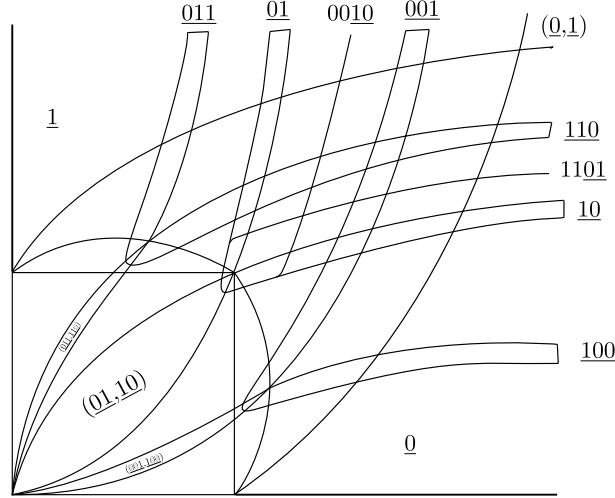
Análogo para $\underline{a} = \underline{01^n}$

Así $b(\underline{a}) < b(\underline{a})_{+\underline{a}}$ para todo $\underline{a} \in A_0$, luego $h_{top}(\sigma|_{\Sigma[\underline{a}, b(\underline{a})]}) = 0$. □

Lemma 2.0.13. Para todo $\underline{a} \in A_{n+1}$, $h_{top}(\sigma|_{\Sigma[\underline{a}, b(\underline{a})]}) = 0$

Proof. La demostración es similar a la del lema 2.0.12, para todo $\underline{a} \in A_{n+1}$, $\chi(\underline{a}) = b(\underline{a}) + \underline{a}$ como $b(\underline{a}) < b(\underline{a}) + \underline{a}$ se obtiene el resultado. \square

Corollary 2.0.14. Para todo $\underline{a} \in \overline{A}_\infty$, $h_{top}(\sigma|_{\Sigma[\underline{a}, b(\underline{a})]}) = 0$



Lemma 2.0.15. Para todo $\underline{a} \in A_\infty$ y $\underline{\alpha} \in A_\infty(\underline{a})$ tenemos $h_{top}(\sigma|_{\Sigma[\underline{\alpha}, b(\underline{\alpha})]}) = 0$

Proof. La demostración, como en los casos anteriores, consiste en probar que $\chi(\underline{\alpha}) = b(\underline{\alpha}) + \underline{\alpha}$ para todo $\underline{\alpha} \in A_\infty(\underline{a})$ y del hecho que $b(\underline{\alpha}) < b(\underline{\alpha}) + \underline{\alpha}$. \square

Observation 2.0.16. 1. Para todo $\underline{a} \in A_\infty^\infty$ y $\underline{\alpha}$ tal que $\underline{a} - \underline{b} + \underline{a} \leq \underline{\alpha} \leq \underline{a}$ tenemos que $\chi(\underline{\alpha}) = b(\underline{a}) + \underline{a} = \chi(\underline{a})$

2. Para $a \in A_\infty^\infty$ y $b = b(a) = \sup\{\sigma^i(a); i \in \mathbb{N}_0\}$ se cumple que $b < \chi(a)$ y por lo tanto $h_{top}(\sigma|_{\Sigma[a, b]}) = 0$

2.1 Theorem A

Theorem 2.1.1. (Theorem A)

For any $\underline{\alpha} \in A_\infty^\infty(\underline{a}, \underline{d})$ we have that

$$h_{top}(\sigma|_{\Sigma[\underline{\alpha}, b(\underline{\alpha})]}) = h_{top}(\sigma|_{\Sigma[\underline{a}, \underline{d}]})$$

An **end** of the (a, d) -gorgona is a sequence $\alpha \in \text{Min}_2$ such that there is a sequence $(\alpha_n) \subset A_\infty^\infty(\underline{a}, \underline{d})$ such that $\lim \alpha_n = \alpha$. Let us denote by $\text{End}(\underline{a}, \underline{d})$ the set $\{\alpha \in \text{Min}_2; \alpha \text{ is an end of the } (a, d)\text{-gorgona}\}$.

Using the continuity of the topological entropy in the lexicographical world (see [18]) we have the following Corollary

Corollary 2.1.2. *For any $\underline{\alpha} \in \text{End}(\underline{a}, \underline{d})$ we have that*

$$h_{\text{top}}(\sigma|_{\Sigma[\underline{\alpha}, b(\underline{\alpha})]}) = h_{\text{top}}(\sigma|_{\Sigma[\underline{a}, \underline{d}]})$$

It is clear that the (a, d) -gorgona has a non countable quantity of ends. For instance, if we define the $(\text{period}(a) + \text{period}(d))$ -doubling sequence $\alpha_n \in A_\infty^\infty(\underline{a}, \underline{d})$, as: $\alpha_1 = \underline{a}_- \underline{d}_+$, $\beta_1 = \underline{d}_+ \underline{a}_-$; $\alpha_{n+1} = (\alpha_n)_- (\beta_n)_+$, $\beta_{n+1} = (\beta_n)_+ (\alpha_n)_-$ then the sequence (α_n, β_n) converges to the $(\text{period}(a) + \text{period}(d))$ -doubling period limit $(\overline{\alpha}, \overline{\beta})$ defined by $\overline{\alpha} = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n$ and $\overline{\beta} = \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = b(\overline{\alpha})$. Our results imply that $h_{\text{top}}(\overline{\alpha}, \overline{\beta}) = h_{\text{top}}(\underline{a}, \underline{d})$.

A consequence of the Corollary 2.1.2, that we want to fix, is the following

Corollary 2.1.3.

$$h_{\text{top}}(\underline{a}, \underline{d}) = h_{\text{top}}(\underline{a}, \underline{d}_+ \underline{a}) = h_{\text{top}}(\underline{a}_- \underline{d}, \underline{d}) = h_{\text{top}}(\underline{a}_- \underline{d}_+ \underline{a}, \underline{d}_+ \underline{a}) = h_{\text{top}}(\underline{a}_- \underline{d}, \underline{d}_+ \underline{a}_- \underline{d}).$$

(Here $h_{\text{top}}(\alpha, \beta) = h_{\text{top}}(\sigma|_{\Sigma[\alpha, \beta]})$)

Let us denote

$$B_1(\underline{a}, \underline{d}) = \{(\alpha, \beta) \in \Sigma_0 \times \Sigma_1; \underline{a}_- \underline{d}_+ \underline{a} \leq \alpha \leq \underline{a} \text{ and } \underline{d} \leq \beta \leq \underline{d}_+ \underline{a}_- \underline{d}\}$$

$$B_2(\underline{a}, \underline{d}) = \{(\alpha, \beta) \in \Sigma_0 \times \Sigma_1; \underline{a}_- \underline{d}_+ \underline{a} \leq \alpha \leq \underline{a} \text{ and } \underline{d}_+ \underline{a}_- \underline{d} \leq \beta \leq \underline{d}_+ \underline{a}\}$$

and

$$B_3(\underline{a}, \underline{d}) = \{(\alpha, \beta) \in \Sigma_0 \times \Sigma_1; \underline{a}_- \underline{d} \leq \alpha \leq \underline{a}_- \underline{d}_+ \underline{a} \text{ and } \underline{d} \leq \beta \leq \underline{d}_+ \underline{a}_- \underline{d}\}$$

As a consequence of corollaries 2.1.2 and 2.1.3 we obtain:

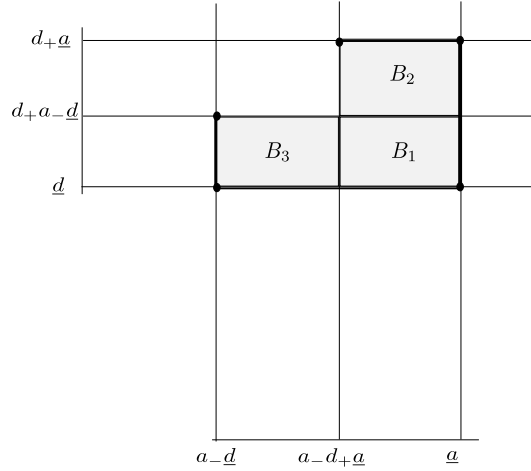
Corollary 2.1.4. *For all $(\alpha, \beta) \in B_1(\underline{a}, \underline{d}) \cup B_2(\underline{a}, \underline{d}) \cup B_3(\underline{a}, \underline{d})$ we have $h_{top}(\alpha, \beta) = h_{top}(\underline{a}, \underline{d})$*

We will call the set

$$B(\underline{a}, \underline{d}) = B_1(\underline{a}, \underline{d}) \cup B_2(\underline{a}, \underline{d}) \cup B_3(\underline{a}, \underline{d})$$

the *primary bubble* of constant entropy $h_{top}(\underline{a}, \underline{d})$.

See figure 1 for a geometric representation of $B(\underline{a}, \underline{d})$.



(figure 1)

Let us now consider any α in the (a, d) -gorgona. Let $\beta = b(\alpha)$. Define

$$B_1(\alpha, \beta) = \{(\nu, \mu) \in \Sigma_0 \times \Sigma_1; \alpha_- \beta_+ \underline{\alpha} \leq \nu \leq \underline{\alpha} \text{ and } \underline{\beta} \leq \mu \leq \beta_+ \alpha_- \underline{\beta}\},$$

$$B_2(\alpha, \beta) = \{(\nu, \mu) \in \Sigma_0 \times \Sigma_1; \alpha_- \beta_+ \underline{\alpha} \leq \nu \leq \underline{\alpha} \text{ and } \beta_+ \alpha_- \underline{\beta} \leq \mu \leq \beta_+ \underline{\alpha}\}$$

and

$$B_3(\alpha, \beta) = \{(\nu, \mu) \in \Sigma_0 \times \Sigma_1; \alpha_- \underline{\beta} \leq \nu \leq \alpha_- \beta_+ \underline{\alpha} \text{ and } \underline{\beta} \leq \mu \leq \beta_+ \alpha_- \underline{\beta}\}$$

We will call the set

$$B(\alpha, \beta) = B_1(\alpha, \beta) \cup B_2(\alpha, \beta) \cup B_3(\alpha, \beta)$$

a *secondary bubble* of constant entropy $h_{top}(\underline{a}, \underline{d})$.

Applying Theorem A, and the corollaries 2.1.2 and 2.1.3 to the pair (α, β) we have:

Corollary 2.1.5. *For any $(\nu, \mu) \in B(\alpha, \beta)$ we have that $h_{top}(\nu, \mu) = h_{top}(\underline{a}, \underline{d})$.*

It is clear that there are a countable quantity of secondary bubbles of constant entropy $h_{top}(\underline{a}, \underline{d})$. We will call the set

$$\mathcal{B}(\underline{a}, \underline{d}) = B(\underline{a}, \underline{d}) \cup \bigcup_{\alpha \in A_\infty(\underline{a}, \underline{d})} B(\alpha, \beta).$$

the *bubble* of constant entropy $h_{top}(\underline{a}, \underline{d})$. Here $\beta = b(\alpha)$.

Our next result is the following:

Theorem 2.1.6. (Theorem B) *Assume $\underline{a} \in \text{Min}_2 \cap \text{Per}(\sigma)$ and $\underline{c} \in \text{Max}_2 \cap \text{Per}(\sigma)$ are sequences such that $\underline{a} \leq a(\underline{c}) < b(\underline{a}) \leq \underline{c}$. Let $\underline{d} \in \text{Max}_2 \cap \text{Per}(\sigma)$ be any sequence such that $\underline{a} \leq a(\underline{d}) < \underline{c} < \underline{d}$ then $h_{top}(\underline{a}, \underline{d}) > h_{top}(\underline{a}, \underline{c})$.*

This result ensures that the line $L_{\underline{d}} = \{\alpha \in \Sigma_2; a_{-}\underline{d} \leq \alpha \leq \underline{a}\} \times \{\underline{d}\}$ is contained in the topological boundary of the main bubble $B(\underline{a}, \underline{d})$.

In fact, let $b = b(a)$ and $\underline{c}_n = \underline{d}^n b$. We have that $\underline{c}_n < \underline{c}_{n+1} < \dots < \underline{d}$,

$$h_{top}(\underline{a}, \underline{c}_n) < h_{top}(\underline{a}, \underline{d}), \lim_{n \rightarrow \infty} \underline{c}_n = \underline{d} \text{ and } \lim_{n \rightarrow \infty} h_{top}(\underline{a}, \underline{c}_n) = h_{top}(\underline{a}, \underline{d})$$

It is clear that for any $(\alpha, \underline{d}) \in L_{\underline{d}}$ we have that $(\alpha, \underline{c}_n) \rightarrow (\alpha, \underline{d})$, $n \rightarrow \infty$ and $h_{top}(\alpha, \underline{c}_n) \rightarrow h_{top}(\alpha, \underline{d}) = h_{top}(\underline{a}, \underline{d})$ as $n \rightarrow \infty$.

Let us now formulate the question: Why the main result is interesting from the bifurcation theory point of view?. To answer this question let us consider the quadratic family of Lorenz Maps $f_{\mu,\nu} : (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \rightarrow \mathbb{R}$ given by

$$f_{\mu,\nu}(x) = \begin{cases} -\mu + x^2, & x > 0, \\ \nu - x^2, & x < 0. \end{cases}$$

Let

$$A_0 = \{\underline{0^n 1}, \underline{01^n} : n \in \mathbb{N}\} = \{\dots, \underline{0001}, \underline{001}, \underline{01}, \underline{011}, \underline{0111}, \dots\};$$

and define

$$A_{n+1} = A_n \cup \{m(a_1, a_2) : a_1, a_2 \in A_n \text{ and } \underline{a_1} < \underline{a_2} \text{ are consecutives}\}$$

for any $n \geq 0$. Let $A_\infty = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$.

Denote by $a(\mu, \nu)$ the itinerary associated to $f_{\mu,\nu}(0^+)$. Let

$$\begin{aligned} IM &= \{(\mu, \nu) : \mu \geq 0, \nu \geq 0 \text{ and } f_{\mu,\nu}|_{[-\mu, \nu]} : [-\mu, \nu] \rightarrow [-\mu, \nu] \text{ is an injective map}\} \\ &= \{(\mu, \nu) : \mu \geq 0, \nu \geq 0 \text{ and } (\mu - \frac{1}{2})^2 + (\nu - \frac{1}{2})^2 \leq \frac{1}{2}\} \end{aligned}$$

For any $(\mu, \nu) \in IM$ we have $a(\mu, \nu) \in \overline{A_\infty}$ (see [19] and [?]). That is, elements in $\overline{A_\infty}$ are the first level in the bifurcation theory of the contracting Lorenz family.

The figure 2.1 displays the bifurcation curves associated to some $a \in A_\infty$ and $b = b(a) = \sup\{\sigma^i(a) : i \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ (see [19])

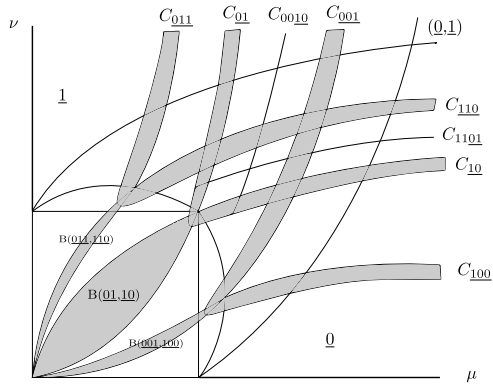


Figure 2.1:

Now, if we take $a \in A_\infty$, $b = b(a)$ and $A_\infty(a, b)$ then the curves $C_a = \{(\mu, \nu) : a(\mu, \nu) = a\}$ and $C_b = \{(\mu, \nu) : b(\mu, \nu) = b\}$ intersects in a point $(\mu(a, b), \nu(a, b)) \in IM$ such that $a(\mu(a, b), \nu(a, b)) = a$ and $b(\mu(a, b), \nu(a, b)) = b$.

Let us denote the bounded region limited by C_a and C_b as $B(a, b)$. We denote by $E(a, b)$ the unbounded region limited by C_a and C_b (see figure 2.2)

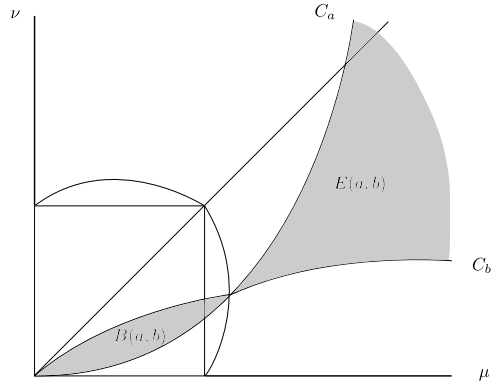


Figure 2.2: The regions $B(a, b)$ and $E(a, b)$ for $a \in A_\infty$

In the region $E(a, b)$ (see [19]) there is a region $IM(a, b) \subset E(a, b)$ formed by the parameters (μ, ν) such that the map $f_{\mu, \nu} : [-\mu, \nu] \setminus \{0\} \rightarrow [-\mu, \nu]$ is not injective but, there is a renormalization map $R(\mu, \nu)$ defined in some interval $J(\mu, \nu) \subset (-\mu, \nu)$ such that $R(\mu, \nu) : J(\mu, \nu) \rightarrow J(\mu, \nu)$ looks like an injective element in IM (see [19]).

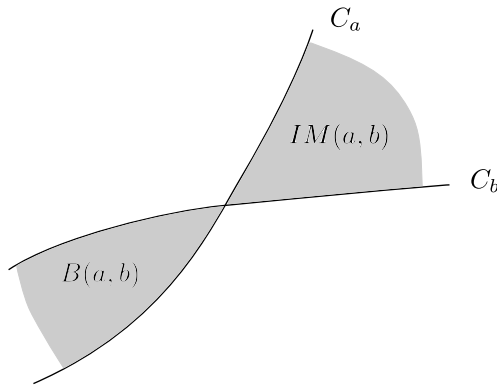


Figure 2.3:

Example: Let us take $a = \underline{01}$ and $b = b(a) = \underline{10}$. The curves $C_{\underline{01}} = \{(\mu, \nu) : a(\mu, \nu) = \underline{01}\}$ and $C_{\underline{10}} = \{(\mu, \nu) : b(\mu, \nu) = \underline{10}\}$ intersects at $(1, 1) \in C_{\underline{01}} \cap C_{\underline{10}}$. In this case $C_{\underline{01}} = \{(\mu, \nu) : \mu = \sqrt{\nu}\}$ and $C_{\underline{10}} = \{(\mu, \nu) : \nu = \sqrt{\mu}\}$.

The renormalization region for $(\underline{01}, \underline{10})$ is included in the region $\{(\mu, \nu) : \mu > \sqrt{\nu} \text{ and } \nu > \sqrt{\mu}\}$. See figure 2.4.

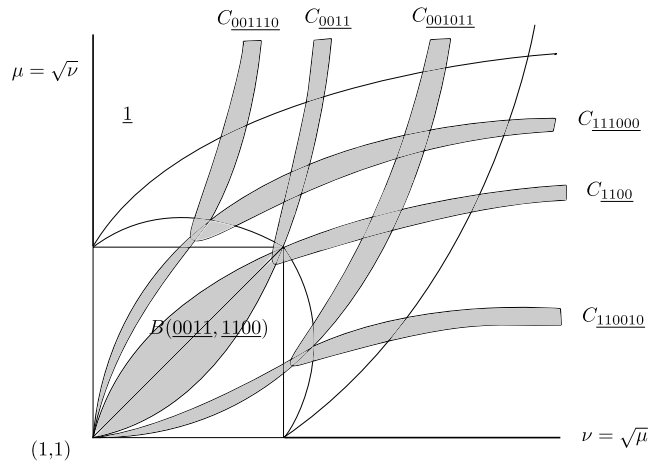


Figure 2.4:

Hence, our main result imply, for instance that for any $\alpha \in A_\infty$ and $\gamma \in A_\infty^\infty(\alpha, b(\alpha))$ we have $h_{top}(\gamma, b(\gamma)) = 0$. For instance for $\gamma = \underline{00101011}$, we have $b(\gamma) = \underline{11001010}$ and $h_{top}(\gamma, b(\gamma)) = 0$.

The same result applies in the case $\underline{a} = \underline{01}$ and $\underline{d} = \underline{110}$ and we obtain, as the reader

may verify for a direct computation, that:

$$\begin{aligned} h_{top}(\underline{001101111110011011100111}, \underline{1111110011011110011100110}) &= h_{top}(\underline{01}, \underline{110}) = \\ &= h_{top}(\underline{01}, \underline{110}) \approx \log(1, 32472). \end{aligned}$$

This result, together with the continuity of the topological entropy proved in [18], implies that, in the parameter space, the set $G(a, d) = \{(\mu, \nu) : a(\mu, \nu) = \alpha \in A_\infty(a, d); b(\mu, \nu) = \beta = \sup\{\sigma^i(\alpha) : i \in \mathbb{N}_0\}\}$ is contained in $\{(\mu, \nu) : h_{top}(\mu, \nu) = h_{top}(f_{(\mu, \nu)}) = h_{top}(a, d)\}$ and, therefore, is a bubble of constant entropy.

2.1.1 Proof of the Theorem A

Let us going to prove the result for $\underline{\alpha} \in A_0(\underline{a}, \underline{d}) = \{\underline{a_-d_+a^i}, \underline{a_-d^i d_+}; i \in \mathbb{N}_0\}$. That is, we must prove that $h_{top}(\underline{\alpha}, b(\underline{\alpha})) = h_{top}(\underline{a}, \underline{d})$, where $h_{top}(\underline{a}, \underline{d}) = h_{top}(\sigma|_{\Sigma[\underline{a}, \underline{d}]})$ and $h_{top}(\underline{\alpha}, b(\underline{\alpha})) = h_{top}(\sigma|_{\Sigma[\underline{\alpha}, b(\underline{\alpha})]})$.

Let us write $\underline{a} = \underline{0a_1a_2 \dots a_{n-2}1}$ and $\underline{d} = \underline{1d_1d_2 \dots d_{p-2}0}$, where $\underline{a} \leq a(\underline{d}) \leq b(\underline{a}) \leq \underline{d}$.

I) Let us start the proof with $\underline{\alpha} = \underline{a_-d_+}$.

Let $x \in \Sigma[\underline{a_-d_+}, \underline{d_+a_-}]$ be such that $x \notin \Sigma[\underline{a}, \underline{d}]$.

We have $\underline{a_-d_+} \leq \sigma^j(x) \leq \underline{d_+a_-}$ for all $j \in \mathbb{N}_0$ and there is $j_0 \in \mathbb{N}$ such that $\sigma^{j_0}(x) \notin [\underline{a}, \underline{d}]$, in this case we have:

$$\underline{a_-d_+} \leq \sigma^{j_0}(x) < \underline{a} \text{ or } \underline{d} < \sigma^{j_0}(x) \leq \underline{d_+a_-}.$$

Let us define

$$P_j = \{\theta_0\theta_1 \dots \theta_{j-1}; \theta_i \in \{0, 1\}, 0 \leq i \leq j-1\}$$

and

$$\begin{aligned} P_j([\underline{a_-d_+}, \underline{d_+a_-}]) &= \\ &= \{\theta \in P_j; \text{there is } x \in \Sigma[\underline{a_-d_+}, \underline{d_+a_-}] \text{ such that } x = \theta x_j x_{j+1} \dots\}. \end{aligned}$$

We observe that in P_j there are 2^j elements and that the set $P_j(\underline{a_-d_+}, \underline{d_+a_-})$ consists of all the elements in P_j which are allowed has the initial segments of elements in $\Sigma(\underline{a_-d_+}, \underline{d_+a_-})$.

It is clear that $P_\infty(\underline{a_-d_+}, \underline{d_+a_-}) := \bigcup_{j=1}^{\infty} P_j(\underline{a_-d_+}, \underline{d_+a_-})$ is a countable set.

Now, for any $x \in \Sigma(\underline{a_-d_+}, \underline{d_+a_-})$ such that $x \notin \Sigma(\underline{a}, \underline{d})$ we will find

$\theta \in \bigcup_{j=1}^{\infty} P_j(\underline{a_-d_+}, \underline{d_+a_-})$ such that $x = \theta\sigma^{|\theta|}(x)$ with $\underline{a_-d_+} \leq \sigma^{|\theta|}(x) < \underline{a}$ or $\underline{d} < \sigma^{|\theta|}(x) \leq \underline{d_+a_-}$ here $|\theta|$ = the length of the string θ .

So, without loss, let us assume that (1) $\underline{a_-d_+} \leq x < \underline{a}$ or (2) $\underline{d} < x \leq \underline{d_+a_-}$.

Case (1) $\underline{a_-d_+} \leq x < \underline{a}$ then we must have $x = 0a_1a_2 \dots a_{n-2}x_{n-1}x_n \dots$ and $\sigma^i(\underline{a_-d_+}) \leq \sigma^i(x) < \sigma^i(\underline{a})$; $1 \leq i \leq n-2$.

For $i = n-1$ we have $0\underline{d_+a_-} \leq \sigma^{n-1}(x) < 1\underline{a}$. Hence, we have two possibilities:

(1.1) $0\underline{d_+a_-} \leq \sigma^{n-1}(x) \leq 0\underline{1}$ or (1.2) $1\underline{0} \leq \sigma^{n-1}(x) < 1\underline{a}$.

Case (1.1) We have $x_{n-1} = 0$, and $\underline{d_+a_-} \leq \sigma^n(x) \leq \underline{d_+a_-}$ this imply $\sigma^n(x) = \underline{d_+a_-}$ and $x = a_- \underline{d_+a_-} = \underline{a_-d_+}$.

Case (1.2) We have $x_{n-1} = 1$ and $\underline{a_-d_+} \leq \sigma^n(x) < \underline{a}$ then $x = a\sigma^n(x)$ with $\underline{a_-d_+} \leq \sigma^n(x) < \underline{a}$.

Case (2) $\underline{d} < x \leq \underline{d_+a_-}$; $x \in \Sigma(\underline{a_-d_+}, \underline{d_+a_-})$.

We have $x = 1d_1d_2 \dots d_{p-2}x_{p-1}x_p \dots$; $\sigma^i(\underline{d}) < \sigma^i(x) \leq \sigma^i(\underline{d_+a_-})$; $1 \leq i \leq p-2$ and $\sigma^{p-1}(\underline{d}) < \sigma^{p-1}(x) \leq \sigma^{p-1}(\underline{d_+a_-})$ then $0\underline{d} < \sigma^{p-1}(x) \leq 1\underline{a_-d_+}$

So we have two possibilities

(2.1) $0\underline{d} < \sigma^{p-1}(x) \leq 0\underline{1}$ or (2.2) $1\underline{0} \leq \sigma^{p-1}(x) \leq 1\underline{a_-d_+}$

Case (2.1) We have $x_{p-1} = 0$ and $\underline{d} < \sigma^p(x) \leq \underline{d_+a_-}$ that is $x = d\sigma^p(x)$ with $\underline{d} < \sigma^p(x) \leq \underline{d_+a_-}$

Case (2.2) We have $x_{p-1} = 1$ and $\underline{a_-d_+} \leq \sigma^p(x) \leq \underline{a_-d_+}$ that is $x = d_+ \underline{a_-d_+} = \underline{d_+a_-}$

Taking together (1) and (2) we conclude

(1) $\underline{a_-d_+} \leq x < \underline{a}$; $x \in \Sigma(\underline{a_-d_+}, \underline{d_+a_-})$ if and only if $x \in \{a^i \underline{a_-d_+}; i \in \mathbb{N}_0\}$

(2) $\underline{d} < x \leq \underline{d_+a_-}$; $x \in \Sigma[\underline{a_-d_+}, \underline{d_+a_-}]$ if and only if $x \in \{d^i \underline{d_+a_-}; i \in \mathbb{N}_0\}$

Hence $\Sigma[\underline{a_-d_+}, \underline{d_+a_-}] \cap ([\underline{a_-d_+}, \underline{a}[\cup]\underline{d}, \underline{d_+a_-}]) = \{a^i \underline{a_-d_+}, d^i \underline{d_+a_-}; i \in \mathbb{N}_0\}$.

Therefore

$(\Sigma[\underline{a_-d_+}, \underline{d_+a_-}] \setminus \Sigma[\underline{a}, \underline{d}]) \subset \{\theta a^i \underline{a_-d_+}, \theta d^i \underline{d_+a_-}; i \in \mathbb{N}_0 \text{ and } \theta \in P_\infty([\underline{a_-d_+}, \underline{d_+a_-}])\}$
 $= X_1(\underline{a_-d_+}, \underline{d_+a_-})$ is a countable invariant set.

Then $h_{top}(\underline{a_-d_+}, \underline{d_+a_-}) = \max\{h_{top}(\underline{a}, \underline{d}), h_{top}(\sigma|X_1(\underline{a_-d_+}, \underline{d_+a_-}))\} = h_{top}(\underline{a}, \underline{d})$,

since $h_{top}(\sigma|X_1(\underline{a_-d_+}, \underline{d_+a_-})) = 0$

In this way we conclude the proof in this case $\underline{\alpha} = \underline{a_-d_+}$.

II) Let us now consider $\underline{\alpha} = \underline{a_-d_+a^i}$.

We have $b(\underline{\alpha}) = \underline{d_+a^i a_-}$. Let $x \in \Sigma[\underline{a_-d_+a^i}, \underline{d_+a^i a_-}]$ be such that $x \notin \Sigma[\underline{a}, \underline{d}]$.

We have: $\underline{a_-d_+a^i} \leq \sigma^j(x) \leq \underline{d_+a^i a_-}$ for all $j \in \mathbb{N}_0$ and there is $j_0 \in \mathbb{N}$ such that $\sigma^{j_0}(x) \notin [\underline{a}, \underline{d}]$ then $\underline{a_-d_+a^i} \leq \sigma^{j_0}(x) < \underline{a}$ or $\underline{d} < \sigma^{j_0}(x) \leq \underline{d_+a^i a_-}$.

As before let us consider:

$P_j(\underline{a_-d_+a^i}, \underline{d_+a^i a_-}) = \{\theta \in P_j; \text{ there is } x \in \Sigma[\underline{a_-d_+a^i}, \underline{d_+a^i a_-}] \text{ such that } x = \theta x_j x_{j+1} \dots\}$, which is a finite set.

Let $P_\infty(\underline{a_-d_+a^i}, \underline{d_+a^i a_-}) = \bigcup_{j=1}^{\infty} P_j(\underline{a_-d_+a^i}, \underline{d_+a^i a_-})$ which is a countable set.

So, for any $x \in \Sigma[\underline{a_-d_+a^i}, \underline{d_+a^i a_-}]$ such that $x \notin \Sigma[\underline{a}, \underline{d}]$ there is $\theta \in P_\infty(\underline{a_-d_+a^i}, \underline{d_+a^i a_-})$ such that $x = \theta \sigma^{|\theta|}(x)$ and $\sigma^{|\theta|}(x) \notin [\underline{a}, \underline{d}]$. That is $\underline{a_-d_+a^i} \leq \sigma^{|\theta|}(x) < \underline{a}$ or $\underline{d} < \sigma^{|\theta|}(x) \leq \underline{d_+a^i a_-}$.

Therefore, and without loss, let us assume that:

$$(1) \underline{a_-d_+a^i} \leq x < \underline{a} \text{ or } (2) \underline{d} < x \leq \underline{d_+a^i a_-}.$$

Case (1) $\underline{a_-d_+a^i} \leq x < \underline{a}$ then $x = 0a_1a_2 \dots a_{n-2}x_{n-1}x_n \dots$ and $\sigma^k(\underline{a_-d_+a^i}) \leq \sigma^k(x) < \sigma^k(\underline{a}); 1 \leq k \leq n-2$ and $\underline{0d_+a^i a_-} \leq \sigma^{n-1}(x) < \underline{1a}$. Hence, we have:

$$(1.1) \underline{0d_+a^i a_-} \leq \sigma^{n-1}(x) \leq \underline{01} \text{ or } (1.2) \underline{10} \leq \sigma^{n-1}(x) < \underline{1a}.$$

Case (1.1) We have $x_{n-1} = 0$ and $\underline{d_+a^i a_-} \leq \sigma^n(x) \leq \underline{d_+a^i a_-}$ that is

$$x = a_- \underline{d_+a^i a_-} = \underline{a_- d_+ a^i}$$

Case (1.2) We have $x_{n-1} = 1$ and $\underline{a_- d_+ a^i} \leq \sigma^n(x) \leq \underline{a}$ that is $x = a \sigma^n(x)$ with $\underline{a_- d_+ a^i} \leq \sigma^n(x) \leq \underline{a}$.

Case (2) $\underline{d} < x \leq \underline{d_+a^i a_-}$. In this case we have: $x = 1d_1 d_2 \dots d_{p-2} x_{p-1} x_p \dots$; $\sigma^k(\underline{d}) < \sigma^k(x) \leq \sigma^k(\underline{d_+a^i a_-})$; $1 \leq k \leq p-2$ and $0\underline{d} < \sigma^{p-1}(x) \leq \underline{1a^i a_- d_+}$. So, we must have:

$$(2.1) 0\underline{d} < \sigma^{p-1}(x) \leq 0\underline{1} \text{ or } (2.2) 1\underline{0} \leq \sigma^{p-1}(x) \leq \underline{1a^i a_- d_+}.$$

Case (2.1) We have $x_{p-1} = 0$ and $\underline{d} < \sigma^p(x) \leq \underline{d_+a^i a_-}$ that is $x = d \sigma^p(x)$ with $\underline{d} < \sigma^p(x) \leq \underline{d_+a^i a_-}$.

Case (2.2) We have $x_{p-1} = 1$ and $\underline{a_- d_+ a^i} \leq \sigma^p(x) \leq \underline{a^i a_- d_+ (*)}$.

Then $x = d_+ x_p x_{p+1} \dots x_{p+n-2} x_{p+n-1} x_{p+n} \dots$ and $(*)$ implies that $x_p = 0, x_{p+1} = a_1, \dots, x_{p+n-2} = a_{n-2}$. That is $x = d_+ 0 a_1 \dots a_{n-2} x_{p+n-1} x_{p+n} \dots$;

$$\sigma^k(\underline{a_- d_+ a^i}) \leq \sigma^{p+k}(x) \leq \sigma^k(\underline{a^i a_- d_+}); 0 \leq k \leq n-2 \text{ and } 0\underline{d_+ a^i a_-} \leq \sigma^{p+n-1}(x) \leq \underline{1a^{i-1} a_- d_+ a}$$

So we have:

$$(2.2)(i) 0\underline{d_+ a^i a_-} \leq \sigma^{p+n-1}(x) \leq 0\underline{1} \text{ or } (2.2)(ii) 1\underline{0} \leq \sigma^{p+n-1}(x) \leq \underline{1a^{i-1} a_- d_+ a}.$$

Case (2.2)(i) We have $x_{p+n-1} = 0$ and $\underline{d_+ a^i a_-} \leq \sigma^{p+n}(x) \leq \underline{d_+ a^i a_-}$ that is $x = d_+ a_- \underline{d_+ a^i a_-} = \underline{d_+ a_- d_+ a^i}$.

Case (2.2)(ii) We obtain $x_{p+n-1} = 1$ and $\underline{a_- d_+ a^i} \leq \sigma^{p+n}(x) \leq \underline{a^{i-1} a_- d_+ a}$. This imply that $x = d_+ a x_{p+n} x_{p+n+1} \dots$. Moreover, since $\sigma^k(\underline{a_- d_+ a^i}) \leq \sigma^{p+n+k}(x) \leq \sigma^k(\underline{a^{i-1} a_- d_+ a})$, $0 < k \leq n-2$ we have that $x_{p+n} = 0, x_{p+n+1} = a_1, \dots, x_{p+n+n-2} = a_{n-2}$ and $0\underline{d_+ a^i a_-} \leq \sigma^{p+n+n-1}(x) \leq \underline{1a^{i-2} a_- d_+ a^2}$.

Therefore, we must have:

$$(ii.1) \underline{0d_+a^i a_-} \leq \sigma^{p+n+n-1}(x) \leq \underline{01} \text{ or } (ii.2) \underline{10} \leq \sigma^{p+n+n-1}(x) \leq \underline{1a^{i-2}a_-d_+a^2}.$$

Case(ii.1) In this situation we have $x_{p+n+n-1} = 0$; $\underline{d_+a^i a_-} \leq \sigma^{p+2n}(x) \leq \underline{d_+a^i a_-}$ and $x = d_+a a_- \underline{d_+a^i a_-} = d_+a a_- \underline{d_+a^i}$.

Case (ii.2) In this situation we have $x_{p+n+n-1} = 1$; $\underline{a_-d_+a^i} \leq \sigma^{p+2n}(x) \leq \underline{a^{i-2}a_-d_+a^2}$; $x_{p+2n} = 0, x_{p+2n+1} = a_1, \dots, x_{p+2n+n-1} = a_{n-2}$; $\sigma^k(\underline{a_-d_+a^i}) \leq \sigma^{p+2n+k}(x) \leq \sigma^k(\underline{a^{i-2}a_-d_+a^2})$; for $0 \leq k \leq n-2$ and $\underline{0d_+a^i a_-} \leq \sigma^{p+2n+n-1}(x) \leq \underline{1a^{i-3}a_-d_+a^3}$. Consequently:

$$(ii.2.a) \underline{0d_+a^i a_-} \leq \sigma^{p+2n+n-1}(x) \leq \underline{01} \text{ or } (ii.2.b) \underline{10} \leq \sigma^{p+2n+n-1}(x) \leq \underline{1a^{i-3}a_-d_+a^3}.$$

Case (ii.2.a) In this situation we have $x_{p+2n+n-1} = 0$; $\underline{d_+a^i a_-} \leq \sigma^{p+3n}(x) \leq \underline{d_+a^i a_-}$. Therefore $x = d_+a^2 a_- \underline{d_+a^i a_-} = d_+a^2 a_- \underline{d_+a^i}$.

Case (ii.2.b) In this situation we have $x_{p+2n+n-1} = 1$; and $\underline{a_-d_+a^i} \leq \sigma^{p+3n}(x) \leq \underline{a^{i-3}a_-d_+a^3}$.

In this way we obtain $x = d_+a^t a_- \underline{d_+a^i}$ for some $1 \leq t < i$ or $x = d_+a^i a_- \underline{d_+a^i} = \underline{d_+a^i a_-}$.

Now, taking together (1) and (2) we obtain that $(\Sigma[\underline{a_-d_+a^i}, \underline{d_+a^i a_-}] \setminus \Sigma[\underline{a}, \underline{d}]) = \{\theta a^s \underline{a_-d_+a^i}, \theta d^s \underline{d_+a^i a_-}, \theta d^s d_+a^t a_- \underline{d_+a^i}; s \in N_0 \text{ for some } 0 \leq t_s \leq i \text{ and } \theta \in P_\infty(\underline{a_-d_+a^i}, \underline{d_+a^i a_-})\} = X_1(\underline{a_-d_+a^i}, \underline{d_+a^i a_-})$ is a countable invariant set.

So $h_{top}(\underline{a_-d_+a^i}, \underline{d_+a^i a_-}) = \max\{h_{top}(\underline{a}, \underline{d}), h_{top}(\sigma|X_1(\underline{a_-d_+a^i}, \underline{d_+a^i a_-}))\} = h_{top}(\underline{a}, \underline{d})$, since $h_{top}(\sigma|X_1(\underline{a_-d_+a^i}, \underline{d_+a^i a_-})) = 0$

III) A similar proof can be done for $\underline{\alpha} = \underline{a_-d^i d_+}$

So, we conclude that for any $\underline{\alpha} \in A_0(\underline{a}, \underline{d})$ we have $h_{top}(\underline{\alpha}, b(\underline{\alpha})) = h_{top}(\underline{a}, \underline{d})$.

Let us now consider $\underline{a}_1 < \underline{a}_2$ two consecutive sequences in $A_0(\underline{a}, \underline{d})$ and let us prove that

$$h_{top}(a_1 a_2, b(a_1 a_2)) = h_{top}(\underline{a}, \underline{d}).$$

I.- Let us start with $\underline{a}_1 = \underline{a_- d^{i+1} d_+}$ and $\underline{a}_2 = \underline{a_- d^i d_+}$ we have

$$m(a_1, a_2) = \underline{a_- d^{i+1} d_+ a_- d^i d_+} \text{ and } b(\underline{a_- d^{i+1} d_+ a_- d^i d_+}) = \underline{d_+ a_- d^i d_+ a_- d^{i+1}}.$$

$$\begin{aligned} & \text{Let } P_j(\underline{a_- d^{i+1} d_+ a_- d^i d_+}, \underline{d_+ a_- d^i d_+ a_- d^{i+1}}) = \\ & = \{\theta \in P_j ; \text{ there is } x \in \Sigma[\underline{a_- d^{i+1} d_+ a_- d^i d_+}, \underline{d_+ a_- d^i d_+ a_- d^{i+1}}] \text{ such that} \\ & x = \theta x_j x_{j+1} x_{j+2} \dots\} \text{ and } P_\infty(\underline{a_- d^{i+1} d_+ a_- d^i d_+}, \underline{d_+ a_- d^i d_+ a_- d^{i+1}}) = \\ & = \bigcup_{j=0}^{\infty} P_j(\underline{a_- d^{i+1} d_+ a_- d^i d_+}, \underline{d_+ a_- d^i d_+ a_- d^{i+1}}). \end{aligned}$$

For any $x \in (\Sigma[\underline{a_- d^{i+1} d_+ a_- d^i d_+}, \underline{d_+ a_- d^i d_+ a_- d^{i+1}}] \setminus \Sigma[\underline{a}, \underline{d}])$ we have that:

$\underline{a_- d^{i+1} d_+ a_- d^i d_+} \leq \sigma^j(x) \leq \underline{d_+ a_- d^i d_+ a_- d^{i+1}}$ for all $j \in \mathbb{N}_0$ and there is $j_0 \in \mathbb{N}$ such that $\sigma^{j_0}(x) \notin [\underline{a}, \underline{d}]$. That is, there is $\theta \in P_\infty(\underline{a_- d^{i+1} d_+ a_- d^i d_+}, \underline{d_+ a_- d^i d_+ a_- d^{i+1}})$ such that $x = \theta \sigma^{|\theta|}(x)$ with $|\theta| = j_0$ and

$$\underline{a_- d^{i+1} d_+ a_- d^i d_+} \leq \sigma^{j_0}(x) < \underline{a} \quad \text{or} \quad \underline{d} < \sigma^{j_0}(x) \leq \underline{d_+ a_- d^i d_+ a_- d^{i+1}}.$$

Hence, and without loss of generality, let us assume that

$$(1) \underline{a_- d^{i+1} d_+ a_- d^i d_+} \leq x < \underline{a} \quad \text{or} \quad (2) \underline{d} < x \leq \underline{d_+ a_- d^i d_+ a_- d^{i+1}}.$$

Case (1) In this case $x = 0a_1 a_2 \dots a_{n-2} x_{n-1} x_n \dots$; $\sigma^k(\underline{a_- d^{i+1} d_+ a_- d^i d_+}) \leq \sigma^k(x) < \sigma^k(\underline{a})$ for any $1 \leq k \leq n-2$ and $0\underline{d^{i+1} d_+ a_- d^i d_+ a_-} \leq \sigma^{n-1}(x) < 1\underline{a}$. So, we have

$$(i) 0\underline{d^{i+1} d_+ a_- d^i d_+ a_-} \leq \sigma^{n-1}(x) \leq 0\underline{1} \quad \text{or} \quad (ii) 1\underline{0} \leq \sigma^{n-1}(x) < 1\underline{a}.$$

Case (i) In this situation we have: $x_{n-1} = 0$ and $\underline{d^{i+1} d_+ a_- d^i d_+ a_-} \leq \sigma^n(x) \leq \underline{d_+ a_- d^i d_+ a_- d^{i+1}}$ then $x = a_- 1 d_1 d_2 \dots d_{p-2} x_{n+p-1} x_{n+p} \dots$;
 $\sigma^k(\underline{d^{i+1} d_+ a_- d^i d_+ a_-}) \leq \sigma^{n+k}(x) \leq \sigma^k(\underline{d_+ a_- d^i d_+ a_- d^{i+1}})$ for all $1 \leq k \leq p-2$
and $0\underline{d^i d_+ a_- d^i d_+ a_- d} \leq \sigma^{n+p-1}(x) \leq 1\underline{a_- d^i d_+ a_- d^{i+1} d_+}$.

Hence, we have

$$(a) 0\underline{d^i d_+ a_- d^i d_+ a_- d} \leq \sigma^{n+p-1}(x) \leq 0\underline{1} \text{ or}$$

$$(b) 1\underline{0} \leq \sigma^{n+p-1}(x) \leq 1\underline{a_- d^i d_+ a_- d^{i+1} d_+}.$$

Case (a) In this case we must have: $x_{n+p-1} = 0$; $\underline{d^i d_+ a_- d^i d_+ a_- d} \leq \sigma^{n+p}(x) \leq \underline{d_+ a_- d^i d_+ a_- d^{i+1}}$ that is: $x = a_- d 1 d_1 \dots d_{p-2} x_{n+p+p-1} \dots$;

$\sigma^k(\underline{d^i d_+ a_- d^i d_+ a_- d}) \leq \sigma^{n+p+k}(x) \leq \sigma^k(\underline{d_+ a_- d^i d_+ a_- d^{i+1}})$ for all $1 \leq k \leq p-2$ and $0 \underline{d^{i-1} d_+ a_- d^i d_+ a_- d^2} \leq \sigma^{n+p+p-1}(x) \leq \underline{1 a_- d^i d_+ a_- d^{i+1} d_+}$. Hence, we have

$$(a.1) \ 0 \underline{d^{i-1} d_+ a_- d^i d_+ a_- d^2} \leq \sigma^{n+p+p-1}(x) \leq 0 \underline{1} \text{ or}$$

$$(a.2) \ 1 \underline{0} \leq \sigma^{n+p+p-1}(x) \leq \underline{1 a_- d^i d_+ a_- d^{i+1} d_+}.$$

Case (a.1) $x_{n+2p-1} = 0$ and $\underline{d^{i-1} d_+ a_- d^i d_+ a_- d^2} \leq \sigma^{n+2p}(x) \leq \underline{d_+ a_- d^i d_+ a_- d^{i+1}}$.

Successively if we remains in the first case we will obtain:

$$x = a_- d^{i+1} x_{n+(i+1)p} x_{n+(i+1)p+1} \dots \text{ and}$$

$$\underline{d_+ a_- d^i d_+ a_- d^{i+1}} \leq \sigma^{n+(i+1)p}(x) \leq \underline{d_+ a_- d^i d_+ a_- d^{i+1}}$$

then $\sigma^{n+(i+1)p}(x) = \underline{d_+ a_- d^i d_+ a_- d^{i+1}}$ and

$$x = a_- d^{i+1} \underline{d_+ a_- d^i d_+ a_- d^{i+1}} = \underline{a_- d^{i+1} d_+ a_- d^i d_+}$$

Case (a.2) $1 \underline{0} \leq \sigma^{n+p+p-1}(x) \leq \underline{1 a_- d^i d_+ a_- d^{i+1} d_+}$, then $x_{n+p+p-1} = 1$ and

$$\underline{a_- d^{i+1} d_+ a_- d^i d_+} \leq \sigma^{n+2p}(x) \leq \underline{a_- d^i d_+ a_- d^{i+1} d_+}$$
, then

$x = a_- d d_+ x_{n+2p} x_{n+2p+1} \dots$ and $x_{n+2p} = 0$, $x_{n+2p+1} = a_1, \dots, x_{n+2p+n-2} = a_{n-2}$, $x_{n+2p+n-1} = 0$, $x_{n+2p+n} = 1$, $x_{2n+2p+1} = d_1, \dots, x_{2n+2p+p-2} = d_{p-2}$, $x_{2n+2p+p-1} = 0$, $x_{2n+3p} = 1, \dots$ then

$$x = a_- d d_+ a_- d^i 1 d_1 d_2 \dots d_{p-2} x_{2n+ip+2p+p-1} \dots, \text{ and}$$

$0 \underline{d_+ a_- d^i d_+ a_- d^{i+1}} \leq \sigma^{2n+2p+ip+p-1}(x) \leq \underline{1 a_- d^{i+1} d_+ a_- d^i d_+}$. Therefore, we have:

$$(a.2.i) \ 0 \underline{d_+ a_- d^i d_+ a_- d^{i+1}} \leq \sigma^{2n+2p+ip+p-1}(x) \leq 0 \underline{1} \text{ or}$$

$$(a.2.ii) \ 1 \underline{0} \leq \sigma^{2n+2p+ip+p-1}(x) \leq \underline{1 a_- d^{i+1} d_+ a_- d^i d_+}$$

case (a.2.i) $x_{2n+2p+ip+p-1} = 0$, $x = a_- d d_+ a_- d^{i+1} x_{2n+(3+i)p} \dots$

$$\underline{d_+ a_- d^i d_+ a_- d^{i+1}} \leq \sigma^{2n+(3+i)p}(x) \leq \underline{d_+ a_- d^i d_+ a_- d^{i+1}}$$

thus $\sigma^{2n+(3+i)p}(x) = \underline{d_+ a_- d^i d_+ a_- d^{i+1}}$ that is

$$x = a_- d d_+ a_- d^{i+1} \underline{d_+ a_- d^i d_+ a_- d^{i+1}} = a_- d \underline{d_+ a_- d^{i+1} d_+ a_- d^i}$$

Case (a.2.ii) $1 \underline{0} \leq \sigma^{2n+(3+i)p-1}(x) \leq \underline{1 a_- d^{i+1} d_+ a_- d^i d_+}$ then $x_{2n+(3+i)p-1} =$

1 then $x = a_- d d_+ a_- d^i d_+ x_{2n+(3+i)p} \dots$ and

$$\underline{a_- d^{i+1} d_+ a_- d^i d_+} \leq \sigma^{2n+(3+i)p}(x) \leq \underline{a_- d^{i+1} d_+ a_- d^i d_+}$$
. So, we must have

$$\sigma^{2n+(3+i)p}(x) = \underline{a_- d^{i+1} d_+ a_- d^i d_+}$$
 then

$x = a_-dd_+a_-d^id_+a_-d^{i+1}d_+a_-d^id_+$ thus $x = a_-dd_+a_-d^id_+a_-d^{i+1}$.

Now we will deal with the other case (1.i.b). In this situation we have: $x = a_-1d_1d_2 \dots d_{p-2}x_{n+p-1}x_{n+p} \dots$ and $1\bar{0} \leq \sigma^{n+p-1}(x) \leq 1a_-d^id_+a_-d^{i+1}d_+$.

We have $x_{n+p-1} = 1; x = a_-d_+x_{n+p} \dots$ and

$a_-d^{i+1}d_+a_-d^id_+ \leq \sigma^{n+p}(x) \leq a_-d^id_+a_-d^{i+1}d_+$; therefore

$\sigma^k(a_-d^{i+1}d_+a_-d^id_+) \leq \sigma^{n+p+k}(x) \leq \sigma^k(a_-d^id_+a_-d^{i+1}d_+)$ for all $1 \leq k \leq n + ip + p - 2$.

Hence, $x = a_-d_+a_-d^i1d_1 \dots d_{p-2}x_{2n+p+ip+p-1}$ and

$0d_+a_-d^id_+a_-d^{i+1} \leq \sigma^{2n+p+ip+p-1}(x) \leq 1a_-d^{i+1}d_+a_-d^id_+$. So, we must have:

(b.1) $0d_+a_-d^id_+a_-d^{i+1} \leq \sigma^{2n+2p+ip-1}(x) \leq 0\bar{1}$ or (b.2) $1\bar{0} \leq \sigma^{2n+2p+ip-1}(x) \leq 1a_-d^{i+1}d_+a_-d^id_+$.

Case (b.1) Here $x_{2n+2p+i-1} = 0$, $x = a_-d_+a_-d^{i+1}x_{2n+(i+2)p} \dots$ and

$d_+a_-d^id_+a_-d^{i+1} \leq \sigma^{2n+(i+2)p}(x) \leq d_+a_-d^id_+a_-d^{i+1}$ that is

$x = a_-d_+a_-d^{i+1}d_+a_-d^id_+a_-d^{i+1} = a_-d_+a_-d^{i+1}d_+a_-d^i$

Case (b.2) Here $x_{2n+2p+ip-1} = 1$, $x = a_-d_+a_d^i - d_+x_{2n+(i+2)p} \dots$ and

$a_-d^{i+1}d_+a_-d^id_+ \leq \sigma^{2n+(i+2)p}(x) \leq a_-d^{i+1}d_+a_-d^id_+$ then

$\sigma^{2n+(i+2)p}(x) = a_-d^{i+1}d_+a_-d^id_+$ that is $x = a_-d_+a_-d^id_+a_-d^{i+1}$.

Case (ii) In this situation we have: $x = 0a_1a_2 \dots a_{n-2}x_{n-1} \dots$ and

$1\bar{0} \leq \sigma^{n-1}(x) < 1\bar{a}$ then $x_{n-1} = 1$ and

$x = ax_nx_{n+1} \dots$, hence $a_-d^{i+1}d_+a_-d^id_+ \leq \sigma^n(x) < \bar{a}$ then $x = a\sigma^n(x)$ with

$a_-d^{i+1}d_+a_-d^id_+ \leq \sigma^n(x) < \bar{a}$.

Case (2) In this situation we have: $\underline{d} < x \leq d_+a_-d^id_+a_-d^{i+1}$

then $x = 1d_1 \dots d_{p-2}x_{p-1}x_p \dots$;

$\sigma^k(\underline{d}) < \sigma^k(x) \leq \sigma^k(d_+a_-d^id_+a_-d^{i+1})$ for all $1 \leq k \leq p - 2$ and

$0\bar{d} < \sigma^{p-1}(x) \leq 1a_-d^id_+a_-d^{i+1}d_+$. Hence, we have (i) $0\bar{d} < \sigma^{p-1}(x) \leq 0\bar{1}$

or (ii) $1\bar{0} \leq \sigma^{p-1}(x) \leq 1a_-d^id_+a_-d^{i+1}d_+$.

Case (i) We have $x_{p-1} = 0$ and $\underline{d} < \sigma^p(x) \leq d_+a_-d^id_+a_-d^{i+1}$ that is

$x = d\sigma^p(x)$ with $\underline{d} < \sigma^p(x) \leq d_+a_-d^id_+a_-d^{i+1}$.

Case (ii) In this case $x_{p-1} = 1$ and

$\underline{a_-d^{i+1}d_+a_-d^id_+} \leq \sigma^p(x) \leq \underline{a_-d^id_+a_-d^{i+1}d_+}$. We proceed in a similar way as like the case (a.2).

So, taking together cases (1) and (2) we conclude that:

$$\begin{aligned} & \Sigma[\underline{a_-d^{i+1}d_+a_-d^id_+}, \underline{d_+a_-d^id_+a_-d^{i+1}}] \setminus \Sigma[\underline{a}, \underline{d}] = \\ & \{ \theta a^h \underline{a_-d^t d_+ a_-d^{i+1} d_+ a_-d^i}, \theta a^h \underline{a_-d^t d_+ a_-d^i d_+ a_-d^{i+1}}, \theta a^h \underline{a_-d^{i+1} d_+ a_-d^i d_+}, \\ & \theta d^h \underline{d_+ a_-d^{i+1} d_+ a_-d^i}, \theta d^h \underline{d_+ a_-d^i d_+ a_-d^{i+1}} \}; \text{ for all } h \in \mathbb{N}_0, \text{ for all } \theta \in \\ & P_\infty(\underline{a_-d_+a_-d_+a}, \underline{d_+aa_-d_+a_-}), \text{ for some } 0 \leq t < i \} = \\ & = X_1(\underline{a_-d^{i+1}d_+a_-d^id_+}, \underline{d_+a_-d^id_+a_-d^{i+1}}) \text{ is a countable invariant set. So} \\ & h_{top}(\underline{a_-d^{i+1}d_+a_-d^id_+}, \underline{d_+a_-d^id_+a_-d^{i+1}}) = h_{top}(\underline{a}, \underline{d}) \text{ since} \\ & h_{top}(\sigma|_{X_1(\underline{a_-d^{i+1}d_+a_-d^id_+}, \underline{d_+a_-d^id_+a_-d^{i+1}})}) = 0. \end{aligned}$$

(ii) A similar proof can be done for $\underline{a_1} = \underline{a_-d_+a^i}$ and $\underline{a_2} = \underline{a_-d_+a^{i+1}}$.

Similarly, we prove the result for any $\underline{\alpha} \in A_1(\underline{a}, \underline{d}) = \{m(a_1, a_2); \underline{a_1} < \underline{a_2} \text{ are consecutive sequences in } A_0(\underline{a}, \underline{d})\} \cup A_0(\underline{a}, \underline{d})$.

Also, for any $\underline{\alpha} \in A_{n+1}(\underline{a}, \underline{d}) = \{m(a_1, a_2); \underline{a_1} < \underline{a_2} \text{ are consecutive sequences in } A_n(\underline{a}, \underline{d})\} \cup A_n(\underline{a}, \underline{d})$.

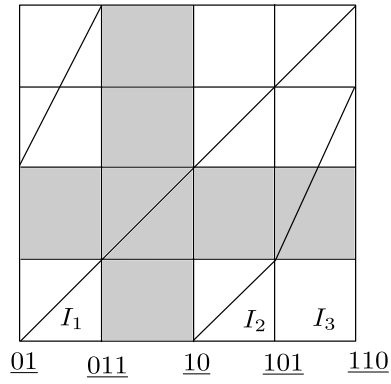
In this way we conclude the proof of the theorem A. .

2.1.2 An Example

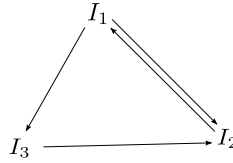
Let us compute, in this section, an example of the application of the Theorem A.

Example: Let us consider $\underline{a} = \underline{01} \in \text{Min}_2$ and $\underline{d} = \underline{110} \in \text{Max}_2$. It is clear that $\underline{a} < \underline{011} = a(\underline{d}) < \underline{10} = b(\underline{a}) < \underline{d} = \underline{110}$.

Let us compute $h_{top}(\sigma|_{\Sigma[\underline{01}, \underline{110}]})$. The restriction map $\sigma|_{[\underline{01}, \underline{110}]}$ is given in the next figure:



The $A = \{I_1, I_2, I_3\}$ -graph associated is:



The incident matrix, associated to this graph, is:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

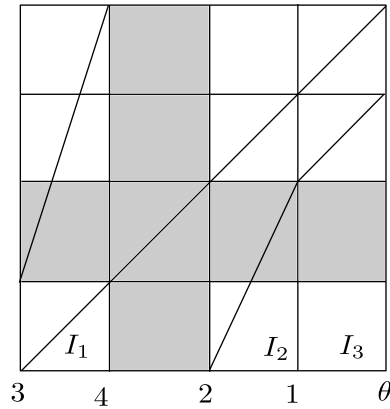
Hence, the characteristic polynomial, $p_3(x) = \det(M - xI)$, is given by:

$$\begin{aligned} \det(M - xI) &= \begin{vmatrix} -x & 1 & 1 \\ 1 & -x & 0 \\ 0 & 1 & -x \end{vmatrix} = -x \begin{vmatrix} -x & 0 \\ 1 & -x \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -x \end{vmatrix} = \\ &= -x^3 + (-1)(-x - 1) = -x^3 + x + 1 = p_3(x) \end{aligned}$$

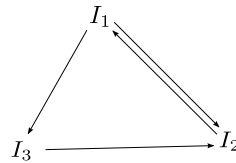
Note that: $p_3(1) = 1$, $p_3(2) = -8 + 2 + 1 = -5$. So, there is $x_3 \in]1, 2[$ such that $p_3(x_3) = 0$ and $h_{top}(\sigma|_{\Sigma[01, 110]}) = \log(x_3)$

1. Let us consider $\underline{a-d}_+ = \underline{00111}$. Let us call $\theta = \underline{11100}$, $\sigma(\theta) = \underline{11001}$, $\sigma^2(\theta) =$

$\underline{10011}$, $\sigma^3(\theta) = \underline{00111}$, $\sigma^4(\theta) = \underline{01110}$. The restriction map $\sigma|_{[\sigma^3(\theta), \theta]}$ is given in the next figure:



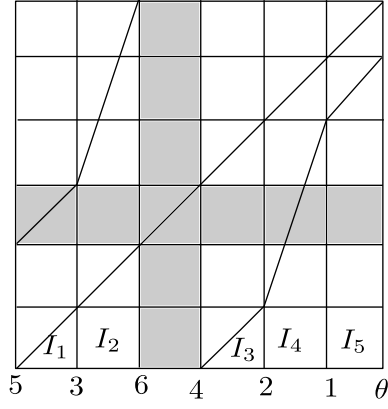
The $A = \{I_1, I_2, I_3\}$ -graph associated is:



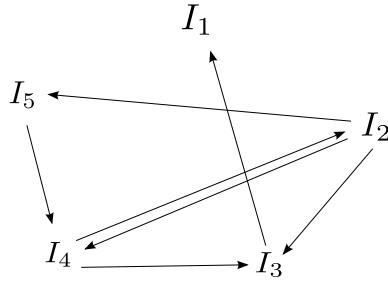
Since the A- graph for $\sigma|_{[\sigma^3(\theta), \theta]}$ is the same as the A- graph for $\sigma|_{[\underline{01}, \underline{110}]}$ we have that the incident matrix and the characteristic polynomial are the same. Hence $h_{top}(\sigma|_{[\sigma^3(\theta), \theta]}) = \log(x_3) = h_{top}(\sigma|_{[\underline{01}, \underline{110}]})$.

2. Let us now consider $\underline{a_-d_+a} = \underline{0011101}$. Let us call $\theta = \underline{1110100}$, $\sigma(\theta) = \underline{1101001}$, $\sigma^2(\theta) = \underline{1010011}$, $\sigma^3(\theta) = \underline{0100111}$, $\sigma^4(\theta) = \underline{1001110}$, $\sigma^5(\theta) = \underline{0011101}$, $\sigma^6(\theta) = \underline{0111010}$.

The restriction map $\sigma|_{[\sigma^5(\theta), \theta]}$ is given in the next figure:



The $A = \{I_1, I_2, I_3, I_4, I_5\}$ -graph associated is:



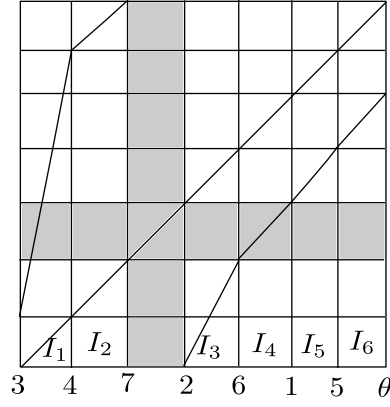
Here $I_1 = [\sigma^5(\theta), \sigma^3(\theta)]$, $I_2 = [\sigma^3(\theta), \sigma^6(\theta)]$, $I_3 = [\sigma^4(\theta), \sigma^2(\theta)]$, $I_4 = [\sigma^2(\theta), \sigma(\theta)]$, $I_5 = [\sigma(\theta), \theta]$. A *rome* (see [20]) for this graph is $R = \{I_2\}$. We have that: $a_{22}(x) = x^{-2} + x^{-3}$ (x^{-2} associated to the closed path 2 4 2, and x^{-3} associated to the closed path 2 5 4 2).

In this case the A -matrix is 1×1 and given by: $A_1(x) = x^{-2} + x^{-3}$. Therefore the characteristic polynomial defined by the A -graph is given by: $(-1)^{5-1}x^5 \det(A_1(x) - I) = (-1)^{5-1}x^5 \det(A_1(x) - 1) = (-1)^{5-1}x^5(x^{-2} + x^{-3} - 1) = x^3 + x^2 - x^5 = x^2(-x^3 + x + 1) = x^2p_3(x) = p(\underline{1110100})(x)$.

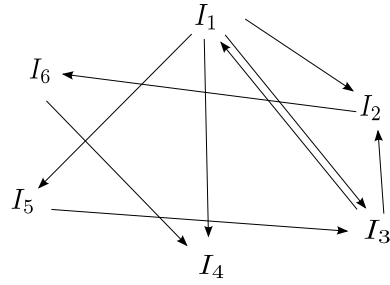
It is clear that $p(\underline{1110100})(x_3) = 0$ and that x_3 is the greatest real root of the polynomial $p(\underline{1110100})(x)$. Hence $h_{top}(\sigma|_{\Sigma[\underline{0011101}, \underline{1110100}]}) = \log(x_3) = h_{top}(\sigma|_{\Sigma[\underline{01}, \underline{110}]})$.

3. Let us now consider $\underline{a_dd_+} = \underline{00110111}$. Let us call $\theta = \underline{11100110}$,
 $\sigma(\theta) = \underline{11001101}$, $\sigma^2(\theta) = \underline{10011011}$, $\sigma^3(\theta) = \underline{00110111}$, $\sigma^4(\theta) = \underline{01101110}$,
 $\sigma^5(\theta) = \underline{11011100}$, $\sigma^6(\theta) = \underline{10111001}$, $\sigma^7(\theta) = \underline{01110011}$

The restriction map $\sigma|_{[\sigma^3(\theta), \theta]}$ is given in the next figure:



The $A = \{I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6\}$ - graph associated is



Here $I_1 = [\sigma^3(\theta), \sigma^4(\theta)]$, $I_2 = [\sigma^4(\theta), \sigma^7(\theta)]$, $I_3 = [\sigma^2(\theta), \sigma^6(\theta)]$, $I_4 = [\sigma^6(\theta), \sigma(\theta)]$, $I_5 = [\sigma(\theta), \sigma^5(\theta)]$, $I_6 = [\sigma^5(\theta), \theta]$.

Arome for this graph is $R = \{I_1\}$ and we have that:

$a_{11}(x) = x^{-2} + x^{-3}$ (here x^{-2} associated to the closed path 1 3 1 and x^{-3} associated to the closed path 1 5 3 1). Hence:

$$(-1)^{6-1} x^6 (x^{-2} + x^{-3} - 1) = -x^3 (x + 1 - x^3) = p(\underline{11100110})(x) = -p_3(x) \times x^3.$$

It is clear that $p(\underline{11100110})(x_3) = 0$ and that x_3 is the greatest real root of the polynomial $p(\underline{11100110})(x)$. Therefore:

$$h_{top}(\sigma|_{\Sigma[\underline{00110111}, \underline{11100110}]}) = h_{top}(\sigma|_{\Sigma[\underline{a-dd+}, \underline{d+a-a-d}]}) = h_{top}(\sigma|_{\Sigma[\underline{01}, \underline{110}]}) = h_{top}(\sigma|_{\Sigma[\underline{a}, \underline{d}]}).$$

2.2 Proof of the Theorem B

In this section we will prove:

Theorem 2.2.1. (Theorem B) Assume $\underline{a} \in \text{Min}_2 \cap \text{Per}(\sigma)$ and $\underline{c} \in \text{Max}_2 \cap \text{Per}(\sigma)$ are sequences such that $\underline{a} \leq a(\underline{c}) < b(\underline{a}) \leq \underline{c}$. Let $\underline{d} \in \text{Max}_2 \cap \text{Per}(\sigma)$ be any sequence such that $\underline{a} \leq a(\underline{d}) < \underline{c} < \underline{d}$ then $h_{\text{top}}(\underline{a}, \underline{d}) > h_{\text{top}}(\underline{a}, \underline{c})$.

Proof. By conditions on the sequences we have either

$$(1) \underline{a} \leq a(\underline{d}) < a(\underline{c}) < b(\underline{a}) < \underline{c} < \underline{d} \quad \text{or}$$

$$(2) \underline{a} \leq a(\underline{c}) < a(\underline{d}) < b(\underline{a}) < \underline{c} < \underline{d}$$

Let us assume that (1) is the case

Let us assume that $\underline{c} = \underbrace{1c_1 \dots c_{n-2}0}_{p\text{-times}}$, $\underline{d} = \underbrace{1d_1 \dots d_{p-2}0}_{n\text{-times}}$ and let us consider the cylinder

$$C_1 = C(\underbrace{1c_1 \dots c_{n-2}0}_{p\text{-times}} \underbrace{1c_1 \dots c_{n-2}0}_{p\text{-times}} \dots \underbrace{1c_1 \dots c_{n-2}0}_{p\text{-times}})$$
 and

$$C_2 = C(\underbrace{1d_1 \dots d_{p-2}0}_{n\text{-times}} \underbrace{1d_1 \dots d_{p-2}0}_{n\text{-times}} \dots \underbrace{1d_1 \dots d_{p-2}0}_{n\text{-times}}). \text{ It is clear that } C_1 \cap C_2 = \emptyset.$$

Moreover $\Sigma_2 \subset \sigma^{np}(C_1)$ and $\Sigma_2 \subset \sigma^{np}(C_2)$.

So there are sets $A(\underbrace{1d_1 \dots d_{p-2}0}_{n\text{-times}} \underbrace{1d_1 \dots d_{p-2}0}_{n\text{-times}} \dots \underbrace{1d_1 \dots d_{p-2}0}_{n\text{-times}}) \subset C_1$ and

$$B(\underbrace{1d_1 \dots d_{p-2}0}_{n\text{-times}} \underbrace{1d_1 \dots d_{p-2}0}_{n\text{-times}} \dots \underbrace{1d_1 \dots d_{p-2}0}_{n\text{-times}}) \subset C_1 \text{ such that}$$

1. For all $\theta \in A(\underbrace{1d_1 \dots d_{p-2}0}_{n\text{-times}} \underbrace{1d_1 \dots d_{p-2}0}_{n\text{-times}} \dots \underbrace{1d_1 \dots d_{p-2}0}_{n\text{-times}})$ we have $\theta > \underline{c}$.
2. For all $\theta \in A(\underbrace{1d_1 \dots d_{p-2}0}_{n\text{-times}} \underbrace{1d_1 \dots d_{p-2}0}_{n\text{-times}} \dots \underbrace{1d_1 \dots d_{p-2}0}_{n\text{-times}})$,
for all $\alpha \in B(\underbrace{1d_1 \dots d_{p-2}0}_{n\text{-times}} \underbrace{1d_1 \dots d_{p-2}0}_{n\text{-times}} \dots \underbrace{1d_1 \dots d_{p-2}0}_{n\text{-times}})$ we have $\theta < \alpha$.
3. $\sigma^{np}(A(\underbrace{1d_1 \dots d_{p-2}0}_{n\text{-times}} \underbrace{1d_1 \dots d_{p-2}0}_{n\text{-times}} \dots \underbrace{1d_1 \dots d_{p-2}0}_{n\text{-times}})) =$
 $A(\underbrace{1d_1 \dots d_{p-2}0}_{n\text{-times}} \underbrace{1d_1 \dots d_{p-2}0}_{n\text{-times}} \dots \underbrace{1d_1 \dots d_{p-2}0}_{n\text{-times}}) \cup$
 $B(\underbrace{1d_1 \dots d_{p-2}0}_{n\text{-times}} \underbrace{1d_1 \dots d_{p-2}0}_{n\text{-times}} \dots \underbrace{1d_1 \dots d_{p-2}0}_{n\text{-times}}).$
4. $\sigma^{np}(B(\underbrace{1d_1 \dots d_{p-2}0}_{n\text{-times}} \underbrace{1d_1 \dots d_{p-2}0}_{n\text{-times}} \dots \underbrace{1d_1 \dots d_{p-2}0}_{n\text{-times}})) =$
 $A(\underbrace{1d_1 \dots d_{p-2}0}_{n\text{-times}} \underbrace{1d_1 \dots d_{p-2}0}_{n\text{-times}} \dots \underbrace{1d_1 \dots d_{p-2}0}_{n\text{-times}}) \cup$

$$B(1d_1 \dots d_{p-2}01d_1 \dots d_{p-2}0 \dots 1d_1 \dots d_{p-2}0).$$

Now, take \mathcal{A}_0 a minimal open covering of $[\underline{a}, \underline{d}]$ and let $\beta_0 = \{A \in \mathcal{A}_0; [\underline{a}, \underline{c}] \cap A \neq \emptyset\}$ we have that β_0 is a minimal open covering of $[\underline{a}, \underline{c}]$.

Let $\mathcal{A}_k = \mathcal{A}_0 \vee \sigma^{-1}(\mathcal{A}_0) \vee \dots \vee \sigma^{-(k-1)}(\mathcal{A}_0)$ and $\beta_k = \beta_0 \vee \sigma^{-1}(\beta_0) \vee \dots \vee \sigma^{-(k-1)}(\beta_0)$

Clearly, for the condition on the set $A(1d_1 \dots d_{p-2}01d_1 \dots d_{p-2}0 \dots 1d_1 \dots d_{p-2}0)$ and

$B(1d_1 \dots d_{p-2}01d_1 \dots d_{p-2}0 \dots 1d_1 \dots d_{p-2}0)$ we have that

$$N(\mathcal{A}_{npj}, \sigma) \geq N(\beta_{npj}, \sigma) + 2^j \text{ then}$$

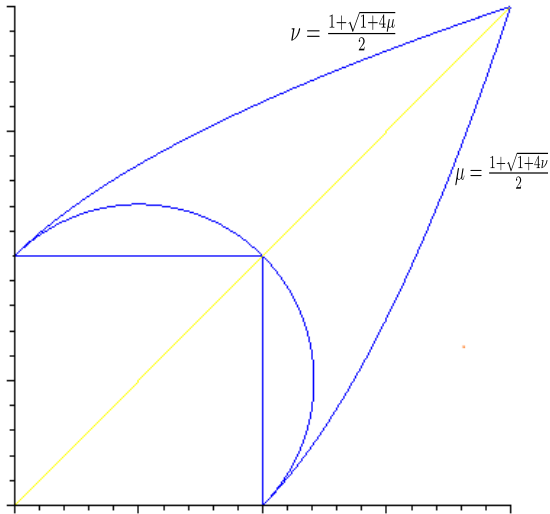
$$\begin{aligned} \frac{1}{npj} \log N(\mathcal{A}_{npj}, \sigma) &\geq \frac{1}{npj} \log(N(\beta_{npj}, \sigma) + 2^j) = \frac{1}{npj} \log(N(\beta_{npj}, \sigma)) + \frac{1}{npj} \log\left(1 + \frac{2^j}{N(\beta_{npj}, \sigma)}\right) \\ &= \frac{1}{npj} \log(N(\beta_{npj}, \sigma)) + \frac{1}{np} \log 2 + \frac{1}{npj} \log\left(2^{-j} + \frac{1}{N(\beta_{npj}, \sigma)}\right) \text{ taking } j \rightarrow \infty \text{ we obtain} \\ h_{top}(\sigma|_{\Sigma[\underline{a}, \underline{d}]}) &\geq \frac{1}{np} \log 2 + h_{top}(\sigma|_{\Sigma[\underline{a}, \underline{c}]}) \end{aligned}$$

Hence $h_{top}(\underline{a}, \underline{d}) > h_{top}(\underline{a}, \underline{c})$; as we assert. □

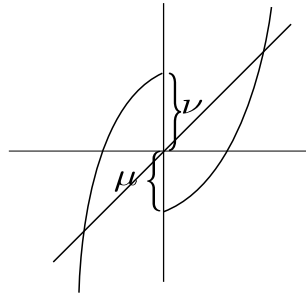
Chapter 3

Cota superior para ciertas burbujas de subshift derivados de sucesiones primarias en el mundo lexicográfico

Proposition 3.0.2. *Para cada (μ, ν) tales que $\mu = \frac{1 + \sqrt{1 + 4\nu}}{2}$ o $\nu = \frac{1 + \sqrt{1 + 4\mu}}{2}$ las respectivas aplicaciones $F_{\mu, \nu}$ tienen entropía positiva excepto en los puntos $(1, 0)$ y $(0, 1)$ respectivamente.*



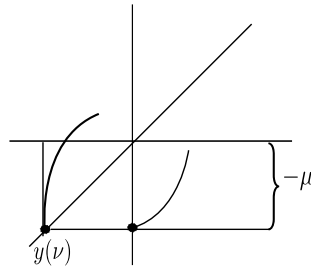
Proof. Consideramos $F_{\mu,\nu}(x) = \begin{cases} -\mu + x^2 & \text{si } x > 0 \\ \nu - x^2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$



El punto fijo del lado izquierdo satisface $\nu - x^2 = x$ entonces $y(\nu) = -\frac{1 + \sqrt{1 + 4\nu}}{2}$

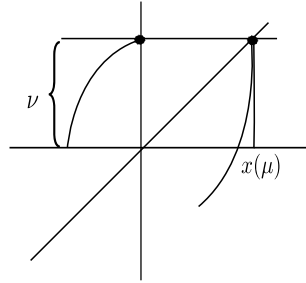
La curva $-\mu = y(\nu)$ o $-\mu = -\frac{1 + \sqrt{1 + 4\nu}}{2}$ satisface que $I(-\mu) = \underline{0}$ (donde $I(x)$ es el itinerario de x).

Así, para (μ, ν) tales que $\mu = \frac{1 + \sqrt{1 + 4\nu}}{2}$ se tiene que $I(-\mu) = \underline{0}$

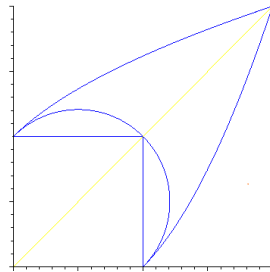


El punto fijo del lado derecho satisface $-\mu + x^2 = x$, entonces $x^2 - x - \mu = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4\mu}}{2}$, lo que implica que $x(\mu) = \frac{1 + \sqrt{1 + 4\mu}}{2}$

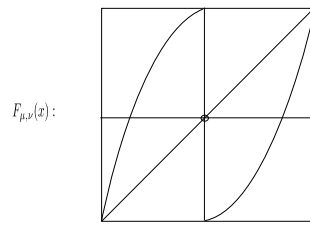
La curva $\nu = x(\mu)$ o $\nu = \frac{1 + \sqrt{1 + 4\mu}}{2}$ satisface $I(\nu) = \underline{1}$



Si $\mu = \nu = 2$, $\mu(2) = \frac{1 + \sqrt{9}}{2} = \frac{1 + 3}{2} = 2$, $\nu(2) = 2$, o sea ambas curvas se encuentran (transversalmente) en $(2, 2)$.



Para $\mu = \nu = 2$ se tiene que $F_{\mu,\nu}(x) = \begin{cases} -2 + x^2 & \text{si } x > 0 \\ 2 - x^2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$



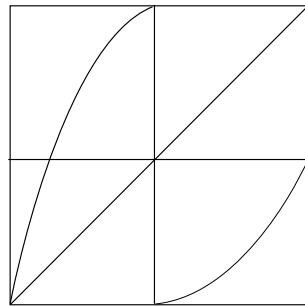
Es claro que $h_{top}(F_{2,2}) = \log(2)$. Se calcula h_{top} en $([-2, 2] \setminus \{0\})$

Preimágen de cero

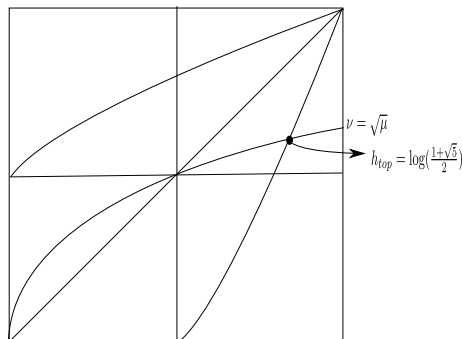
Notamos que $-\mu + x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\mu}$; consideramos $x = \sqrt{\mu}$

Es claro que $I(\sqrt{\mu}) = (1, 0; 1, 0; 1, 0; 1, 0; \dots)$.

Para $\nu = \sqrt{\mu}$ y $\mu = \frac{1 + \sqrt{1 + 4\nu}}{2}$ la aplicación $F_{\mu,\nu}$ tiene el siguiente gráfico



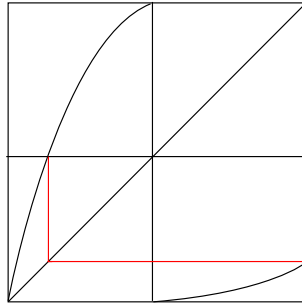
En este caso $h_{top}(F_{\mu,\nu}) = \log\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)$



Preimágen de la preimágen de cero

Consideramos $\nu - x^2 = 0$ o $x(\nu) = -\sqrt{\nu}$ y determinar $x > 0$ talque $-\mu + x^2 = -\sqrt{\nu}$, entonces $x(\nu) = \sqrt{\mu - \sqrt{\nu}}$. La igualdad $\nu = x(\nu)$, $\nu = \sqrt{\mu - \sqrt{\nu}}$ o $\mu = \nu^2 + \sqrt{\nu}$ determina el valor que satisface $I(\nu) = \underline{100}$. Luego la intersección $\mu = \nu^2 + \sqrt{\nu}$ y $\mu = \frac{1+\sqrt{1+4\nu}}{2}$ nos determinan valores (μ_1, ν_1) tales que $I(-\mu_1) = \underline{0}$, $I(\nu_1) = \underline{100}$

la aplicación F_{μ_1, ν_1} tiene el siguiente gráfico



En este caso $h_{top}(F_{\mu_1, \nu_1}) = \log(x_2)$, donde x_2 es la mayor raíz real de $-x^3 + x^2 + 1 = 0$, $x_1 \approx 1,465571232$.

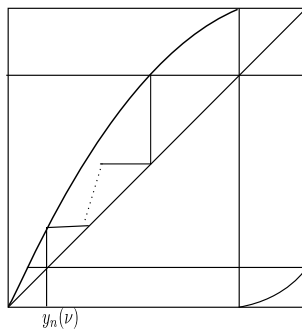
Consideremos $y_2(\nu)$ talque $\nu^2 - y_2(\nu) = -\sqrt{\nu}$, entonces $y_2(\nu) = -\sqrt{\nu^2 + \sqrt{\nu}}$

$y_3(\nu)$ talque $\nu^2 - y_3(\nu) = y_2(\nu)$, entonces $y_3(\nu) = -\sqrt{\nu^2 - y_2(\nu)}$, y en general

$y_n(\nu)$ talque $\nu^2 - y_n(\nu) = y_{n-1}(\nu)$, entonces $y_n(\nu) = -\sqrt{\nu^2 - y_{n-1}(\nu)}$

Sea $x_n(\mu, \nu) > 0$ definido por $-\mu + x_n^2 = y_n(\nu)$, entonces $x_n(\mu, \nu) = \sqrt{\mu + y_n(\nu)}$.

Es facil probar que las curvas $\nu = x_n(\mu, \nu)$ y $\mu = \frac{1+\sqrt{1+4\nu}}{2}$ se intersecan en el punto (μ_n, ν_n) talque $I(\mu_n) = \underline{0}$ y $I(\nu_n) = \underline{10n}$. El gráfico de F_{μ_n, ν_n} es como en la figura



Para $F_{\mu, \nu}$ se tiene $h_{top}(F_{\mu, \nu}) = \log(x_n)$, donde x_n es la mayor raíz real de $(-1)^{n+1}(x^{n+1} -$

$x^{n-1} - 1$). Notamos que $x_1 > x_2 > x_3 > \dots$

Se tiene que $x_n^{n+1} - x_n^{n-1} - 1 = 0$, luego $1 - \frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_n^{n+1}} = 0$ y por lo tanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_n^{n+1}} \right) = 0$$

Sea $\bar{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Si $\bar{x} > 1$ entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x_n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n^{n+1}} = 0$ entonces $1 = \frac{1}{\bar{x}}$ entonces $\bar{x} = 1$ lo que es una contradicción. Por lo tanto $\bar{x} = 1$.

Concluimos que si (μ_n, ν_n) satisfacen

1. $\mu_n = \frac{1 + \sqrt{1 + 4\nu_n}}{2}$
2. $I(-\mu_n) = \underline{0}$, $I(\nu_n) = \underline{10_n}$

$$\text{Entonces } h_{top} \left(F_{\mu_n, \nu_n} \Big|_{\bigcap_{j=0}^{\infty} F_{\mu_n, \nu_n}^{-j}([\mu_n, \nu_n])}^{\infty} \right) = \log(x_n) > 0 \text{ y } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$$

□

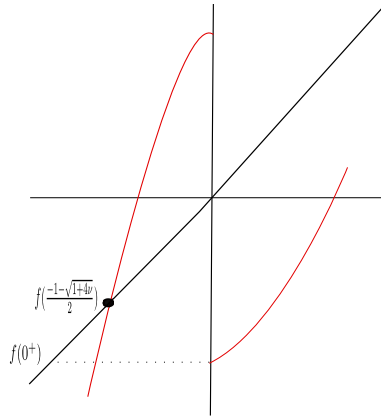
Sean (μ, ν) son tales que $\mu = \frac{1 + \sqrt{1 + 4\nu}}{2}$, $0 < \nu < 2$. Es claro que existe n tal que $\mu_{n+1} < \mu < \mu_n$, en este caso $\log(x_{n+1}) \leq h_{top}(f|_{[-\mu, \nu]}) \leq \log(x_n)$, y por tanto positivo

Lemma 3.0.3. Si (μ, ν) son tales que $\mu = \frac{1 + t + \sqrt{1 + 4\nu}}{2}$ con $t > 0$ entonces $I(-\mu) = \underline{0}$

Proof. Una traslación hacia la derecha de la curva $\mu = \frac{1 + \sqrt{1 + 4\nu}}{2}$ es $\mu = \frac{1 + t + \sqrt{1 + 4\nu}}{2}$; $t > 0$.

Para probar que $I(-\mu)$ es representada por $\underline{0}$ debemos probar que

$$-\mu = F(0^+) < F\left(\frac{-1 - \sqrt{1 + 4\nu}}{2}\right) = \frac{-1 - \sqrt{1 + 4\nu}}{2}$$



Observemos que $F(0^+) = -\mu$

$$F\left(\frac{-1 - \sqrt{1 + 4\nu}}{2}\right) = \nu - \left(\frac{1 + \sqrt{1 + 4\nu}}{2}\right)^2 = \frac{-1 - \sqrt{1 + 4\nu}}{2} = -\frac{1 + \sqrt{1 + 4\nu}}{2}$$

Como $t > 0$

$$-\frac{t}{2} - \frac{\sqrt{1 + 4\nu}}{2} < -\frac{\sqrt{1 + 4\nu}}{2}$$

$$\text{Entonces } -\frac{1}{2} - \frac{t}{2} - \frac{\sqrt{1 + 4\nu}}{2} < -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{1 + 4\nu}}{2}$$

$$\text{Esto es: } -\frac{1 + t + \sqrt{1 + 4\nu}}{2} < -\frac{1 + \sqrt{1 + 4\nu}}{2}$$

$$\text{Así } -\mu < F\left(\frac{-1 - \sqrt{1 + 4\nu}}{2}\right)$$

$$\text{Luego } F(0^+) < F\left(\frac{-1 - \sqrt{1 + 4\nu}}{2}\right)$$

Por lo tanto $\mu = \frac{1 + t + \sqrt{1 + 4\nu}}{2}$ satisface $I(-\mu) = \underline{0}$ □

Lemma 3.0.4. Si (μ, ν) son tales que $\nu = \frac{1 + t + \sqrt{1 + 4\mu}}{2}$ con $t > 0$, entonces $I(\nu) = \underline{1}$

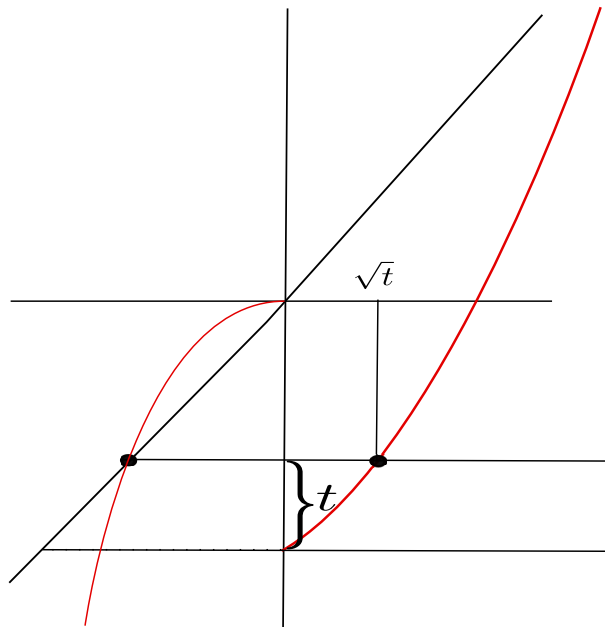
Proof. Análoga a la demostración del lema 3.0.3 □

Lemma 3.0.5. La intersección de las curvas $\mu = t + \frac{1 + \sqrt{1 + 4\nu}}{2}$ y $\mu(t) = t + \frac{1 + \sqrt{1 + 4\sqrt{t}}}{2}$ tiene entropía cero

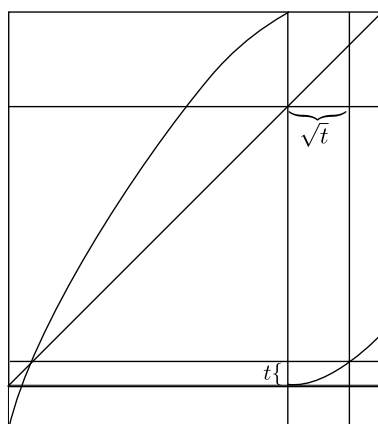
Proof. Ahora consideremos la traslación de la curva $\mu = t + \frac{1 + \sqrt{1 + 4\nu}}{2}$ y

$$F_{\mu(t),\nu}(x) = \begin{cases} \nu - x^2 & \text{si } x < 0 \\ -\left(t + \frac{1 + \sqrt{1 + 4\nu}}{2}\right) + x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Así el gráfico de $F_{\mu(t),0}(x)$ es de la forma



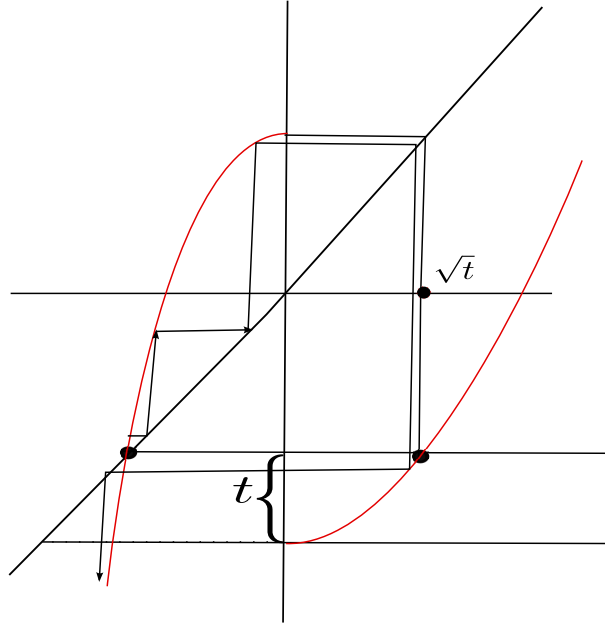
Si ocurre que $0 \leq t < \nu^2$ entonces la aplicación $F_{\mu(t),\nu}$ tiene el siguiente gráfico



En este caso resolvemos la ecuación $-\left(t + \frac{1 + \sqrt{1 + 4\nu}}{2}\right) + x^2 = -\frac{1 + \sqrt{1 + 4\nu}}{2}$, obteniendo $x = \sqrt{t}$.

En este caso la dinámica de $F_{(\mu, \nu)}|_{[-\frac{1 + \sqrt{1 + 4\nu}}{2}, \nu] \setminus \{0\}} : [-\frac{1 + \sqrt{1 + 4\nu}}{2}, \nu] \setminus \{0\} \rightarrow [-\frac{1 + \sqrt{1 + 4\nu}}{2}, \nu]$ tiene entropía positiva

Por lo tanto si además $\nu = \sqrt{t}$ entonces la aplicación es representada por el siguiente gráfico y tiene entropía cero en $[y(\nu), \nu] \setminus \{0\}$



Notamos que cada $0 < x < \sqrt{t}$ satisface $\lim_{n \rightarrow \infty} F_{\mu, \nu}^n(x) = -\infty$

□

Corollary 3.0.6. La entropía de $F_{\mu, \nu}$, para (μ, ν) en la curva $\left(t + \frac{1 + \sqrt{1 + 4\nu}}{2}, \nu\right)$ con $\nu > \sqrt{t}$ tiene entropía positiva

Proof. Sabemos que $\chi(\underline{0}) = \underline{10}$. Para estos valores de μ y ν se tiene que $I(-\mu) = \underline{0}$ y $I(\nu) = 10_n 1 \dots$, por lo tanto $I(\nu) > \underline{10} = \chi(0)$.

De acuerdo a la observación 1.0.11 se cumple que $h_{top} \left(F_{\mu, \nu} |_{\bigcap_{j=0}^{\infty} F_{\mu, \nu}^{-j}([- \mu, \nu])} \right) > 0$

□

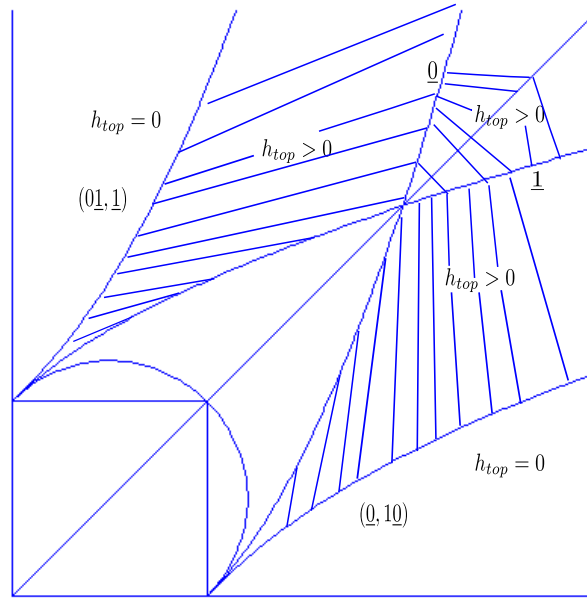
Lemma 3.0.7. La intersección de las curvas $\nu = t + \frac{1 + \sqrt{1 + 4\mu}}{2}$ y $\mu = \sqrt{t}$ tiene entropía cero

Proof. La demostración es análoga a la del lema 3.0.5. □

Corollary 3.0.8. La entropía de la curva $\left(\mu, t + \frac{1 + \sqrt{1 + 4\mu}}{2}\right)$ con $\mu > \sqrt{t}$ tiene entropía positiva

Proof. Análoga a la del corolario 3.0.6 □

Observation 3.0.9. Así tenemos el siguiente gráfico

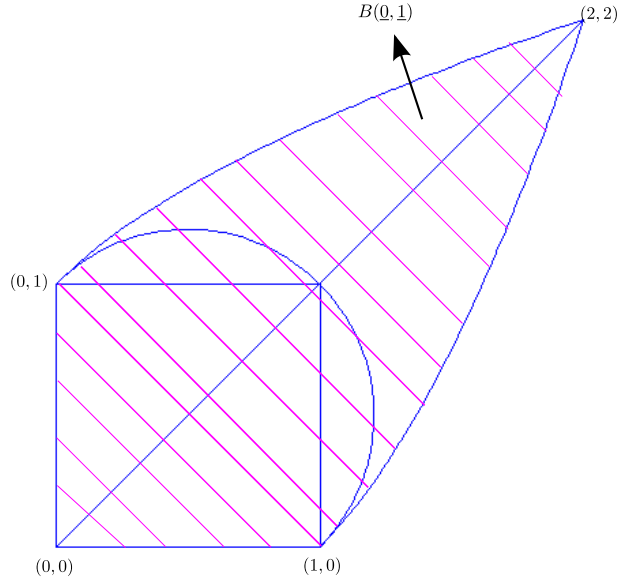


En lo que sigue denotaremos por $B(0, \underline{1})$ o simplemente B a la región de parametros (μ, ν) tales que (μ, ν) pertenecen a la región compacta limitada por las curvas:

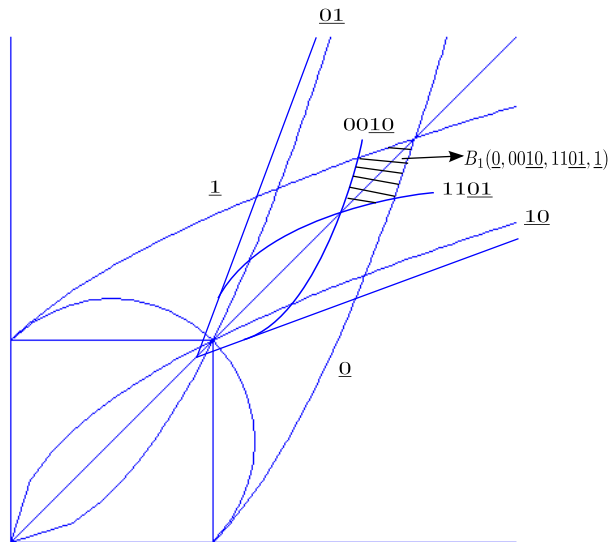
1. $\{(\mu, 0); 0 \leq \mu \leq 1\}$
2. $\{(0, \nu); 0 \leq \nu \leq 1\}$
3. $\left\{\left(\mu, \frac{1 + \sqrt{1 + 4\mu}}{2}\right); 0 \leq \mu \leq 2\right\}$

$$4. \left\{ \left(\frac{1 + \sqrt{1 + 4\nu}}{2}, \nu \right); 0 \leq \nu \leq 2 \right\}.$$

La siguiente figura señala $B(0, \underline{1})$



Lemma 3.0.10. Sea $B_1(\underline{0}, \underline{0010}, \underline{1101}, \underline{1}) = \{(\mu, \nu) \in B; \underline{0} \leq I(-\mu) \leq \underline{0010}; \underline{1101} \leq I(\nu) \leq \underline{1}\}$ y sea $\Lambda(\mu, \nu) = \bigcap_{j=0}^{\infty} F_{\mu, \nu}^{-j}([- \mu, \nu])$ para $(\mu, \nu) \in B_1(\underline{0010}, \underline{1101}, \underline{0}, \underline{1})$, se cumple que $h_{top}(F_{\mu, \nu} |_{\Lambda(\mu, \nu)}) > 0$



Proof. Se cumple $\chi(00\underline{10}) = 1100\underline{10}$, así que $\chi(00\underline{10}) < 11\underline{01}$. Luego si $\underline{0} \leq I(-\mu) \leq 00\underline{10}$ entonces $1\underline{10} \leq \chi(I(-\mu)) \leq 1100\underline{10} < 11\underline{01} \leq I(\nu)$.

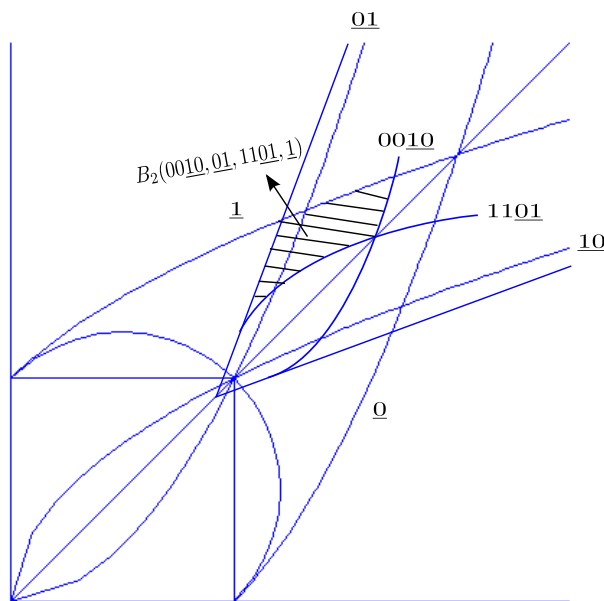
Por lo tanto $h_{top}(F_{\mu,\nu} |_{\Lambda(\mu,\nu)}) \geq h_{top}(\sigma |_{\cap_{j=0}^{\infty} \sigma^{-j}([I(-\mu), 11\underline{01}])}) > 0$

□

Lemma 3.0.11. Sea $B_2(00\underline{10}, \underline{01}, 11\underline{01}, \underline{1}) = \{(\mu, \nu) \in B; 00\underline{10} \leq I(-\mu) \leq \underline{01}, 11\underline{01} < I(\nu) \leq \underline{1}\}$. Sea $\Lambda(\mu, \nu) = \bigcap_{j=0}^{\infty} F_{\mu,\nu}^{-j}([-\mu, \nu])$. Para $(\mu, \nu) \in B_2(00\underline{10}, \underline{01}, 11\underline{01}, \underline{1})$ se cumple $h_{top}(F_{\mu,\nu} |_{\Lambda(\mu,\nu)}) > 0$

Proof. Similar al lema 3.0.10

□



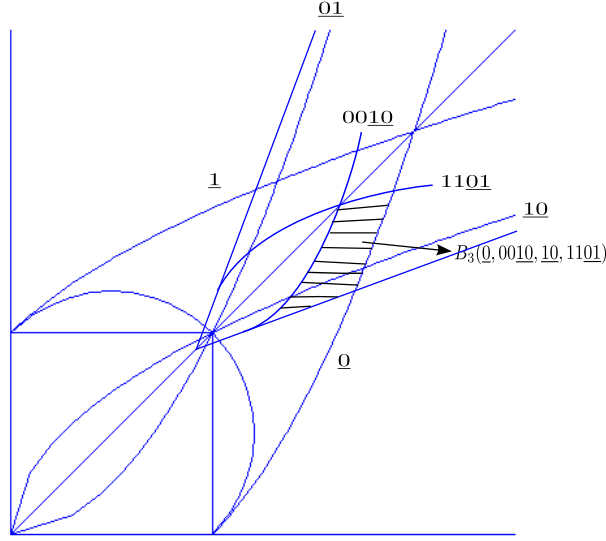
Observation 3.0.12. Notemos que si (μ, ν) son tales que $b(\mu, \nu) = 11\underline{01}$ y $00\underline{10} \leq a(\mu, \nu) = a < 0011\underline{01}$, entonces $h_{top}(F_{\mu,\nu} |_{\Lambda(\mu,\nu)}) > 0$

En efecto $\chi(0011\underline{01}) = 11\underline{01}$ y $0011\underline{01}$ es el menor valor con esta propiedad, por lo tanto $\chi(a(\mu, \nu)) < 11\underline{01}$ y luego $h_{top}(F_{\mu,\nu} |_{\Lambda(\mu,\nu)}) > 0$

Lemma 3.0.13. Sea $B_3(\underline{0}, 00\underline{10}, \underline{10}, 11\underline{01}) = \{(\mu, \nu) \in B; \underline{0} \leq I(-\mu) < 00\underline{10}, \underline{10} \leq I(\nu) \leq 11\underline{01}\}$. Para $(\mu, \nu) \in B_3(\underline{0}, 00\underline{10}, \underline{10}, 11\underline{01})$ se tiene $h_{top}(F_{\mu,\nu} |_{\Lambda(\mu,\nu)}) > 0$

Proof. Similar lema 3.0.10

□



Observation 3.0.14. Notamos que si (μ, ν) es tal que $a(\mu, \nu) = 00\underline{10}$ y $1100\underline{10} < b(\mu, \nu) \leq 110\underline{1}$, entonces $h_{top}(F_{\mu, \nu} |_{\Lambda(\mu, \nu)}) > 0$

En efecto, $\chi(00\underline{10}) = 1100\underline{10}$ y por lo tanto para $1100\underline{10} < b(\mu, \nu)$ se cumple que $h_{top}(F_{\mu, \nu} |_{\Lambda(\mu, \nu)}) > 0$ para $a(\mu, \nu) = 00\underline{10}$

Consideremos $a \in A_\infty$ y $b = b(a) = \sup\{\sigma^j(a); j \in \mathbb{N}\}$.

Sea $B_1(\underline{0}, a\underline{-b}, b_+\underline{a}, \underline{1}) = \{(\mu, \nu) \in B; \underline{0} \leq I(-\mu) \leq a\underline{-b}, b_+\underline{a} \leq I(\nu) \leq \underline{1}\}$,

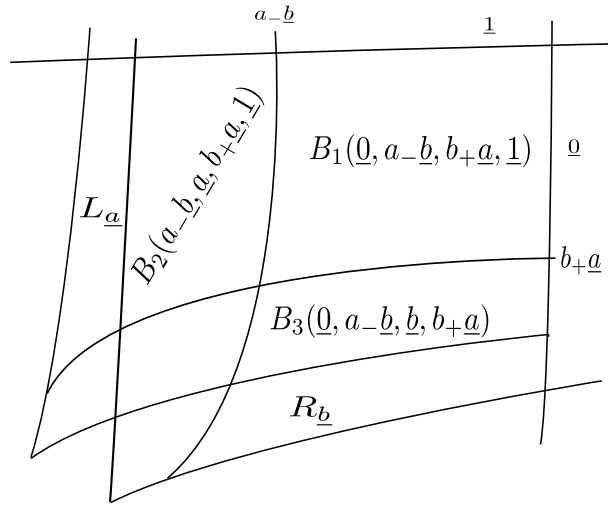
$B_2(a\underline{-b}, \underline{a}, b_+\underline{a}, \underline{1}) = \{(\mu, \nu) \in B; a\underline{-b} \leq I(-\mu) \leq \underline{a}, b_+\underline{a} < I(\nu) \leq \underline{1}\}$,

$B_3(\underline{0}, a\underline{-b}, \underline{b}, b_+\underline{a}) = \{(\mu, \nu) \in B; \underline{0} \leq I(-\mu) < a\underline{-b}, \underline{b} \leq I(\nu) \leq b_+\underline{a}\}$.

Para $(\mu, \nu) \in B_1 \cup B_2 \cup B_3$ sea $\Lambda(\mu, \nu) = \bigcap_{j=0}^{\infty} F_{\mu, \nu}^{-j}([-\mu, \nu])$

Proposition 3.0.15. Si $(\mu, \nu) \in B_1 \cup B_2 \cup B_3$ se cumple que $h_{top}(F_{\mu, \nu} |_{\Lambda(\mu, \nu)}) > 0$

Proof. Análogo al lema 3.0.10, considerando la observación 1.0.11



□

Observation 3.0.16. 1. La región $B_2(a-b, \underline{a}, b+\underline{a}, \underline{1})$ incluye la región $L_{\underline{a}} = \{(\mu, \nu); I(-\mu) = \underline{a}, b+\underline{a} < I(\nu) \leq \underline{1}\}$ que tiene interior no vacío.

2. La región $B_3(\underline{0}, a-b, \underline{b}, b+\underline{a})$ incluye la región $R_{\underline{b}} = \{(\mu, \nu); I(\nu) = \underline{b}, \underline{0} \leq I(-\mu) < a-b\}$ que tiene interior no vacío.

Para $a \in A_\infty^\infty$ sea $C_1(\underline{a}, b+\underline{a}) = \{(\mu, \nu) \in B; I(-\mu) = \underline{a}, I(\nu) = b+\underline{a}\}$.

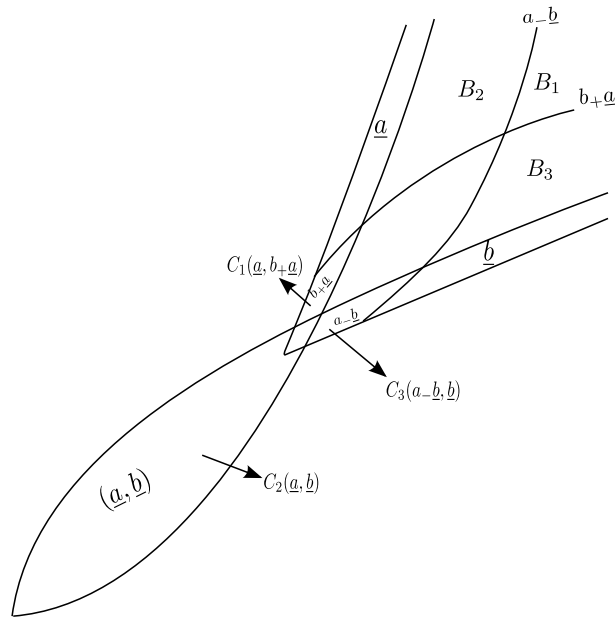
$C_2(\underline{a}, \underline{b}) = \{(\mu, \nu) \in B; I(-\mu) = \underline{a}, I(\nu) = \underline{b}\}$

$C_3(a-b, \underline{b}) = \{(\mu, \nu) \in B; I(-\mu) = a-b, I(\nu) = \underline{b}\}$

Proposition 3.0.17. Si $(\mu, \nu) \in C_1 \cup C_2 \cup C_3$, entonces $h_{top}(F_{\mu, \nu} |_{\Lambda(\mu, \nu)}) = 0$

Proof. Como $\chi(\underline{a}) = b+\underline{a}$, entonces $h_{top}(F_{\mu, \nu} |_{\Lambda(\mu, \nu)}) = 0$ si $(\mu, \nu) \in C_1 \cup C_2$

Por otro lado como $\chi(a-b) = b+a-b$, entonces $h_{top}(F_{\mu, \nu} |_{\Lambda(\mu, \nu)}) = 0$ si $(\mu, \nu) \in C_3$ □



Observation 3.0.18. 1. Notemos que la aplicación $(\mu, \nu) \rightarrow (I(-\mu), I(\nu))$ de $B(\underline{0}, \underline{1})$

en $Min_2 \times Max_2$ no es continua. En efecto sea (μ_n, ν_n) tales que $I(-\mu_n) = \underline{001(01)_n}$ y $I(\nu_n) = 1100\underline{10}$. Se tiene

$$I(-\mu_n) \longrightarrow 001\underline{01} = 001\underline{0} = a-\underline{b}, a = \underline{01}, b = \underline{10}, I(\nu_n) = 1100\underline{10}$$

Por lo tanto $(I(-\mu_n), I(\nu_n)) \longrightarrow (00\underline{10}, 1100\underline{10})$

Para $(\bar{\mu}, \bar{\nu}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\mu_n, \nu_n)$ se tiene $(I(-\bar{\mu}), I(\bar{\nu})) = (00\underline{10}, \underline{10})$.

Por lo tanto $\lim_{n \rightarrow \infty} (I(-\mu_n), I(\nu_n)) \neq (I(\bar{\mu}), I(\bar{\nu}))$ y $(\bar{\mu}, \bar{\nu}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\mu_n, \nu_n)$

2. Hay una cantidad enumerable de puntos de discontinuidad para la aplicación $(\mu, \nu) \rightarrow$

$(I(-\mu), I(\nu))$. En efecto, basta considerar $a \in A_\infty^\infty$ y (μ_n, ν_n) tales que $a(\mu_n, \nu_n) =$

$a-\underline{b}$; $b(\mu_n, \nu_n) = \underline{b+a-b^n}$, con $b = b(a)$. Se puede verificar que $(\mu_n, \nu_n) \rightarrow (\bar{\mu}, \bar{\nu})$

tal que $a(\bar{\mu}, \bar{\nu}) = a-\underline{b}$ y $b(\bar{\mu}, \bar{\nu}) = \underline{b}$. Como $\lim a(\mu_n, \nu_n) = a-\underline{b}$ y $\lim b(\mu_n, \nu_n) =$

$b+a-\underline{b}$, se tiene $I(\bar{\mu}), I(\bar{\nu}) \neq \lim(I(\mu_n), I(\nu_n))$

3.1 Teorema C

Theorem 3.1.1. Si $a = \underline{a_1 a_2 \dots a_t} \in A_\infty^\infty$ entonces $h_{top}(a-\underline{b}, b+\underline{a}) = \frac{\log(2)}{t}$

En lo que sigue para $a \in A_\infty$, denotaremos por $G(a)$ la gorgona generada por (a, b) y por $BG(a) = \{(\mu, \nu); 1\} a(\mu, \nu) = \alpha, b(\mu, \nu) = b(\alpha)$, para algún $\alpha \in G(a)$ ó $2\} a(\mu, \nu) \in C_1(\alpha, \beta_+ \underline{\alpha}) \cup C_3(\alpha_- \underline{\beta}, \underline{\beta})$, algún $\alpha \in G(a), \beta = b(\alpha)$

Proposition 3.1.2. *Dado el valor (μ, ν) talque $h_{top}(\mu, \nu) = 0$, entonces vale una de las siguientes condiciones:*

1. $(\mu, \nu) \in H(\underline{0}, \underline{10}) \cup H(\underline{01}, \underline{1})$, donde $H(\underline{0}, \underline{10}) = \{(\mu, \nu) : a(\mu, \nu) = \underline{0} \text{ y } b(\mu, \nu) \leq \underline{10}\}$ y $H(\underline{01}, \underline{1}) = \{(\mu, \nu) : a(\mu, \nu) \geq \underline{01} \text{ y } b(\mu, \nu) = \underline{1}\}$
2. Existe $a \in A_\infty$ talque $(\mu, \nu) \in BG(a)$
3. Existe $a \in A_\infty$ y una sucesión $a_n \in G(a)$ tales que $a(\mu, \nu) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, $b(\mu, \nu) = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$, $b_n = b(a_n)$ y podemos encontrar una sucesión (μ_n, ν_n) tales que $\mu_n \rightarrow \mu, \nu_n \rightarrow \nu$ con $a(\mu_n, \nu_n) = a_n, b(\mu_n, \nu_n) = b_n$

Proof. 1. Si ocurre que $(\mu, \nu) \notin B(\underline{0}, \underline{1})$, entonces $(\mu, \nu) \in H(\underline{0}, \underline{10}) \cup H(\underline{01}, \underline{1})$ ya que en otro caso $h_{top}(\mu, \nu) > 0$

2. Suponemos que $(\mu, \nu) \in B(\underline{0}, \underline{1})$, entonces no puede ocurrir que $\mu = \frac{1 + \sqrt{1 + 4\nu}}{2}$, $\nu > 0$ o $\nu = \frac{1 + \sqrt{1 + 4\mu}}{2}$, $\mu > 0$.

Si ocurre que existe $a \in A_\infty$ y $\alpha \in G(a)$ tal que $a(\mu, \nu) = \alpha$ y $b(\mu, \nu) = \beta(\alpha)$ el resultado está listo.

Si ocurre que $(\mu, \nu) \in C_1(\underline{\alpha}, \beta_+ \underline{\alpha}) \cup C_3(\alpha_- \underline{\beta}, \underline{\beta})$; algún $\alpha \in G(a)$, algún $a \in A_\infty$, el resultado esta listo.

3. Para $a \in A_\infty$ definamos $B(\underline{a}, a_- \underline{b}, \underline{b}, b_+ \underline{a}) = \{(\mu, \nu); a_- \underline{b} \leq a(\mu, \nu) \leq a \text{ y } \underline{b} \leq b(\mu, \nu) \leq b_+ \underline{a}\}$. Sea $D = B(\underline{0}, \underline{1}) \setminus \bigcup_{a \in A_\infty} BG(a) \cup B(\underline{a}, a_- \underline{b}, \underline{b}, b_+ \underline{a})$.

Por la proposición 3.0.15 si $(\mu, \nu) \in D$ entonces $h_{top}(\mu, \nu) > 0$, por lo tanto debe ser $(\mu, \nu) \in BG(a)$ o $(\mu, \nu) \in B(\underline{a}, a_- \underline{b}, \underline{b}, b_+ \underline{a})$ para algún $a \in A_\infty$.

Notamos que para todo $(\tilde{\mu}, \tilde{\nu}) \in B(\underline{a}, a_- \underline{b}, \underline{b}, b_+ \underline{a})$ vale $h_{top}(\tilde{\mu}, \tilde{\nu}) \leq \frac{1}{\#(a)} \log 2$, donde $\#(a) = \text{largo de } a$ (consecuencia del teorema 3.1.1).

Si ocurre que $(\mu, \nu) \in BG(a)$ el resultado esta probado. Por tanto asumimos que $(\mu, \nu) \in B(\underline{a}, a-\underline{b}, \underline{b}, b+\underline{a})$

No puede ocurrir que $a(\mu, \nu) = a-\underline{b}$ y $b(\mu, \nu) = \underline{b}$ o $b(\mu, \nu) > \underline{b}$, pues en el primer caso $(\mu, \nu) \in BG(a)$ y en el segundo $h_{top}(\mu, \nu) > 0$. También, no puede ocurrir que $b(\mu, \nu) = b+\underline{a}$ y $a(\mu, \nu) = \underline{a}$ o $a(\mu, \nu) < \underline{a}$, pues en el primer caso $a(\mu, \nu) \in BG(a)$ y en el segundo $h_{top}(\mu, \nu) > 0$, por lo tanto (μ, ν) pertenece al interior de $B(\underline{a}, a-\underline{b}, \underline{b}, b+\underline{a})$.

Debe haber $\alpha_1 \in G(a)$ tal que $(\mu, \nu) \in B(\underline{\alpha}_1, (\alpha_1)-\underline{\beta}_1, \underline{\beta}_1, (\beta_1)+\underline{\alpha}_1)$, con $\underline{\beta}_1 = b(\alpha_1)$. Ya que en caso contrario $h_{top}(F_{\mu, \nu} |_{\Lambda(\mu, \nu)}) > 0$. En efecto, si para todo $\alpha \in G(a)$ ocurre que (μ, ν) no pertenece a $B(\underline{\alpha}_1, (\alpha_1)-\underline{\beta}_1, \underline{\beta}_1, (\beta_1)+\underline{\alpha}_1)$, entonces debe haber $\alpha_2 \in G(a)$ para el cual

$$(\mu, \nu) \in B_1(\underline{0}, (\alpha_2)-\underline{\beta}_2, (\beta_2)+\underline{\alpha}_2, \underline{1}) \cup B_2((\alpha_2)-\underline{\beta}_2, \underline{\alpha}_2, (\beta_2)+\underline{\alpha}_2, \underline{1}) \cup B_3(\underline{0}, (\alpha_2)-\underline{\beta}_2, \underline{\beta}_2, (\beta_2)+\underline{\alpha}_2).$$

De acuerdo a 3.0.15 se cumple $h_{top}(\mu, \nu) > 0$.

Debe ocurrir $\#(\alpha_1) \geq 2\#(a)$ y entonces para todo

$$\tilde{\mu}, \tilde{\nu} \in B(\underline{\alpha}_1, (\alpha_1)-\underline{\beta}_1, \underline{\beta}_1, (\beta_1)+\underline{\alpha}_1), \text{ vale } h_{top}(\tilde{\mu}, \tilde{\nu}) \leq \frac{1}{\#(\alpha_1)} \log 2 \leq \frac{1}{2\#(a)} \log 2.$$

Notamos además que $B(\underline{\alpha}_1, (\alpha_1)-\underline{\beta}_1, \underline{\beta}_1, (\beta_1)+\underline{\alpha}_1) \subset \text{int}(B(\underline{a}, a-\underline{b}, \underline{b}, b+\underline{a}))$.

Sucesivamente, construimos una sucesión $(\alpha_n), \alpha_{n+1} \in G(\alpha_n)$ tal que

$$(\mu, \nu) \in \bigcap_{j=1}^{n+1} B(\underline{\alpha}_j, (\alpha_j)-\underline{\beta}_j, \underline{\beta}_j, (\beta_j)+\underline{\alpha}_j), \text{ con}$$

$$B(\underline{\alpha}_{i+1}, (\alpha_{i+1})-\underline{\beta}_{i+1}, \underline{\beta}_{i+1}, (\beta_{i+1})+\underline{\alpha}_{i+1}) \subset \text{int}(B(\underline{\alpha}_i, (\alpha_i)-\underline{\beta}_i, \underline{\beta}_i, (\beta_i)+\underline{\alpha}_i)) \text{ y}$$

$$h_{top}(\tilde{\mu}, \tilde{\nu}) \leq \frac{1}{2^{n+1}\#(a)} \log 2, \text{ para}$$

$$(\tilde{\mu}, \tilde{\nu}) \in B(\underline{\alpha}_{n+1}, (\alpha_{n+1})-\underline{\beta}_{n+1}, \underline{\beta}_{n+1}, (\beta_{n+1})+\underline{\alpha}_{n+1}).$$

Claro que si $(\epsilon, \delta) \in \bigcap_{j=1}^{\infty} B(\underline{\alpha}_j, (\alpha_j)-\underline{\beta}_j, \underline{\beta}_j, (\beta_j)+\underline{\alpha}_j)$, entonces $h_{top}(\epsilon, \delta) = 0$.

Observamos que la condición $(\alpha_i)-\underline{\beta}_i \leq a(\mu, \nu) \leq \underline{\alpha}_i$, $\underline{\beta}_i \leq b(\mu, \nu) \leq (\beta_i)+\underline{\alpha}_i$

y el hecho que $(\alpha_i)-\underline{\beta}_i \leq (\alpha_{i+1})-\underline{\beta}_{i+1} \leq \underline{\alpha}_{i+1} \leq \underline{\alpha}_i, \forall i$ nos dice que $a(\mu, \nu) =$

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} [(\alpha_j)-\underline{\beta}_j, \underline{\alpha}_j], \text{ } b(\mu, \nu) = \bigcap_{j=1}^{\infty} [\underline{\beta}_j, (\beta_j)+\underline{\alpha}_j] \text{ y lo mismo ocurre para todo}$$

$$(\epsilon, \delta) \in \bigcap_{j=1}^{\infty} B(\underline{\alpha}_j, (\alpha_j)-\underline{\beta}_j, \underline{\beta}_j, (\beta_j)+\underline{\alpha}_j).$$

La sucesión $(\alpha_i)_{i=1}^{\infty}$ es la señalada en la conclusión.

3.1.1 Algoritmo periodo primo

Theorem 3.1.3. *Dado un período t primo, existe un algoritmo que nos permite encontrar $(t - 1)$ sucesiones minimales $a \in A_\infty^\infty$ tales que $Per(a) = t$*

Proof. Comenzemos con el período primo $t = 3$

Sea $a = \underline{001}$, $b = \underline{100}$, entonces

$$a_{-b} = 000\underline{100} = 000\underline{1}$$

$$b_{+a} = 101\underline{001} = \underline{1010}, \text{ entonces}$$

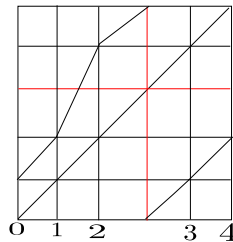
$$a_{-b} = 000\underline{1} = 0 \rightarrow \sigma(000\underline{1}) = \underline{001} = 1 \rightarrow \sigma(\underline{001}) = \underline{010} = 2 \rightarrow \sigma(\underline{010}) = \underline{100} = 3 \rightarrow \sigma(\underline{100}) = \underline{001} = 1$$

$$b_{+a} = \underline{1010} = 4 \rightarrow \sigma(\underline{1010}) = \underline{010} = 2$$

Así tenemos la siguiente permutación asociada a los iterados de estas dos sucesiones

$$p = \left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

De donde obtenemos el siguiente gráfico

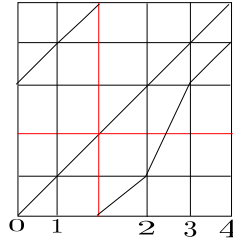


Que representa la dinámica de $\sigma|_{[a_{-b}, b_{+a}]}$ con $a_{-b} = 000\underline{1}$ y $b_{+a} = \underline{1010}$

Veamos ahora $p \cdot p$

$$p \cdot p = \left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|ccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \end{array} \right) = p^2$$

Lo que genera el siguiente gráfico



Que representa la dinámica de $\sigma|_{[a_-, b_+ \underline{a}]}$ con

$$a_- \underline{b} = 01\underline{011} \text{ y } b_+ \underline{a} = 1\underline{110}, \text{ donde}$$

$$a = \underline{011} \text{ y } Per(a) = 3$$

Veamos ahora a $p \cdot p^2$

$$p \cdot p^2 \left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 1 \end{array} \right) = p^3$$

El gráfico que genera este arreglo no representa dinámica del mundo Lexicográfico Claramente las dos sucesiones minimales de período 3 en A_∞^∞ son 001 y 011

- Trabajemos ahora con periodo primo $t = 5$

Sea $a = \underline{00001}$, $b = \underline{10000}$, entonces

$$a_- \underline{b} = 00000\underline{10000} = 00000\underline{1} \text{ y } b_+ \underline{a} = 10001\underline{00001} = 1\underline{00010}, \text{ así}$$

$$a_- \underline{b} = 00000\underline{1} = 0 \rightarrow \sigma(00000\underline{1}) = 0000\underline{1} = 1 \rightarrow \sigma(0000\underline{1}) = 0001\underline{0} = 2 \rightarrow \sigma(0001\underline{0}) =$$

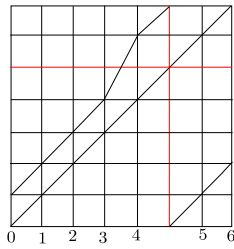
$$\underline{00100} = 3 \rightarrow \sigma(\underline{00100}) = \underline{01000} = 4 \rightarrow \sigma(\underline{01000}) = \underline{10000} = 5 \rightarrow \sigma(\underline{10000}) = \underline{00001} = 1$$

$$b_+ \underline{a} = 1\underline{00010} = 6 \rightarrow \sigma(1\underline{00010}) = \underline{00010} = 2$$

Así tenemos la siguiente permutación asociada a los iterados de estas dos sucesiones

$$p = \left(\begin{array}{ccccc|cc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

Que genera el gráfico siguiente:



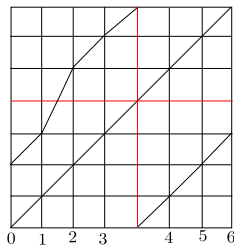
Que representa la dinámica de $\sigma|_{[a-b, b+a]}$ con

$a-b = 000001$ y $b+a = 100010$, donde $a = 00001$ y $Per(a) = 5$

Ahora

$$\begin{aligned}
 p \cdot p &= \left(\begin{array}{ccccc|cc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{cccccc|cc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & a & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & a & 1 & 2 \end{array} \right) \\
 &= \left(\begin{array}{cccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \end{array} \right) = p^2
 \end{aligned}$$

Que genera el gráfico



Que representa la dinámica de $\sigma|_{[a-b, b+a]}$ con

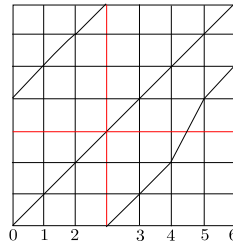
$a-b = 001001$ y $b+a = 101010$, donde

$a = 00101$ y $Per(a) = 5$

Ahora

$$\begin{aligned}
 p \cdot p^2 &= \left(\begin{array}{cccc|cc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{cccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \end{array} \right) \\
 &= \left(\begin{array}{ccc|cccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \right) = p^3
 \end{aligned}$$

Que genera el gráfico



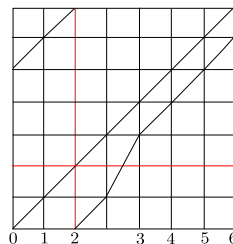
Que representa la dinámica de $\sigma|_{[a_{-b}, b_{+a}]}$ con

$a_{-b} = 0101011$ y $b_{+a} = 110110$, donde $a = 01011$ y $Per(a) = 5$

Ahora

$$\begin{aligned}
 p \cdot p^3 &= \left(\begin{array}{cccc|cc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{ccc|cccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \right) \\
 &= \left(\begin{array}{cc|cccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \right) = p^4
 \end{aligned}$$

Que genera el gráfico



Que representa a

$a_{-}\underline{b} = 0\underline{11101}$ y $b_{+}\underline{a} = 1\underline{11110}$, donde $a = \underline{01111}$ y $Per(a) = 5$

Luego:

$$\begin{aligned} p \cdot p^4 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & | & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & | & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & | & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & | & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & | & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & | & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} = p^5 \end{aligned}$$

El gráfico que genera este arreglo no representa dinámica del mundo Lexicográfico. Claramente las sucesiones minimales de período 5 en A_{∞}^{∞} son $\underline{00001}$, $\underline{00101}$, $\underline{01011}$ y $\underline{01111}$.

Las otras dos sucesiones minimales de período 5 son $\underline{00111} = \underline{a_{-}d_{+}}$ con $a = \underline{01}$, $d = \underline{110}$ y $\underline{00011} = \underline{a_{-}d_{+}}$ con $a = \underline{001}$, $d = \underline{10}$. Es fácil ver que $h_{top}(\underline{00111}, \underline{11100}) = h_{top}(\underline{00011}, \underline{11000}) = h_{top}(\underline{01}, \underline{110}) = h_{top}(\underline{001}, \underline{10}) > 0$

• Trabajemos ahora con período primo $t = 7$

Sea $a = \underline{0000001} = \underline{0_6 1}$, $b = \underline{1000000} = \underline{10_6}$, así

$a_{-}\underline{b} = \underline{00_6 1}$ y $b_{+}\underline{a} = \underline{10_5 10}$. luego

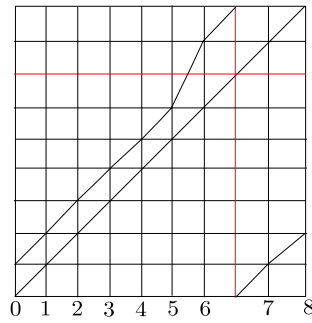
$a_{-}\underline{b} = \underline{00_6 1} = 0 \rightarrow \sigma(\underline{00_6 1}) = \underline{0_6 1} = 1 \rightarrow \sigma(\underline{0_6 1}) = \underline{0_5 10} = 2 \rightarrow \sigma(\underline{0_5 10}) = \underline{0_4 100} = 3 \rightarrow \sigma(\underline{0_4 100}) = \underline{0_3 10_3} = 4 \rightarrow \sigma(\underline{0_3 10_3}) = \underline{0_2 10_4} = 5 \rightarrow \sigma(\underline{0_2 10_4}) = \underline{010_5} = 6 \rightarrow \sigma(\underline{010_5}) = \underline{10_6} = 7$

$b_{+}\underline{a} = \underline{10_5 10} = 8 \rightarrow \sigma(\underline{10_5 10}) = \underline{0_5 10} = 1$

Así tenemos la siguiente permutación asociada a los iterados de estas dos sucesiones

$$p = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & | & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & | & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Lo que genera el gráfico



Que representa la dinámica de $\sigma |_{[a_{-b}, b_{+a}]}$ con

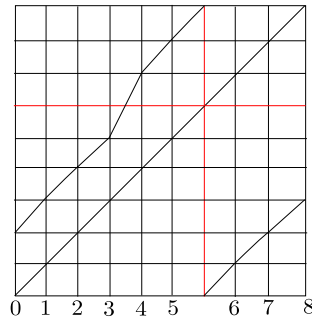
$a_{-b} = 00\underline{6}1$ y $b_{+a} = 10\underline{5}10$, donde

$a = \underline{000000}1$ y $Per(a) = 7$

Ahora sea

$$p^2 = p \cdot p = \left(\begin{array}{cccccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 1 & 2 & 3 \end{array} \right)$$

Lo que genera el gráfico



Que representa la dinámica de $\sigma |_{[a_{-b}, b_{+a}]}$ con

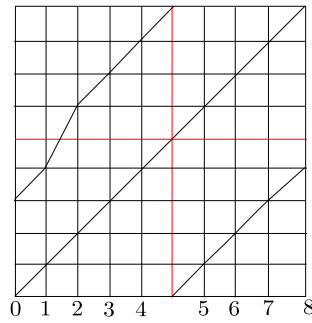
$a_{-b} = \underline{0001000}1$ y $b_{+a} = \underline{100100}10$, donde

$a = \underline{000100}1$ y $Per(a) = 7$

Ahora sea

$$p^3 = p \cdot p^2 = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \right)$$

Lo que genera el gráfico



Que representa la dinámica de $\sigma |_{[a_{-b}, b_{+a}]}$ con

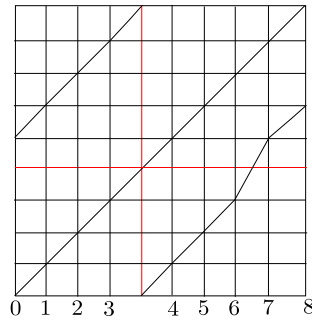
$a_{-b} = \underline{00101001}$ y $b_{+a} = \underline{10101010}$, donde

$a = \underline{0010101}$ y $Per(a) = 7$

Ahora sea

$$p^4 = p \cdot p^3 = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \right)$$

Lo que genera el gráfico



Que representa la dinámica de $\sigma |_{[a_{-b}, b_{+a}]}$ con

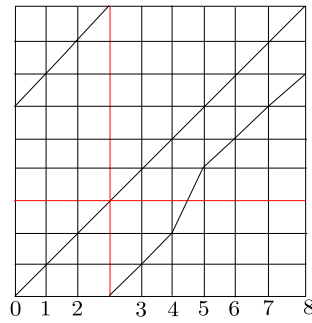
$a_{-b} = \underline{01010101}$ y $b_{+a} = \underline{11010110}$, donde

$a = \underline{0101011}$ y $Per(a) = 7$

Ahora sea

$$p^5 = p \cdot p^4 = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \right)$$

Lo que genera el gráfico



Que representa la dinámica de $\sigma|_{[a_{-b}, b_{+a}]}$ con

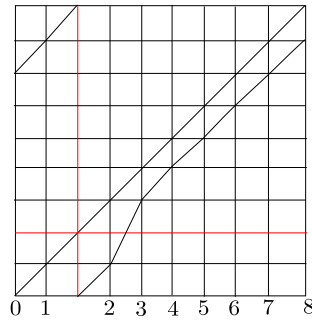
$a_{-b} = \underline{01101101}$ y $b_{+a} = \underline{11101110}$, donde

$a = \underline{0110111}$ y $Per(a) = 7$

Ahora sea

$$p^6 = p \cdot p^5 = \left(\begin{array}{c|cccccccc} 0 & 1 & & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline 6 & 7 & & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \right)$$

Lo que genera el gráfico



Que representa la dinámica de $\sigma|_{[a_{-b}, b_{+a}]}$ con

$a_{-b} = \underline{01111101}$ y $b_{+a} = \underline{11_6 1}$, donde

$a = \underline{01_6}$ y $Per(a) = 7$

Ahora sea

$$p^7 = p \cdot p^6 = \left(\begin{array}{c|cccccccc} 0 & & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline 7 & & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 1 \end{array} \right)$$

El gráfico que genera este arreglo no representa dinámica del mundo Lexicográfico. Claramente las sucesiones minimales de período 7 en A_∞ son $\underline{0_6 1}$, $\underline{0001001}$, $\underline{0010101}$, $\underline{0101011}$, $\underline{0110111}$ y $\underline{01_6}$

Notamos que las otras sucesiones minimales de período 7 son:

1. $\underline{00001111} = \underline{a_-d_+}$ con $a = \underline{0001}, d = \underline{110}$
2. $\underline{00011111} = \underline{a_-d_+}$ con $a = \underline{001}, d = \underline{1110}$
3. $\underline{0000101} = \underline{a_-d_+}$ con $a = \underline{0001}, d = \underline{100}$
4. $\underline{0011101} = \underline{a_-d_+a}$ con $a = \underline{01}, d = \underline{110}$
5. $\underline{0001011} = \underline{a_-dd_+}$ con $a = \underline{001}, d = \underline{10}$
6. $\underline{0001101} = \underline{a_-d_+}$ con $a = \underline{001}, d = \underline{1100}$
7. $\underline{0010111} = \underline{a_-d_+}$ con $a = \underline{0011}, d = \underline{110}$
8. $\underline{0011111} = \underline{a_-d_+}$ con $a = \underline{01}, d = \underline{11110}$
9. $\underline{0011011} = \underline{a_-d_+}$ con $a = \underline{01}, d = \underline{11010}$
10. $\underline{0000011} = \underline{a_-d_+}$ con $a = \underline{00001}, d = \underline{10}$
11. $\underline{0010011} = \underline{a_-d_+}$ con $a = \underline{00101}, d = \underline{10}$
12. $\underline{0101111} = \underline{a_-d_+}$ con $a = \underline{011}, d = \underline{1110}$

De acuerdo al teorema A todos ellos satisfacen $h_{top}(\alpha, b(\alpha)) = h_{top}(\underline{a}, \underline{d})$ y por la observación 1.0.11 se tiene $h_{top}(\underline{a}, \underline{d}) > 0$

Supongamos que el resultado es válido para todo período primo $t < (2n - 1), n \geq 6$.

- Período primo $t = 2n - 1$

Sea $a = \underline{0_{t-1}1}, b(a) = \underline{10_{t-1}}$, así

$$a_- \underline{b} = 0_t \underline{10_{t-1}} = \underline{00_{t-1}1},$$

$$b_+ \underline{a} = 10_{t-2} \underline{10_{t-1}1} = \underline{10_{t-2}10}$$

$$a_- \underline{b} = \underline{00_{t-1}1} = 0 \rightarrow \sigma(\underline{00_{t-1}1}) = \underline{0_{t-1}1} = 1 \rightarrow \sigma(\underline{0_{t-1}1}) = \underline{0_{t-2}10} = 2 \rightarrow \sigma(\underline{0_{t-2}10}) =$$

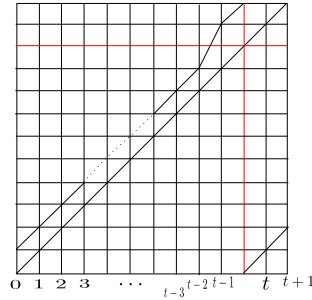
$$\underline{0_{t-3}100} = 3 \rightarrow \dots \rightarrow \underline{010_{t-2}} = t - 1 \rightarrow \sigma(\underline{010_{t-2}}) = \underline{10_{t-1}} = t \rightarrow \sigma(\underline{10_{t-1}}) = \underline{0_{t-1}1} = 1$$

$$b_+ \underline{a} = \underline{10_{t-2}10} \rightarrow \sigma(\underline{10_{t-2}10}) = \underline{0_{t-2}10} = 2$$

De donde obtenemos la siguiente permutación asociada a los iterados de estas dos sucesiones

$$p = \left(\begin{array}{cccccc|cc} 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & t-2 & t-1 & t & t+1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & t-1 & t & 1 & 2 \end{array} \right)$$

Cuyo gráfico es



Así obtenemos

$$a_{\underline{b}} = \underline{00_{t-1}1},$$

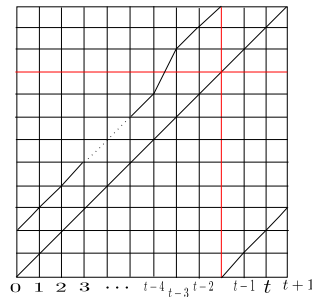
$$b_{\underline{a}} = \underline{10_{t-2}10}, \text{ donde}$$

$$a = \underline{0_{t-1}1} \text{ y } b = \underline{10_{t-1}} \text{ y claramente } Per(a) = t$$

Tenemos

$$p \cdot p = p^2 = \left(\begin{array}{cccccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & t-3 & t-2 & t-1 & t & t+1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & t-1 & t & 1 & 2 & 3 \end{array} \right)$$

Cuyo gráfico asociado es



Observemos que 2 no es divisor de t ya que t es primo, así

$$a_{-}b = \underline{00_{\frac{t-3}{2}}10_{\frac{t-1}{2}}1}$$

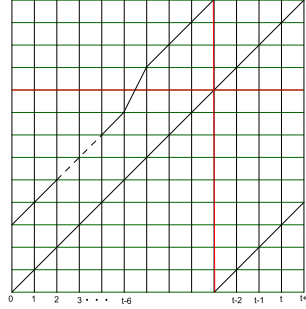
$$b_{+}a = \underline{10_{\frac{t-3}{2}}10_{\frac{t-3}{2}}10}, \text{ donde}$$

$$a = \underline{0_{\frac{t-1}{2}}10_{\frac{t-3}{2}}1}, \text{ y } Per(a) = t$$

Observemos que a es de la forma $\underline{0_{m+1}10_m1}$, donde $m + 1 = \frac{t-1}{2}, m = \frac{t-3}{2}$

Tenemos

$$p^3 = \left(\begin{array}{cccccc|cccc} 0 & 1 & 2 & \dots & t-4 & t-3 & t-2 & t-1 & t & t+1 \\ 3 & 4 & 5 & \dots & t-1 & t & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \right)$$



Observemos que 3 no es divisor de t ya que t es primo. Debe entonces ocurrir que $t - 2$ ó $t - 1$ es múltiplo de 3.

1. Si $t - 2$ es múltiplo de 3, entonces

$$a_{-}b = \underline{00_{\frac{t-5}{3}}10_{\frac{t-2}{3}}10_{\frac{t-2}{3}}1}$$

$$b_{+}a = \underline{10_{\frac{t-5}{2}}10_{\frac{t-2}{2}}10_{\frac{t-5}{2}}10}, \text{ donde}$$

$$a = \underline{0_{\frac{t-2}{3}}10_{\frac{t-2}{3}}10_{\frac{t-5}{3}}1} \text{ y } Per(a) = t$$

Observemos que a es de la forma $a = \underline{0_{m+1}10_{m+1}10_m1}$, donde $m = \frac{t-5}{3}$

2. Si $t - 1$ es múltiplo de 3, entonces

$$a_{-}b = \underline{00_{\frac{t-4}{3}}10_{\frac{t-4}{3}}10_{\frac{t-1}{3}}1}$$

$$b_{+}a = \underline{10_{\frac{t-4}{3}}10_{\frac{t-4}{3}}10_{\frac{t-4}{3}}10}, \text{ donde}$$

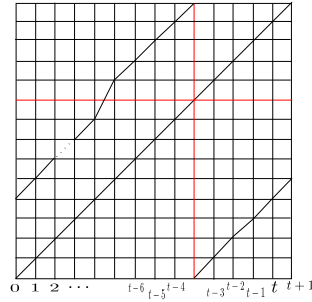
$$a = \underline{0_{\frac{t-1}{3}}10_{\frac{t-4}{3}}10_{\frac{t-4}{3}}1} \text{ y } Per(a) = t$$

Observemos que a es de la forma $a = \underline{0_{m+1}10_m10_m1}$, donde $m = \frac{t-4}{3}$

Tenemos

$$p^4 = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & \dots & t-5 & t-4 & t-3 & t-2 & t-1 & t & t+1 \\ 4 & 5 & \dots & t-1 & t & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \right)$$

Cuyo gráfico asociado es



Como 4 no es divisor de t entonces 4 puede ser divisor de $t-1$ o de $t-3$, observemos que 4 no puede ser divisor de $t-2$ ya que $t-2 = 2n-1-2 = 2n-3$, es un numero impar.

1. Si 4 divisor de $t-1$, entonces

$$a_{-b} = \underline{00_{\frac{t-5}{4}}10_{\frac{t-5}{4}}10_{\frac{t-5}{4}}10_{\frac{t-1}{4}}1}$$

$$b_{+a} = \underline{10_{\frac{t-5}{4}}10_{\frac{t-5}{4}}10_{\frac{t-5}{4}}10_{\frac{t-5}{4}}10}$$
, donde

$$a = \underline{0_{\frac{t-1}{4}}10_{\frac{t-5}{4}}10_{\frac{t-5}{4}}10_{\frac{t-5}{4}}1}$$
 y $Per(a) = t$

Observemos que a es de la forma $a = \underline{0_{m+1}10_m10_m10_m1}$, donde $m = \frac{t-5}{4}$

2. Si 4 es divisor de $t-3$, entonces

$$a_{-b} = \underline{00_{\frac{t-7}{4}}10_{\frac{t-3}{4}}10_{\frac{t-3}{4}}10_{\frac{t-3}{4}}1}$$

$$b_{+a} = \underline{10_{\frac{t-7}{4}}10_{\frac{t-3}{4}}10_{\frac{t-3}{4}}10_{\frac{t-7}{4}}10}$$
, donde

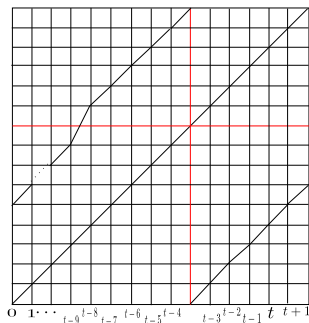
$$a = \underline{0_{\frac{t-3}{4}}10_{\frac{t-3}{4}}10_{\frac{t-3}{4}}10_{\frac{t-7}{4}}1}$$
 y $Per(a) = t$

Observemos que a es de la forma $a = \underline{0_{m+1}10_{m+1}10_{m+1}10_m1}$, donde $m = \frac{t-7}{4}$

Tenemos

$$p^5 = \left(\begin{array}{ccc|ccccc} 0 & 1 \dots & t-5 & t-4 & t-3 & t-2 & t-1 & t & t+1 \\ 5 & 6 \dots & t & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \right)$$

Cuyo gráfico asociado es



5 no es divisor de t (suponiendo $t > 5$), pero puede ser divisor de $t - 1$, $t - 2$, $t - 3$ o $t - 4$

1. Si 5 es divisor de $t - 1$, entonces

$$\begin{aligned} a_- \underline{b} &= 0 \underline{0 \frac{t-6}{5} 10 \frac{t-6}{5} 10 \frac{t-6}{5} 10 \frac{t-6}{5} 10 \frac{t-1}{5} 1} \\ b_+ \underline{a} &= 10 \frac{t-6}{5} 10 \frac{t-6}{5} 10 \frac{t-6}{5} 10 \frac{t-6}{5} 10 \frac{t-6}{5} 10, \text{ donde} \\ a &= 0 \frac{t-1}{5} 10 \frac{t-6}{5} 10 \frac{t-6}{5} 10 \frac{t-6}{5} 10 \frac{t-6}{5} 1 \text{ y } Per(a) = t \end{aligned}$$

Observemos que a es de la forma $a = \underline{0_{m+1} 10_m 10_m 10_m 10_m 1}$, donde $m = \frac{t-6}{5}$

2. Si 5 divisor de $t - 2$, entonces

$$\begin{aligned} a_- \underline{b} &= 0 \underline{0 \frac{t-7}{5} 10 \frac{t-7}{5} 10 \frac{t-2}{5} 10 \frac{t-7}{5} 10 \frac{t-2}{5} 1} \\ b_+ \underline{a} &= 10 \frac{t-7}{5} 10 \frac{t-7}{5} 10 \frac{t-2}{5} 10 \frac{t-7}{5} 10 \frac{t-7}{5} 10, \text{ donde} \\ a &= 0 \frac{t-2}{5} 10 \frac{t-7}{5} 10 \frac{t-2}{5} 10 \frac{t-7}{5} 10 \frac{t-7}{5} 1 \text{ y } Per(a) = t \end{aligned}$$

Observemos que a es de la forma $a = \underline{0_{m+1} 10_m 10_{m+1} 10_m 10_m 1}$, donde $m = \frac{t-7}{5}$

3. Si 5 es divisor de $t - 3$, entonces

$$\begin{aligned} a_- \underline{b} &= 0 \underline{0 \frac{t-8}{5} 10 \frac{t-3}{5} 10 \frac{t-8}{5} 10 \frac{t-3}{5} 10 \frac{t-3}{5} 1} \\ b_+ \underline{a} &= 10 \frac{t-8}{5} 10 \frac{t-3}{5} 10 \frac{t-8}{5} 10 \frac{t-3}{5} 10 \frac{t-8}{5} 10, \text{ donde} \end{aligned}$$

$$a = \underline{0 \frac{t-3}{5} 10 \frac{t-3}{5} 10 \frac{t-8}{5} 10 \frac{t-3}{5} 10 \frac{t-8}{5} 1} \text{ y } Per(a) = t$$

Observemos que a es de la forma $a = \underline{0_{m+1} 10_{m+1} 10_m 10_{m+1} 10_m 1}$, donde $m = \frac{t-8}{5}$

4. Si 5 es divisor de $t - 4$, entonces

$$a_{-} \underline{b} = \underline{00 \frac{t-9}{5} 10 \frac{t-4}{5} 10 \frac{t-4}{5} 10 \frac{t-4}{5} 10 \frac{t-4}{5} 1}$$

$$b_{+} \underline{a} = \underline{10 \frac{t-9}{5} 10 \frac{t-4}{5} 10 \frac{t-4}{5} 10 \frac{t-4}{5} 10 \frac{t-9}{5} 10}, \text{ donde}$$

$$a = \underline{0 \frac{t-4}{5} 10 \frac{t-4}{5} 10 \frac{t-4}{5} 10 \frac{t-4}{5} 10 \frac{t-9}{5} 1} \text{ y } Per(a) = t$$

Observemos que a es de la forma $a = \underline{0_{m+1} 10_{m+1} 10_{m+1} 10_{m+1} 10_m 1}$, donde $m = \frac{t-9}{5}$

Sucesivamente: si $k < \frac{t+1}{2}$ tenemos

$$p^k = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 \dots & 2n-1-k & 2n-k & 2n-k+1 & \dots & 2n-2 & 2n-1 & 2n \\ k & k+1 \dots & 2n-1 & 1 & 2 & \dots & k-1 & k & k+1 \end{array} \right)$$

k puede ser divisor de $t - 1$ o $t - 2$ o \dots o $t - (k - 1)$

1) Si k es divisor de $t - 1 = 2n - 2$, entonces

$$a_{-} \underline{b} = \underline{0(0 \frac{2n-2-k}{k} 1)_{k-1} 0 \frac{2n-2}{k} 1}$$

$$b_{+} \underline{a} = \underline{10 \frac{2n-2-k}{k} 1(0 \frac{2n-2-k}{k} 1)_{k-1} 0}, \text{ donde}$$

$$a = \underline{0 \frac{2n-2}{k} 1(0 \frac{2n-2-k}{k} 1)_{k-1}} \text{ y } Per(a) = t$$

Observemos que a es de la forma $a = \underline{0_{m+1} 1(0_m 1)_{k-1}}$, donde $m = \frac{2n-2-k}{k}$

2) Si k es divisor de $t - 2 = 2n - 3$ (observemos que k debe ser impar) entonces

$$a_{-} \underline{b} = \underline{0(0 \frac{2n-3-k}{k} 1)_{\frac{k-1}{2}} 0 \frac{2n-3}{k} 1(0 \frac{2n-3-k}{k} 1)_{\frac{k-1}{2}-1} 0 \frac{2n-3}{k} 1}$$

$$b_{+} \underline{a} = \underline{1(0 \frac{2n-3-k}{k} 1)_{\frac{k-2}{2}} 0 \frac{2n-3}{k} 1(0 \frac{2n-3-k}{k} 1)_{\frac{k-2}{2}} 0}, \text{ donde}$$

$$a = \underline{0 \frac{2n-3}{k} 1(0 \frac{2n-3-k}{k} 1)_{\frac{k-3}{2}} 0 \frac{2n-3}{k} 1(0 \frac{2n-3-k}{k} 1)_{\frac{k-3}{2}} 0 \frac{2n-3}{k} 1} \text{ y } Per(a) = t$$

Observemos que a es de la forma $a = \underline{0_{m+1} 1(0_m 1)_s 0_{m+1} 1(0_m 1)_{s+1}}$, donde $m = \frac{2n-3-k}{k}$ y $s = \frac{k-3}{2}$

3) Si k es divisor de $t - 3 = 2n - 4$.

Observemos que $t - 3$ no es múltiplo de 3 ya que si $t - 3$ fuera múltiplo de 3 entonces $t - 3 = 3k \Rightarrow t = 3k + 3 \Rightarrow t = 3(k + 1)$, entonces t no sería primo, luego 3 no puede ser divisor de $t - 3$, luego 3 no puede ser divisor de k ya que si así fuera

$$\begin{aligned} t - 3 &= r \cdot k \\ &= r \cdot 3h \end{aligned}$$

Lo que implicaría que 3 es divisor de t lo que no puede ocurrir, pero 3 puede ser divisor de $k - 1$ o $k - 2$

i) Si 3 es divisor de $k - 1$, entonces

$$\begin{aligned} a_{-b} &= 0 \frac{(0_{\frac{t-3}{k}-1} 1)_{\frac{k-1}{3}} 0_{\frac{t-3}{k}} 1 (0_{\frac{t-3}{k}-1} 1)_{\frac{k-1}{3}-1} 0_{\frac{t-3}{k}} 1 (0_{\frac{t-3}{k}-1} 1)_{\frac{k-1}{3}-1} 0_{\frac{t-3}{k}} 1}{(0_{\frac{t-3}{k}-1} 1)_{\frac{k-1}{3}} 0_{\frac{t-3}{k}} 1 (0_{\frac{t-3}{k}-1} 1)_{\frac{k-1}{3}-1} 0_{\frac{t-3}{k}} 1 (0_{\frac{t-3}{k}-1} 1)_{\frac{k-1}{3}} 0}, \text{ donde} \\ a &= \frac{0_{\frac{t-3}{k}} 1 (0_{\frac{t-3}{k}-1} 1)_{\frac{k-1}{3}-1} 0_{\frac{t-3}{k}} 1 (0_{\frac{t-3}{k}-1} 1)_{\frac{k-1}{3}-1} 0_{\frac{t-3}{k}} 1 (0_{\frac{t-3}{k}-1} 1)_{\frac{k-1}{3}}}{\text{Per}(a) = t} \end{aligned}$$

Observemos que a es de la forma

$$a = \underline{0_{m+1} 1 (0_m 1)_s 0_{m+1} 1 (0_m 1)_s 0_{m+1} 1 (0_m 1)_{s+1}}, \text{ donde } m = \frac{t-3}{k} - 1 \text{ y } s = \frac{k-1}{3} - 1$$

ii) Si 3 es divisor de $k - 2$, entonces

$$\begin{aligned} a_{-b} &= 0 \frac{(0_{\frac{t-3}{k}-1} 1)_{\frac{k-2}{3}} 0_{\frac{t-3}{k}} 1 (0_{\frac{t-3}{k}-1} 1)_{\frac{k-2}{3}} 0_{\frac{t-3}{k}} 1 (0_{\frac{t-3}{k}-1} 1)_{\frac{k-2}{3}-1} 0_{\frac{t-3}{k}} 1}{(0_{\frac{t-3}{k}-1} 1)_{\frac{k-2}{3}} 0_{\frac{t-3}{k}} 1 (0_{\frac{t-3}{k}-1} 1)_{\frac{k-2}{3}} 0_{\frac{t-3}{k}} 1 (0_{\frac{t-3}{k}-1} 1)_{\frac{k-2}{3}} 0}, \text{ donde} \\ a &= \frac{0_{\frac{t-3}{k}} 1 (0_{\frac{t-3}{k}-1} 1)_{\frac{k-2}{3}-1} 0_{\frac{t-3}{k}} 1 (0_{\frac{t-3}{k}-1} 1)_{\frac{k-2}{3}} 0_{\frac{t-3}{k}} 1 (0_{\frac{t-3}{k}-1} 1)_{\frac{k-2}{3}-1} 0_{\frac{t-3}{k}} 1}{\text{Per}(a) = t} \end{aligned}$$

Observemos que a es de la forma

$$\begin{aligned} a &= \underline{0_{m+1} 1 (0_m 1)_s 0_{m+1} 1 (0_m 1)_{s+1} 0_{m+1} 1 (0_m 1)_{s+1}}, \text{ donde} \\ m &= \frac{t-3}{k} - 1 \text{ y } s = \frac{k-2}{3} - 1 \end{aligned}$$

⋮

Continuamos sucesivamente

k-1) k es divisor de $t - (k - 1) = 2n - k$, entonces $a_{-b} = \frac{00_{\frac{2n-2k}{k}} 1 (0_{\frac{2n-2k}{k}+1} 1)_{k-1}}{(0_{\frac{2n-2k}{k}+1} 1)_{k-1} 0_{\frac{2n-2k}{k}} 1}$

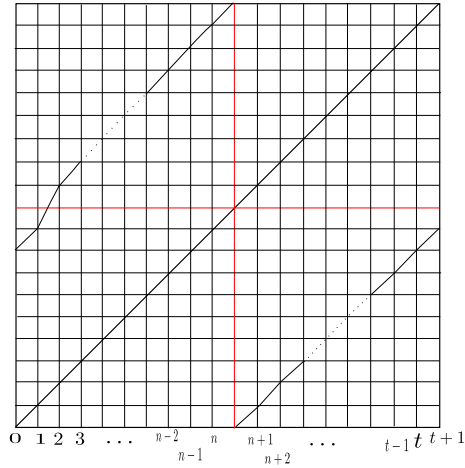
$b_{+a} = \frac{10_{\frac{2n-2k}{k}} 1 (0_{\frac{2n-2k}{k}+1} 1)_{k-2} 0_{\frac{2n-2k}{k}} 10}{(0_{\frac{2n-2k}{k}+1} 1)_{k-1} 0_{\frac{2n-2k}{k}} 1}$ y $\text{Per}(a) = t$

Observemos que a es de la forma $a = \underline{(0_{m+1} 1)_{k-1} 0_m 1}$, donde $m = \frac{2n-2k}{k}$

Sucesivamente $t + 1 = 2n$, la mitad es n y n no es divisor de t , así tenemos

$$p^{n-1} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 \dots & n & n+1 & n+2 & \dots & 2n-2 & 2n-1 & 2n \\ n-1 & n \dots & 2n-1 & 1 & 2 & \dots & n-2 & n-1 & n \end{array} \right)$$

Cuyo gráfico asociado es



Que representa la dinámica de $\sigma|_{[a-b, b+a]}$ con

$$a-b = 0\underline{(01)_{n-2}}001$$

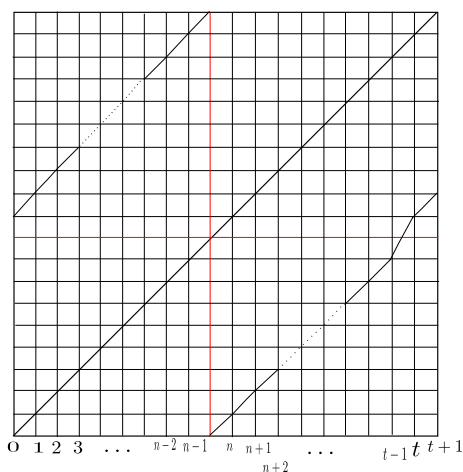
$$b+a = 1\underline{(01)_{n-1}}0, \text{ donde}$$

$$a = \underline{001(01)_{n-2}} \text{ y } Per(a) = t$$

Tenemos además:

$$p^n = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 \dots & n-1 & n & n+1 & \dots & 2n-2 & 2n-1 & 2n \\ n & n+1 \dots & 2n-1 & 1 & 2 & \dots & n-1 & n & n+1 \end{array} \right)$$

Cuyo gráfico asociado es



Que representa la dinámica de $\sigma|_{[a_{-b}, b_{+a}]}$ con

$$a_{-b} = 0\underline{(10)_{n-1}}1$$

$$b_{+a} = 1\underline{(10)_{n-2}}110, \text{ donde}$$

$$a = \underline{(01)_{n-2}}011 \text{ y } Per(a) = t$$

Ahora si $k > \frac{t+1}{2}$ tenemos

$$p^k = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & \dots & t-k & t-k+1 & \dots & k & \dots & t & t+1 \\ k & k+1 & \dots & t & 1 & \dots & 2k-t & \dots & k & k+1 \end{array} \right)$$

Así $k = l \cdot (t - k) + i$, para algún $i = 0, \dots, (t - k)$ y para algún $l \in \mathbb{N}$

En efecto

Como $\frac{t+1}{2} < k$, entonces $t < t+1 < 2k$, luego

$k > t - k + 1 > t - k$, así $k = l \cdot (t - k) + i$, para algún $i = 0, \dots, (t - k)$ y para algún $l \in \mathbb{N}$

Si $k = l \cdot (t - k) + i$ con $l \geq 1$ entonces $t = (l + 1) \cdot (t - k) + i$, en efecto

$$\text{Como } t = t - k + k = (t - k) + l \cdot (t - k) + i = (l + 1) \cdot (t - k) + i$$

Observemos que si $i = 0$ entonces $k = t - 1$ (ya que $t = (l + 1) \cdot (t - k)$ y como t es primo sólo puede ser si $t - k = 1 \Rightarrow k = t - 1$). Este caso es p^{t-1} que vemos más adelante

1) Si $i = 1$, $k = l \cdot (t - k) + 1$ y $t = (l + 1) \cdot (t - k) + 1$, entonces

$$a_{-b} = 0(1_l 0)_{t-k} 1$$

$$b_{+a} = 11_l(01_l)_{t-k-2} 01_{l+1} 0, \text{ donde}$$

$$a = \underline{(01_l)_{t-k-1} 01_{l+1}} \text{ y } Per(a) = t \text{ Notemos que } a = \underline{(01_l)_s 01_{l+1}} \text{ para } s = t - k - 1$$

2) Si $i = 2$, $k = l \cdot (t - k) + 2$ y $t = (l + 1) \cdot (t - k) + 2$

Observemos que $t - k$ es impar

En efecto como $t = (l + 1) \cdot (t - k) + 2$ es impar entonces $(l + 1) \cdot (t - k)$ es impar y para que esta multiplicación sea impar cada factor tiene que ser impar. Así

$$a_{-b} = 0(1_l 0)_{\frac{t-k-1}{2}} 1_{l+1} 0(1_l 0)_{\frac{t-k-1}{2}} 1$$

$$b_{+a} = 11_l 0(1_l 0)_{\frac{t-k-1}{2}-1} 1_{l+1} 0(1_l 0)_{\frac{t-k-1}{2}-1} 1_{l+1} 0, \text{ donde}$$

$$a = \underline{(01_l)_{\frac{t-k-1}{2}} 01_{l+1} (01_l)_{\frac{t-k-1}{2}-1} 01_{l+1}} \text{ y } Per(a) = t$$

Observemos que a es de la forma $a = \underline{(01_l)_{s+1} 01_{l+1} (01_l)_s 01_{l+1}}$, donde $s = \frac{t-k-1}{2} - 1$

3) Si $i = 3$, $k = l \cdot (t - k) + 3$ y $t = (l + 1) \cdot (t - k) + 3$

a) Si 3 es divisor de $t - k + 2$, entonces

$$a_{-b} = 0(1_l 0)_{\frac{t-k+2}{3}-1} 1_{l+1} 0(1_l 0)_{\frac{t-k+2}{3}-2} 1_{l+1} 0(1_l 0)_{\frac{t-k+2}{3}-1} 1$$

$$b_{+a} = 1(1_l 0)_{\frac{t-k+2}{3}-1} 1_{l+1} 0(1_l 0)_{\frac{t-k+2}{3}-2} 1_{l+1} 0(1_l 0)_{\frac{t-k+2}{3}-2} 1_{l+1} 0, \text{ donde}$$

$$a = 0(1_l 0)_{\frac{t-k+2}{3}-1} 1_{l+1} 0(1_l 0)_{\frac{t-k+2}{3}-2} 1_{l+1} 0(1_l 0)_{\frac{t-k+2}{3}-2} 1_{l+1} \text{ y } Per(a) = t$$

Observemos que a es de la forma $a = \underline{(01_l)_{s+1} 01_{l+1} (01_l)_s 01_{l+1} (01_l)_s 01_{l+1}}$,

donde $s = \frac{t-k+2}{3} - 2$

b) Si 3 es divisor de $t - k + 1$, entonces

$$a_{-b} = 0(1_l 0)_{\frac{t-k+1}{3}-1} 1_{l+1} 0(1_l 0)_{\frac{t-k+1}{3}-1} 1_{l+1} 0(1_l 0)_{\frac{t-k+1}{3}-1} 1$$

$$b_{+a} = 1(1_l 0)_{\frac{t-k+1}{3}-1} 1_{l+1} 0(1_l 0)_{\frac{t-k+1}{3}-1} 1_{l+1} 0(1_l 0)_{\frac{t-k+1}{3}-2} 1_{l+1} 0, \text{ donde}$$

$$a = 0(1_l 0)_{\frac{t-k+1}{3}-1} 1_{l+1} 0(1_l 0)_{\frac{t-k+1}{3}-1} 1_{l+1} 0(1_l 0)_{\frac{t-k+1}{3}-2} 1_{l+1} \text{ y } Per(a) = t$$

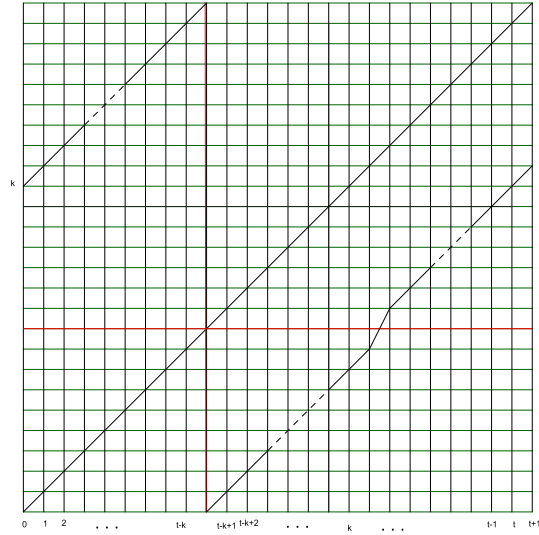
Observemos que a es de la forma $a = \underline{(01_l)_{s+1} 01_{l+1} (01_l)_{s+1} 01_{l+1} (01_l)_s 01_{l+1}}$,

donde $s = \frac{t-k+1}{3} - 2$

Sucesivamente

Si $i = t - k - 1$, entonces $k = l \cdot (t - k) + t - k - 1$ y $t = (l + 1) \cdot (t - k) + t - k - 1$

El gráfico asociado es:



Del gráfico observamos que

$$\begin{aligned}
 0 &\rightarrow \underbrace{k \rightarrow k - (t - k) \rightarrow \dots \rightarrow k - (l - 1) \cdot (t - k)}_l \rightarrow t - k - 1 \rightarrow \\
 &\rightarrow \underbrace{t - 1 \rightarrow t - 1 - (t - k) \rightarrow \dots \rightarrow t - 1 - l \cdot (t - k)}_{l+1} \rightarrow t - k - 2 \rightarrow \\
 &\vdots \\
 &\rightarrow \underbrace{t - (t - k - 2) \rightarrow t - (t - k - 2) - (t - k) \rightarrow \dots \rightarrow t - k - 1 \rightarrow 1}_l \rightarrow \\
 &\rightarrow \underbrace{k + 1 \rightarrow k + 1 - (t - k) \rightarrow \dots \rightarrow 2 \cdot (t - k)}_l \rightarrow t - k \rightarrow t \rightarrow k
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\begin{aligned} 0 &\rightarrow \dots \rightarrow t - k - 2 \rightarrow \\ &\vdots \\ &\rightarrow \dots \rightarrow t - k - 1 \rightarrow 1 \rightarrow \\ &\rightarrow \dots \rightarrow 2 \cdot (t - k) \end{aligned}} \right\} *$$

Donde $* = t - k - 2$

y

$$\begin{aligned}
 t + 1 &\rightarrow \underbrace{k + 1 \rightarrow k + 1 - (t - k) \rightarrow \dots \rightarrow k + 1 - (l - 1) \cdot (t - k)}_l \rightarrow t - k \rightarrow \\
 &\rightarrow \underbrace{t \rightarrow k \rightarrow k - (t - k) \rightarrow \dots \rightarrow k - (l - 1) \cdot (t - k)}_{l+1} \rightarrow t - k - 1 \rightarrow \\
 &\vdots \\
 &\rightarrow \underbrace{k + 2 \rightarrow k + 2 - (t - k) \rightarrow \dots \rightarrow k + 2 - l \cdot (t - k)}_{l+1} \rightarrow 1 \rightarrow
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\begin{aligned} t + 1 &\rightarrow \dots \rightarrow t - k \rightarrow \\ &\rightarrow \dots \rightarrow t - k - 1 \rightarrow \\ &\vdots \\ &\rightarrow \dots \rightarrow 1 \rightarrow \end{aligned}} \right\} \circ$$

$$\rightarrow k + 1$$

Donde $\circ = t - k - 1$

Así obtenemos

$$a_{-\underline{b}} = \underline{01_l 0(1_{l+1} 0)_{t-k-2} 1_l 0 1}$$

$$b_{+\underline{a}} = \underline{11_l 0(1_{l+1} 0)_{t-k-1}}$$

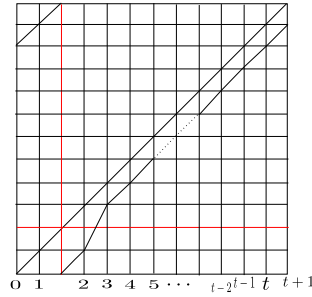
Donde $a = \underline{01_l 0(1_{l+1} 0)_{t-k-2} 1_{l+1}}$. Si $m = t - k - 2$, entonces $a = \underline{01_l 0(1_{l+1} 0)_m 1_{l+1}}$ y

$$\begin{aligned} Per(a) &= 1 + l + 1 + (l + 2) \cdot (t - k - 2) + l + 1 \\ &= (l + 2) \cdot (t - k - 1) + l + 1 \\ &= (l + 1) \cdot (t - k - 1) + t - k + l \\ &= (l + 1) \cdot (t - k) + t - k + 1 \\ &= t \end{aligned}$$

Si $i = 0$, tenemos

$$p^{t-1} = \left(\begin{array}{cc|cccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & t-1 & t & t+1 \\ t-1 & t & 1 & 2 & \dots & t-2 & t-1 & t \end{array} \right)$$

Cuyo gráfico asociado es



Que representa la dinámica de $\sigma |_{[a_{-\underline{b}}, b_{+\underline{a}}]}$ con

$$a_{-\underline{b}} = \underline{01_{t-2} 0 1},$$

$$b_{+\underline{a}} = \underline{11_{t-1} 0}, \text{ donde}$$

$$a = \underline{01_{t-1}} \text{ y } Per(a) = t$$

□

Observation 3.1.4. 1. Restaría ver que si α es una sucesión minimal periódica de período t distinta de las $t - 1$ anteriores entonces $h_{top}(\alpha, b(\alpha)) > 0$. Notamos que

hay $\frac{2^t - 2}{t} + (1 - t)$ sucesiones con esta propiedad. Es fácil verificar el resultado para $t = 2, 3, 5$ y 7 .

2. Como cada $\alpha \in A_\infty^\infty$ satisface $h_{top}(\alpha, b(\alpha)) = 0$ entonces la prueba de lo señalado en 1. implicaría que el proceso anterior permite encontrar todas las sucesiones $\alpha \in A_\infty^\infty$ de período primo.

Theorem 3.1.5. Si $a \in Per(\sigma) \cap Min_2$ es de período primo t entonces

1. a es una de las $t - 1$ sucesiones que se obtienen de $\underline{0_{t-1}1}$ por el procedimiento descrito o
2. Existen sucesiones $\alpha \in Per(\sigma) \cap Min_2$ y $\beta \in Per(\sigma) \cap Max_2$ tales que $a \in A_\infty(\alpha, \beta)$ con la condición de que $\beta > b(\alpha) + \underline{\alpha}$

Proof. La siguiente descripción del conjunto $\overline{Min_2 \cap Per(\sigma)}$ se encuentra en [23] y [24]. Denotamos por $Per(\sigma)$ al conjunto de las sucesiones periódicas para la función shift σ y por $\mathcal{A}_0 = A_\infty$.

Para todo $a \in \mathcal{A}_0$ definimos $A(a) = \{d \in Max_2 \cap Per(\sigma); a \leq a(d) < b(a) \leq d\}$. Para $d \in A(a)$ sea $A_0(a, d) = \{\underline{a_-d^{n-1}d_+}, \underline{a_-d_+a^{n-1}}; n \in \mathbb{N}\}$; $A_1(a, d) = \{m(a_1, a_2); a_1 < a_2 \text{ son sucesiones consecutivas en } A_0(a, d)\} \cup A_0(a, d)$.

Ahora, definimos inductivamente, para $n \geq 1$

$A_{n+1}(a, d) = \{m(a_1, a_2); a_1 < a_2 \text{ son sucesiones consecutivas en } A_n(a, d)\} \cup A_n(a, d)$

Sea $A_\infty(a, d) = \cup_{n=0}^\infty A_n(a, d)$.

Llamamos al conjunto $A_\infty(a, d)$ la (a, d) -gorgona

Ahora, definimos

$$\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_0 \cup \bigcup_{a \in \mathcal{A}_0} \bigcup_{d \in A(a)} A_\infty(a, d)$$

Ahora definimos, para $n \geq 1$ el conjunto

$$\mathcal{A}_{n+1} = \mathcal{A}_n \cup \bigcup_{a \in \mathcal{A}_n} \bigcup_{d \in A(a)} A_\infty(a, d)$$

Claramente, tenemos que $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2 \subset \dots$. Sea $\mathcal{A}_\infty = \cup_{n \in \mathbb{N}_0} \mathcal{A}_n$. Se tiene que

Theorem 3.1.6. [24] El conjunto $\overline{\mathcal{A}_\infty} = \overline{Min_2 \cap Per(\sigma)}$

Entonces debe ser que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a \in \mathcal{A}_n$.

Si $n = 0$, entonces $a \in \mathcal{A}_0$ y debe ocurrir que $a \in A_\infty$ (otro caso a no tiene período primo). En este caso a debe provenir de aplicar el procedimiento a $\underline{0_{t-1}1}$.

Si $n \geq 1$ y $a \in \mathcal{A}_n \setminus \mathcal{A}_0$ entonces existe $\alpha \in \mathcal{A}_{n-1}$ y $\beta \in A(\alpha)$ tal que $a \in A_\infty(\alpha, \beta)$.

Observamos que no puede ocurrir que el período de α sea igual que el período de β (en efecto, en este caso en $A_\infty(\alpha, \beta)$ no hay orbita periódica de período primo). Con esto la única forma de que $\beta \in A(\alpha)$ es que $\beta > b(\alpha)_{+\underline{\alpha}}$

□

Corollary 3.1.7. En el caso 2 de la observacion 3.1.4 se cumple que $h_{top}(a, b(a)) > 0$

Proof. En efecto, $h_{top}(a, b(a)) = h_{top}(\alpha, \beta) > 0$ puesto que $\beta > b(\alpha)_{+\underline{\alpha}}$

□

3.1.2 Algoritmo periodo no primo

Theorem 3.1.8.

Sea t un período no primo

1. Si k es primo relativo con t entonces p^k genera una sucesión $a \in A_\infty$ talque $Per(a) = t$
2. Si k es divisor de t , entonces p^k genera una sucesión $a \in A_\infty$ talque $Per(a) = \frac{t}{k}$ (que es divisor de t). Si $k = 2$ entonces la sucesión a genera a la sucesión $\underline{a_-b_+} \in A_\infty$, $b = b(a)$, de período t . Si $k \geq 3$ entonces la sucesión a genera las sucesiones $\underline{a_-b^{k-2}b_+}$ y $\underline{a_-b_+a^{k-2}}$ de período t en A_∞

3. Si $t = k_1 \cdot t_2$ y $k = k_1 \cdot k_2$, con t_2 y k_2 primos relativos y $k_1 > 1$ entonces p^k genera una sucesión $a \in \mathcal{A}_\infty^\infty$ tal que $\text{Per}(a) = t_2$. Si $k_1 = 2$ entonces la sucesión a genera a la sucesión $\underline{a_-b_+} \in \mathcal{A}_\infty^\infty$, $b = b(a)$, de período $2t_2 = t$. Si $k_1 \geq 3$ la sucesión a genera las sucesiones $\underline{a_-b^{k_1-2}b_+}$ y $\underline{a_-b_+a^{k_1-2}}$ de período $k_1 \cdot t_2 = t$ en $\mathcal{A}_\infty^\infty$

Observation 3.1.9. Para cada $n \in \mathbb{N}$ denotamos por

$$P_n = \{m; 1 \leq m < n; m \text{ es primo relativo con } n\}$$

$$D_n = \{m; 1 < m < n; m \text{ es divisor de } n\}$$

$$MC_n = \{m; 1 < m < n, n = k_1 \cdot t_2, m = k_1 \cdot k_2 \text{ con } k_i \geq 2, i = 1, 2 \text{ y } (t_2, k_2) = 1\}$$

Ejemplos

1. $P_2 = \{1\}, D_2 = \emptyset, MC_2 = \emptyset$
2. $P_3 = \{1, 2\}, D_3 = \emptyset, MC_3 = \emptyset$
3. $P_4 = \{1, 3\}, D_4 = \{2\}, MC_4 = \emptyset$
4. $P_5 = \{1, 2, 3, 4\}, D_5 = \emptyset, MC_5 = \emptyset$
5. $P_6 = \{1, 5\}, D_6 = \{2, 3\}, MC_6 = \{4\}$
6. $P_7 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, D_7 = \emptyset, MC_7 = \emptyset$
7. $P_8 = \{1, 3, 5, 7\}, D_8 = \{2, 4\}, MC_8 = \{6\}$
8. $P_9 = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}, D_9 = \{3\}, MC_9 = \{6\}$
9. $P_{10} = \{1, 3, 7, 9\}, D_{10} = \{2, 5\}, MC_{10} = \{4, 6, 8\}$
10. $P_{11} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}, D_{11} = \emptyset, MC_{11} = \emptyset$
11. $P_{12} = \{1, 5, 7, 11\}, D_{12} = \{2, 3, 4, 6\}, MC_{12} = \{8, 9, 10\}$

Consideramos $\mathbb{N} = I \cup P$, $I = \text{impares} = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$, $P = \text{pares} = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$

Suponemos que $n \in I$ entonces los teoremas 3.1.3 y 3.1.8 garantizan:

i) Si n es primo podemos construir $(n - 1)$ sucesiones minimales en A_∞ de período n

ii) Si n no es primo, $n = k_1 \cdot t_2$, entonces

a) Cada $n \in P_n$ genera una sucesión $a \in A_\infty$ de período n

b) Cada $m \in D_n$ genera una sucesión $a \in A_\infty$ de período $\frac{n}{m} = k$ y podemos formar las sucesiones $\underline{a_-b_+a^{m-2}}$, $\underline{a_-b^{m-2}b_+}$ que están en A_∞ y tienen período n

c) Cada $m \in MC_n$ genera una sucesión $a \in A_\infty$ de período t_2 y podemos formar las sucesiones $\underline{a_-b_+a^{k_1-2}}$, $\underline{a_-b^{k_1-2}b_+}$ de período n que están en A_∞

d) En este caso construimos en total $\#(P_n) + 2\#(D_n) + 2\#(MC_n)$ sucesiones en A_∞ a partir de $\underline{0_{n-1}1}$

Ejemplo

- Para $n = 9$ se tienen $5 + 2 + 2 = 9$ sucesiones de A_∞
- Para $n = 11$ se tienen 10 sucesiones de A_∞
- Para $n = 15$ se tienen $4 + 4 + 8 = 16$ sucesiones de A_∞

Suponemos que $n \in P$. En este caso los teoremas 3.1.3 y 3.1.8 garantizan

a) Para cada $m \in P_n$ se genera una sucesión $a \in A_\infty$ de período n

b) Para cada $m \in D_n$ se genera una sucesión $a \in A_\infty$ de período $\frac{n}{m} = k$

b.1) Si $m = 2$ entonces a genera $\underline{a_-b_+}$ de período $n = 2k$ en A_∞

b.2) Si $m \geq 3$ entonces a genera sucesión $\underline{a_-b_+a^{m-2}}$, $\underline{a_-b^{m-2}b_+}$ de período n

c) Cada $m \in MC_n$ genera una sucesión en A_∞ de período t_2 ($n = k_1 \cdot t_2$)

c.1) Si $k_1 = 2$ tenemos la sucesión $\underline{a_-b_+} \in A_\infty$ de período n

c.2) Si $k_1 \geq 2$ tenemos las sucesiones $\underline{a_-b_+a^{k_1-2}}$ y $\underline{a_-b^{k_1-2}b_+}$ de período $n = k_1 \cdot t_2$

d) Escribamos $n = 2 \cdot s$ y dividamos MC_n en:

$$MC_n(2) = \{m; 1 < m < n, m = 2 \cdot r \text{ con } (r, s) = 1\}$$

$$MC_n^+ = MC_n \setminus MC_n(2)$$

d.1) Cada $m \in MC_n(2)$ genera $a \in A_\infty^\infty$ de período s y a genera la sucesión

$$\underline{a_-b_+} \in A_\infty^\infty \text{ de período } n$$

d.2) Cada $m \in MC_n^+, m = k_1 \cdot k_2, k_1 \geq 3, n = k_1 \cdot t_2$ genera una sucesión $a \in A_\infty^\infty$

de período t_2 y genera las sucesiones $\underline{a_-b_+a^{k_1-2}}, \underline{a_-b^{k_1-2}b_+}$ en A_∞^∞ de período n .

Concluimos que en este caso se generan $\#P_n + 2[\#(D_n) - 1] + 1 + \#(MC_n(2)) + 2\#(MC_n^+)$ sucesiones de período n

Ejemplo

- Para $n = 6$ tenemos $2 + 1 + 2 + 1 = 6$ sucesiones
- Para $n = 8$ tenemos $4 + 1 + 2 + 1 = 8$ sucesiones
- Para $n = 10$ tenemos $4 + 1 + 2 + 3 = 10$ sucesiones
- Para $n = 12$ tenemos $4 + 1 + 6 + 4 + 1 = 16$ sucesiones

Proof. (del teorema 3.1.8) Comenzamos con el **período** $t = 4$

Sea $a = \underline{0001}, b = \underline{1000}$, entonces

$$a_-b = 0000\underline{1000} = \underline{00001}$$

$$b_+a = 1001\underline{0001} = \underline{10010}, \text{ entonces}$$

$$a_-b = \underline{00001} = 0 \rightarrow \sigma(\underline{00001}) = \underline{0001} = 1 \rightarrow \sigma(\underline{0001}) = \underline{0010} = 2 \rightarrow \sigma(\underline{0010}) = \underline{0100} =$$

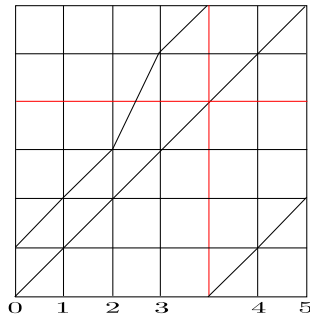
$$3 \rightarrow \sigma(\underline{0100}) = \underline{1000} = 4 \rightarrow \sigma(\underline{1000}) = \underline{0001} = 1$$

$$b_+a = \underline{10010} = 5 \rightarrow \sigma(\underline{10010}) = \underline{0010} = 2$$

Así tenemos la siguiente “permutación”

$$p = \left(\begin{array}{cccc|cc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

De donde obtenemos



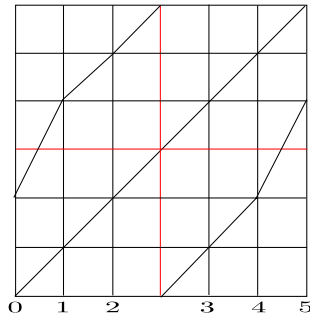
Que representa a: $a_{-b} = 00001$ y $b_{+a} = 10010$

Aqui $k = 1$ y $(4, 1) = 1$ son primos relativos y $a = 0001$ es de período 4

Veamos ahora $p \cdot p$

$$p \cdot p = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & | & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & | & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & | & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & | & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & | & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & | & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = p^2$$

Lo que genera a

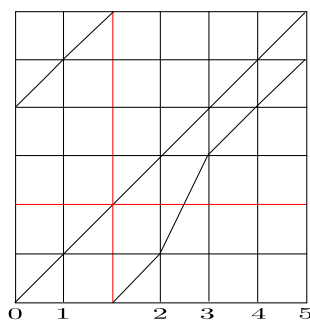


Que representa a: $001 = 0010 = a_{-b}$, $a = 01$, $110 = 1101 = b_{+a}$

Aqui $k = 2$ es divisor de 4 y p^2 genera $a = 01$ de período 2. Esta sucesión genera a la sucesión $\alpha = a_{-b_{+}} = 0011 \in A_{\infty}^{\infty}$ y observamos que $Per(\alpha) = 4$

$$p^3 = p \cdot p^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & | & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & | & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & | & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & | & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & | & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & | & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Que genera a



Y obtenemos $a \cdot \underline{b} = 0110\underline{111} = 0\underline{1101}$ y $b \cdot \underline{a} = \underline{11110}$

Aquí $k = 3$ y $(3, 4) = 1$ son primos relativos y $a = \underline{0111}$ es de período 4

$$p^4 = p \cdot p^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & | & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & | & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & | & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & | & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & | & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & | & 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Notamos que todas las sucesiones minimales de período 4 son 0001, 0111, 0011 y todas ellas están en A_∞

Período $t = 6$

Consideremos $a = \underline{0_5 1}$, $b = \underline{10_5}$, así $a \cdot \underline{b} = \underline{00_5 1}$, $b \cdot \underline{a} = \underline{10_4 10}$, luego

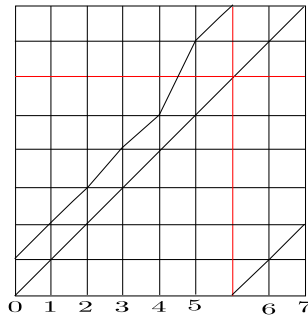
$$\begin{aligned} a \cdot \underline{b} = \underline{00_5 1} = 0 &\rightarrow \sigma(\underline{00_5 1}) = \underline{0_5 1} = 1 \rightarrow \sigma(\underline{0_5 1}) = \underline{0_4 10} = 2 \rightarrow \sigma(\underline{0_4 10}) = \underline{0_3 100} = \\ 3 &\rightarrow \sigma(\underline{0_3 100}) = \underline{001000} = 4 \rightarrow \sigma(\underline{001000}) = \underline{010000} = 5 \rightarrow \sigma(\underline{010000}) = \underline{10_5} = 6 \rightarrow \\ \sigma(\underline{10_5}) &= \underline{0_5 1} = 1 \end{aligned}$$

$$b \cdot \underline{a} = \underline{10_4 10} = 7 \rightarrow \sigma(\underline{10_4 10}) = \underline{0_4 10} = 2$$

Así tenemos la siguiente "permutación"

$$p = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & | & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & | & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

De donde obtenemos

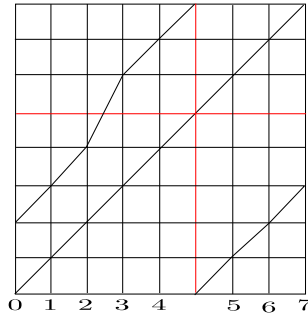


Que representa a $a_{-b} = \underline{00_5 1}$, $b_{+a} = \underline{10_4 10}$

Aquí $k = 1$ y $(1, 6) = 1$ son primos relativos y $a = \underline{0_5 1}$ es de período 6

Veamos ahora $p \cdot p$

$$\begin{aligned}
 p^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & | & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & | & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & | & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & | & 1 & 2 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & | & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & | & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

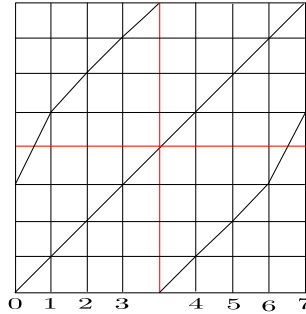


Que representa a $a_{-b} = \underline{000 1}$, $b_{+a} = \underline{10 10}$

Aquí $k = 2$ es divisor de 6 y $a = \underline{00 1}$ es de período 3. Esta sucesión genera $\alpha = \underline{000 10 1}$ que es una sucesión $\alpha \in A_\infty$ de período 6

Determinemos ahora p^3 , observemos que 3 es un divisor del período $t = 6$

$$\begin{aligned}
p^3 &= \left(\begin{array}{cccccc|cc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 2 \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{cccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 \end{array} \right) \\
&= \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \right)
\end{aligned}$$

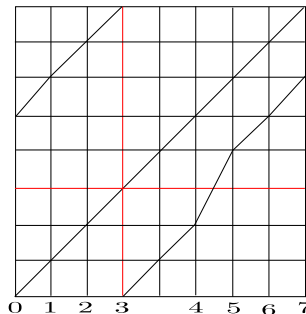


Lo que genera a $a_{-b} = 00\underline{1}$ y $b_{+a} = 1\underline{1}0$

Aquí $k = 3$ es un divisor de 6 y $a = \underline{01}$ es de período 2. Esta sucesión genera la sucesión $\alpha_1 = \underline{a_{-b_{+a}}} = \underline{001101}$ y $\alpha_2 = \underline{a_{-bb_{+}}} = \underline{001011}$ que son sucesiones pertenecientes a A_{∞}^{∞} de período 6

Veamos ahora p^4 , observemos que 4 no es divisor del período $t = 6$, pero es un múltiplo de 2 y 2 es un divisor de 6.

$$\begin{aligned}
p^4 &= \left(\begin{array}{cccccc|cc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 2 \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \right) \\
&= \left(\begin{array}{ccc|cccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \right)
\end{aligned}$$



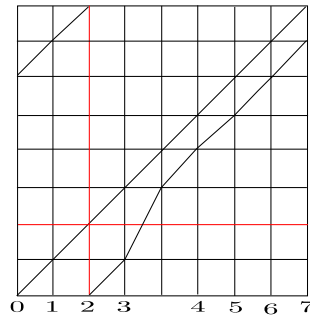
De donde tenemos $a_{-}b = \underline{0101}$, $b_{+}a = \underline{1110}$

Aquí $k = 4 = 2 \cdot 2$, $t = 6 = 2 \cdot 3$ y $a = \underline{011}$ es de período 3. Esta sucesión genera la sucesión $\alpha = \underline{a_{-}b_{+}} = \underline{010111} \in A_{\infty}^{\infty}$ de período 6

Consideremos ahora p^5

$$p^5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & | & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & | & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & | & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & | & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & | & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & | & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$



De donde obtenemos $a_{-}b = \underline{0111101}$, $b_{+}a = \underline{1111110}$

Aquí $k = 5$, $(5, 6) = 1$ son primos relativos y $a = \underline{01}_5$ es de período 6

$$p^6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & | & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & | & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & | & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & | & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & | & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & | & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Observamos que las otras sucesiones minimales de período 6 son

1. $\alpha = \underline{a_{-}d_{+}} = \underline{001111}$, donde $a = \underline{01}$, $d = \underline{1110}$ y satisface $h_{top}(\alpha, b(\alpha)) > 0$
2. $\alpha = \underline{a_{-}d_{+}} = \underline{000011}$, donde $a = \underline{0001}$, $d = \underline{10}$ y satisface $h_{top}(\alpha, b(\alpha)) > 0$
3. $\alpha = \underline{a_{-}d_{+}} = \underline{000111}$, donde $a = \underline{001}$, $d = \underline{110}$ y satisface $h_{top}(\alpha, b(\alpha)) > 0$

Notamos que cada una de ellas es de la forma $\underline{a_-d_+}$ y, de acuerdo al Teorema A, $h_{top}(\alpha, b(\alpha)) = h_{top}(a, d)$. La observación 1.0.11 implica que $h_{top}(a, d) > 0$ en los tres casos anteriores.

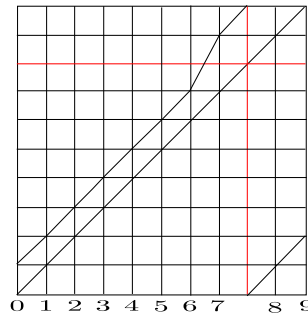
Período $t = 8$

Consideremos $a = \underline{0_7 1}$, $b = \underline{10_7}$, así $a_- \underline{b} = \underline{00_7 1}$, $b_+ \underline{a} = \underline{10_6 10}$, luego

$$\begin{aligned} a_- \underline{b} = \underline{00_7 1} = 0 &\rightarrow \sigma(\underline{00_7 1}) = \underline{0_7 1} = 1 \rightarrow \sigma(\underline{0_7 1}) = \underline{0_6 10} = 2 \rightarrow \sigma(\underline{0_6 10}) = \underline{0_5 10_2} = 3 \rightarrow \\ \sigma(\underline{0_5 10_2}) = \underline{0_4 10_3} = 4 &\rightarrow \sigma(\underline{0_4 10_3}) = \underline{0_3 10_4} = 5 \rightarrow \sigma(\underline{0_3 10_4}) = \underline{0_2 10_5} = 6 \rightarrow \sigma(\underline{0_2 10_5}) = \\ \underline{010_6} = 7 &\rightarrow \sigma(\underline{010_6}) = \underline{10_7} = 8 \rightarrow \sigma(\underline{10_7}) = \underline{0_7 1} = 1 \text{ y } b_+ \underline{a} = \underline{10_6 10} = 9 \rightarrow \sigma(\underline{10_6 10}) = \\ \underline{0_6 10} = 2. \end{aligned}$$

Así obtenemos la siguiente permutación

$$p = \left(\begin{array}{cccccccc|cc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

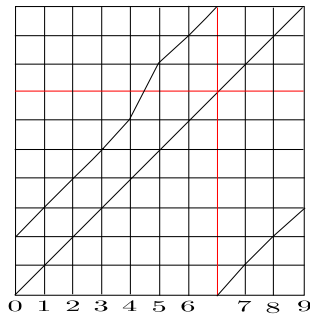


De donde obtenemos $a_- \underline{b} = \underline{00_7 1}$, $b_+ \underline{a} = \underline{10_6 10}$

Aquí $k = 1$, $(1, 8) = 1$ son primos relativos y $a = \underline{0_7 1}$ es de período 8

Consideremos ahora p^2

$$p^2 = \left(\begin{array}{cccccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 1 & 2 & 3 \end{array} \right)$$



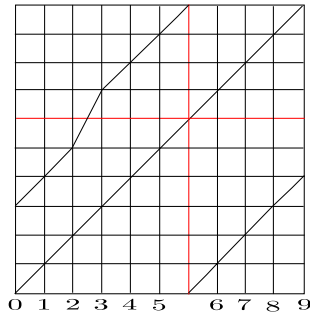
de donde obtenemos $a_{-}b = \underline{00001}$, $b_{+}a = \underline{10010}$

Aquí $k = 2$ que es divisor de 8 y $a = \underline{0001}$ es de período 4. Esta sucesión genera a

$\alpha = \underline{a_{-}b_{+}} = \underline{00001001} \in A_{\infty}^{\infty}$ que es de período 8

Consideremos ahora p^3

$$p^3 = \left(\begin{array}{cccccc|cccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \right)$$

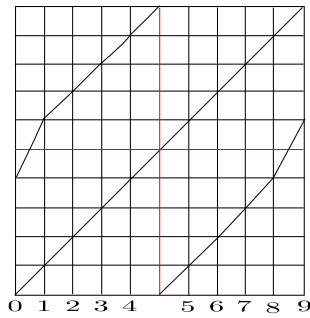


De donde obtenemos $a_{-}b = \underline{001001001}$, $b_{+}a = \underline{101001010}$

Aquí $k = 3$, $(3, 8) = 1$ son primos relativos y $a = \underline{00100101}$ es de período 8.

Consideremos ahora p^4

$$p^4 = \left(\begin{array}{cccccc|ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \right)$$

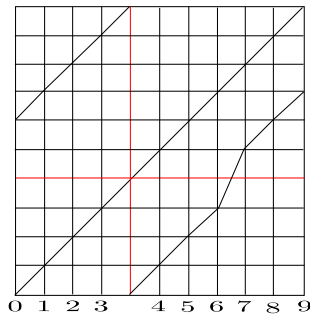


Entonces tenemos $a_{-}\underline{b} = 00\underline{1}$, $b_{+}\underline{a} = 1\underline{10}$

Aquí $k = 4$ que es divisor de 8, $a = \underline{01}$ es de período 2. Esta sucesión genera las sucesiones: $\alpha_1 = \underline{a_{-}b_{+}a^2} = \underline{00110101}$, $\alpha_2 = \underline{a_{-}b^2b_{+}} = \underline{00101011}$ y $\alpha_3 = \underline{(a_1)_{-}(b_1)_{+}}$, donde $a_1 = \underline{a_{-}b_{+}} = \underline{0011}$, así $\alpha_3 = \underline{00101101}$ que son sucesiones en A_{∞}^{∞} de período 8.

Consideremos p^5

$$p^5 = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \right)$$

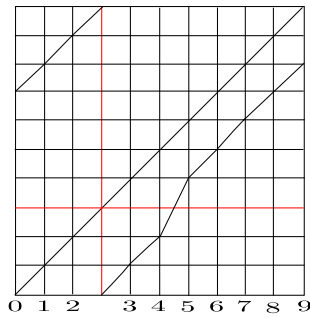


De donde obtenemos $a_{-}\underline{b} = \underline{010110101}$, $b_{+}\underline{a} = \underline{110110110}$

Aquí $k = 5$, $(5, 8) = 1$ son primos relativos y $a = \underline{01011011}$ es de período 8

Consideramos p^6

$$p^6 = \left(\begin{array}{ccc|cccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 7 & 8 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \right)$$



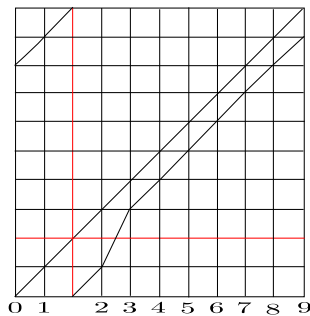
Así tenemos $a_{-}b = \underline{01101}$, $b_{+}a = \underline{11110}$

Aquí $k = 6 = 2 \cdot 3$, $t = 8 = 2 \cdot 4$ y $a = \underline{0111}$ que es de período 4. Esta sucesión genera a

$\alpha = \underline{a_{-}b_{+}} = \underline{01101111} \in A_{\infty}^{\infty}$ que es de período 8.

Consideramos p^7

$$p^7 = \left(\begin{array}{c|cccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \hline 7 & 8 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array} \right)$$



De donde tenemos que $a_{-}b = \underline{01_601}$ y $b_{+}a = \underline{11_70}$

Aquí $k = 7$, $(7, 8) = 1$ son primos relativos y $a = \underline{01_7}$ es de período 8

Por último consideremos p^8

$$p^8 = \left(\begin{array}{c|cccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \hline 8 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 1 \end{array} \right)$$

Las otras sucesiones minimales de período 8 son las siguientes:

1. $\alpha = \underline{a_{-}d_{+}} = \underline{00111011}$, donde $a = \underline{01}$, $d = \underline{111010}$

2. $\alpha = \underline{a_-d_+} = \underline{00111111}$, donde $a = \underline{01}$, $d = \underline{111110}$
3. $\alpha = \underline{a_-d_+} = \underline{00000011}$, donde $a = \underline{000001}$, $d = \underline{10}$
4. $\alpha = \underline{a_-d_+} = \underline{00010011}$, donde $a = \underline{000101}$, $d = \underline{10}$
5. $\alpha = \underline{a_-d_+} = \underline{00010101}$, donde $a = \underline{001}$, $d = \underline{10100}$
6. $\alpha = \underline{a_-d_+} = \underline{00011011}$, donde $a = \underline{001}$, $d = \underline{11010}$
7. $\alpha = \underline{a_-d_+} = \underline{00011111}$, donde $a = \underline{001}$, $d = \underline{11110}$
8. $\alpha = \underline{a_-d_+} = \underline{01011111}$, donde $a = \underline{011}$, $d = \underline{11110}$
9. $\alpha = \underline{a_-d_+} = \underline{00000101}$, donde $a = \underline{00001}$, $d = \underline{100}$
10. $\alpha = \underline{a_-d_+} = \underline{00000111}$, donde $a = \underline{00001}$, $d = \underline{110}$
11. $\alpha = \underline{a_-d_+} = \underline{00100111}$, donde $a = \underline{00101}$, $d = \underline{110}$
12. $\alpha = \underline{a_-d_+} = \underline{01010111}$, donde $a = \underline{01011}$, $d = \underline{110}$
13. $\alpha = \underline{a_-d_+} = \underline{00001101}$, donde $a = \underline{0001}$, $d = \underline{1100}$
14. $\alpha = \underline{a_-d_+} = \underline{00001111}$, donde $a = \underline{0001}$, $d = \underline{1110}$
15. $\alpha = \underline{a_-d_+} = \underline{00101111}$, donde $a = \underline{0011}$, $d = \underline{1110}$
16. $\alpha = \underline{a_-d_+a} = \underline{00111101}$, donde $a = \underline{01}$, $d = \underline{1110}$
17. $\alpha = \underline{a_-dd_+} = \underline{00001011}$, donde $a = \underline{0001}$, $d = \underline{10}$
18. $\alpha = \underline{a_-d_+a} = \underline{00011001}$, donde $a = \underline{001}$, $d = \underline{10}$
19. $\alpha = \underline{a_-dd_+} = \underline{00110111}$, donde $a = \underline{01}$, $d = \underline{110}$

Notamos que al aplicar el Teorema A se tiene que $h_{top}(\alpha, b(\alpha)) = h_{top}(a, d) > 0$ para todas ellas.

Sucesivamente consideramos $a = \underline{0_{t-1}1}$ de período t no primo

1. Si k es primo relativo con t entonces p^k genera una sucesión $a \in A_\infty^\infty$ talque $Per(a) = t$, donde

$$p^k = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 \dots & t-k & t-k+1 & \dots & t-k+j & \dots & t & t+1 \\ k & k+1 \dots & t & 1 & \dots & j & \dots & k & k+1 \end{array} \right)$$

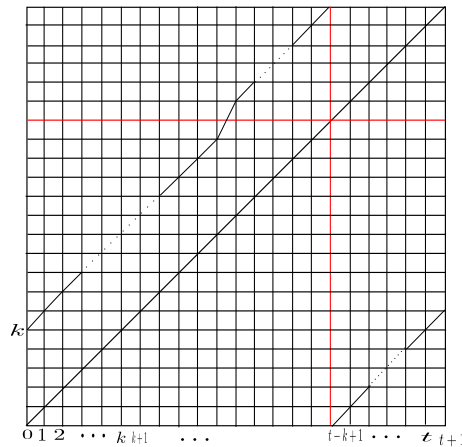
Proof. La demostración es análoga al caso primo □

2. Si k es divisor de t , entonces p^k genera sucesión $a \in A_\infty^\infty$ talque $per(a) = \frac{t}{k}$ (que es divisor de t)

Proof. Observemos que si k es divisor de t , entonces $k \leq \frac{t}{2}$, así

$$p^k = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 \dots & t-k & t-k+1 & \dots & t-k+j & \dots & t & t+1 \\ k & k+1 \dots & t & 1 & \dots & j & \dots & k & k+1 \end{array} \right)$$

El gráfico asociado es



Del gráfico observamos que:

$$0 \rightarrow \underbrace{k \rightarrow 2k \rightarrow 3k \rightarrow \dots \rightarrow t-k}_{\frac{t-k}{k}} \rightarrow t \rightarrow k$$

$$t+1 \rightarrow \underbrace{k+1 \rightarrow 2k+1 \rightarrow \dots \rightarrow \left(\frac{t-k}{k}-1\right) \cdot k+1}_{\frac{t-k}{k}-1} \rightarrow \frac{t-k}{k} \cdot k+1 \rightarrow 1 \rightarrow k+1$$

Donde obtenemos

$$a_{-}b = 00 \frac{t-k}{k} 1$$

$$b_{+}a = 10 \frac{t-k}{k} -1 10$$

$$a = 0 \frac{t-k}{k} 1, \text{ y } Per(a) = \frac{t-k}{k} + 1 = \frac{t}{k}$$

Si $m = \frac{t-k}{k}$, entonces podemos escribir $a = \underline{0_m 1}$. Esta sucesión a genera las sucesiones $\underline{a_{-}b_{+}a^{k-2}}$ y $\underline{a_{-}b^{k-2}b_{+}}$ de período t , pertenecientes a A_{∞}^{∞} . Notar que para $k = 2$ es una sola sucesión $\underline{a_{-}b_{+}} \in A_{\infty}^{\infty}$ \square

3. Si $t = k_1 \cdot t_2$ y $k = k_1 \cdot k_2$, con t_2 y k_2 primos relativos y $k_1 > 1$ entonces p^k genera sucesión $a \in A_{\infty}^{\infty}$ tal que $Per(a) = t_2$

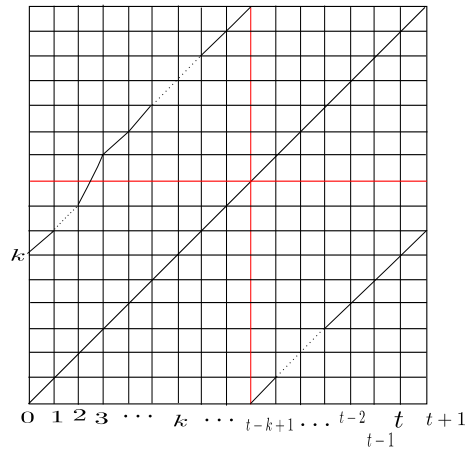
Proof. Primero suponemos $k < \frac{t}{2}$

$$p^k = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & \dots & t-k & t-k+1 & \dots & t-k+j & \dots & t & t+1 \\ k & k+1 & \dots & t & 1 & \dots & j & \dots & k & k+1 \end{array} \right)$$

- (a) Si k divide a $t-2$, entonces $k_1 = 2$, en efecto

Como k divide a $t-2$, entonces $t-2 = h \cdot k \Rightarrow t_2 = \frac{h \cdot k_1 \cdot k_2 + 2}{k_1} = h \cdot k_2 + \frac{2}{k_1}$, entonces para que $t_2 \in \mathbb{N}$, k_1 debe ser divisor de 2, luego $k_1 = 2$

El gráfico asociado a la permutación es



Del gráfico observamos que

$$\begin{array}{l}
0 \rightarrow \underbrace{k \rightarrow 2k \rightarrow \dots \rightarrow t-k-2}_{\frac{t-2}{k}-1} \rightarrow t-2 \rightarrow \\
\rightarrow k-2 \rightarrow 2k-2 \rightarrow \dots \rightarrow t-k-4 \rightarrow t-4 \rightarrow \\
\vdots \\
\rightarrow 4 \rightarrow k+4 \rightarrow \dots \rightarrow t-2k+2 \rightarrow t-k+2 \rightarrow \\
\rightarrow \underbrace{2 \rightarrow k+2 \rightarrow \dots \rightarrow t-k}_{\frac{t-2}{k}} \rightarrow t \rightarrow k
\end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} 0 \\ \rightarrow \\ \rightarrow \\ \vdots \\ \rightarrow \\ \rightarrow \end{array}} \right\} k_2 - 1$$

y

$$\begin{array}{l}
t+1 \rightarrow \underbrace{k+1 \rightarrow 2k+1 \rightarrow \dots \rightarrow t-k-1}_{\frac{t-2}{k}-1} \rightarrow t-1 \rightarrow \\
\rightarrow k-1 \rightarrow 2k-1 \rightarrow \dots \rightarrow t-k-3 \rightarrow t-3 \rightarrow \\
\vdots \\
\rightarrow 5 \rightarrow k+5 \rightarrow \dots \rightarrow t-2k+3 \rightarrow t-k+3 \rightarrow \\
\rightarrow 3 \rightarrow k+3 \rightarrow \dots \rightarrow t-2k+1 \rightarrow t-k+1 \rightarrow \\
\rightarrow 1 \rightarrow k+1
\end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} t+1 \\ \rightarrow \\ \rightarrow \\ \vdots \\ \rightarrow \\ \rightarrow \end{array}} \right\} k_2$$

En la primera parte tenemos $k_2 - 1$ veces, ya que si consideremos sólo los inicios de cada sucesión tenemos:

$$k, k-2, \dots, 8, 6, 4 = \underbrace{2k_2}_{k_2-1}, \underbrace{2 \cdot (k_2 - 1)}_{k_2-2}, \dots, \underbrace{2 \cdot 4}_3, \underbrace{2 \cdot 3}_2, \underbrace{2 \cdot 2}_1$$

Luego tenemos $k_2 - 1$ términos. De manera análoga podemos observar que la sucesión máxima, asociada a la permutación, tiene k_2 términos.

Así obtenemos

$$a_{-b} = \frac{0(0_{\frac{t-2}{k}-1}1)_{k_2-1}0_{\frac{t-2}{k}}1}{\dots}$$

$$b_{+a} = \frac{1(0_{\frac{t-2}{k}-1}1)_{k_2}0}{\dots}$$

$$a = \frac{0_{\frac{t-2}{k}}1(0_{\frac{t-2}{k}-1}1)_{k_2-1}}{\dots}$$

Si $m+1 = \frac{t-2}{k}$, entonces $a = \underline{0_{m+1}1(0_m1)_{k_2-1}}$ y

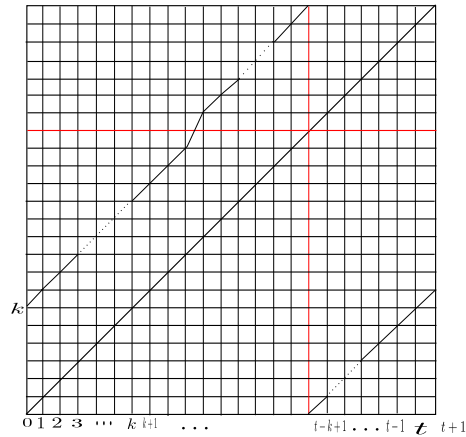
$$\begin{aligned}
Per(a) &= (m+2) + (m+1)(k_2-1) \\
&= \frac{t-2}{k} + 1 + \frac{t-2}{k}(k_2-1) \\
&= \frac{t-2}{k} + 1 + \frac{t-2}{k}k_2 - \frac{t-2}{k} \\
&= \frac{t-2}{k}k_2 + 1 \\
&= \frac{t-2}{2k_2}k_2 + 1 \\
&= \frac{t-2}{2} + 1 \\
&= \frac{2t_2-2}{2} + 1 \\
&= t_2 - 1 + 1 \\
&= t_2
\end{aligned}$$

La sucesión a genera la sucesión $\underline{a_{-}b_{+}}$ (ya que $k_1 = 2$) de período $k_1 \cdot t_2 = t$, pertenecientes a A_{∞}^{∞} .

(b) Si k divide a $t-3$, entonces $k_1 = 3$, en efecto

Como k divide a $t-3$, entonces $t-3 = h \cdot k \Rightarrow t_2 = \frac{h \cdot k_1 \cdot k_2 + 3}{k_1} = h \cdot k_2 + \frac{3}{k_1}$,
entonces para que $t_2 \in \mathbb{N}$, k_1 debe ser divisor de 3, luego $k_1 = 3$

El gráfico asociado a la permutación es



Del gráfico observamos que

$$\left. \begin{aligned}
0 &\rightarrow k \rightarrow 2k \rightarrow \dots \rightarrow t-k-3 \rightarrow t-3 \rightarrow \\
&\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\frac{t-3}{k}-1} \\
&\rightarrow k-3 \rightarrow 2k-3 \rightarrow \dots \rightarrow t-k-6 \rightarrow t-6 \rightarrow \\
&\quad \vdots \\
&\rightarrow 6 \rightarrow k+6 \rightarrow \dots \rightarrow t-2k+3 \rightarrow t-k+3
\end{aligned} \right\} k_2 - 1$$

$$\rightarrow \underbrace{3 \rightarrow k+3 \rightarrow \dots \rightarrow t-2k \rightarrow t-k \rightarrow t \rightarrow k}_{\frac{t-3}{k}}$$

y

$$\left. \begin{array}{l} t+1 \rightarrow \underbrace{k+1 \rightarrow 2k+1 \rightarrow \dots \rightarrow t-k-2 \rightarrow t-2 \rightarrow}_{\frac{t-3}{k}-1} \\ \rightarrow k-2 \rightarrow 2k-2 \rightarrow \dots \rightarrow t-k-5 \rightarrow t-5 \rightarrow \\ \vdots \\ \rightarrow 7 \rightarrow k+7 \rightarrow \dots \rightarrow t-2k+4 \rightarrow t-k+4 \\ \rightarrow 4 \rightarrow k+4 \rightarrow \dots \rightarrow t-2k+1 \rightarrow t-k+1 \end{array} \right\} k_2$$

$$\rightarrow 1 \rightarrow k+1$$

En la primera parte tenemos $k_2 - 1$ veces, ya que si consideremos sólo los inicios de cada sucesión tenemos

$$k, k-3, \dots, 9, 6 = \underbrace{3k_2}_{k_2-1}, \underbrace{3 \cdot (k_2-1)}_{k_2-2}, \dots, \underbrace{2 \cdot 3}_2, \underbrace{3 \cdot 2}_1$$

Luego tenemos $k_2 - 1$ términos, de manera análoga podemos observar que la sucesión máxima tiene k_2 términos.

Así obtenemos

$$a_{-b} = 0 \left(\underbrace{0 \frac{t-3}{k} - 1}_{k_2-1} \right)_{k_2-1} 0 \frac{t-3}{k} 1$$

$$b_{+a} = 1 \left(\underbrace{0 \frac{t-3}{k} - 1}_{k_2} \right)_{k_2} 0, \text{ donde}$$

$$a = \frac{0 \frac{t-3}{k} 1 \left(0 \frac{t-3}{k} - 1 \right)_{k_2-1}}{k}$$

Luego si $m+1 = \frac{t-3}{k}$, tenemos

$$a = \frac{0_{m+1} 1 (0_m 1)_{k_2-1}}{k} \text{ y}$$

$$\begin{aligned} Per(a) &= m+2 + (m+1)(k_2-1) \\ &= \frac{t-3}{k} + 1 + \frac{t-3}{k}(k_2-1) \\ &= \frac{t-3}{k} + 1 + \frac{t-3}{k}k_2 - \frac{t-3}{k} \\ &= \frac{t-3}{k}k_2 + 1 \\ &= \frac{t-3}{3k_2}k_2 + 1 \\ &= \frac{t-3}{3} + 1 \\ &= \frac{3t_2-3}{3} + 1 \\ &= t_2 - 1 + 1 \\ &= t_2 \end{aligned}$$

La sucesión a genera las sucesiones $\underline{a_{-b_{+a}}}$ y $\underline{a_{-bb_{+}}}$ de período $t = k_1 \cdot t_2$,

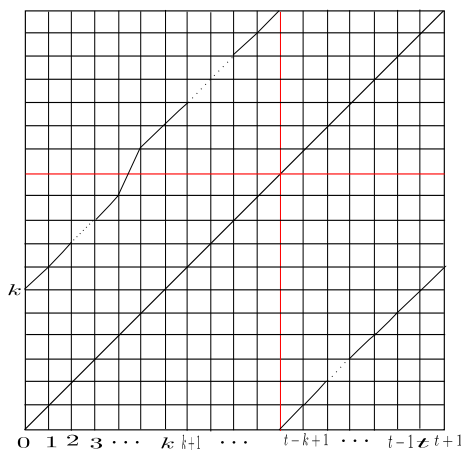
pertenecientes a A_∞^∞

(c) Si k divide a $t - 4$, entonces k_1 tiene que ser 2 o 4

En efecto

Como k divide a $t - 4$, entonces $t - 4 = h \cdot k \Rightarrow t_2 = \frac{h \cdot k_1 \cdot k_2 + 4}{k_1} = h \cdot k_2 + \frac{4}{k_1}$,
entonces para que $t_2 \in \mathbb{N}$, k_1 debe ser divisor de 4, luego $k_1 = 2$ o $k_1 = 4$

• Si $k_1 = 2$ entonces el gráfico asociado a la permutación es



Del gráfico observamos que

$$\left. \begin{aligned}
 0 &\rightarrow \underbrace{k \rightarrow 2k \rightarrow \dots \rightarrow t - k - 4}_{\frac{t-4}{k}-1} \rightarrow t - 4 \rightarrow \\
 &\rightarrow k - 4 \rightarrow 2k - 4 \rightarrow \dots \rightarrow t - k - 8 \rightarrow t - 8 \rightarrow \\
 &\vdots \\
 &\rightarrow 6 \rightarrow k + 6 \rightarrow \dots \rightarrow t - 2k + 2 \rightarrow t - k + 2 \\
 &\rightarrow \underbrace{2 \rightarrow k + 2 \rightarrow \dots \rightarrow t - k - 2}_{\frac{t-4}{k}} \rightarrow t - 2 \rightarrow \\
 &\rightarrow \underbrace{k - 2 \rightarrow 2k - 2 \rightarrow \dots \rightarrow t - k - 6}_{\frac{t-4}{k}-1} \rightarrow t - 6 \rightarrow \\
 &\rightarrow k - 6 \rightarrow 2k - 6 \rightarrow \dots \rightarrow t - k - 10 \rightarrow t - 10 \rightarrow \\
 &\vdots \\
 &\rightarrow 8 \rightarrow k + 8 \rightarrow \dots \rightarrow t - 2k + 4 \rightarrow t - k + 4 \\
 &\rightarrow \underbrace{4 \rightarrow k + 4 \rightarrow \dots \rightarrow t - k}_{\frac{t-4}{k}} \rightarrow t \rightarrow k
 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\frac{k_2 - 1}{2} \\ &\frac{k_2 - 1}{2} - 1 \end{aligned}$$

y

$$\begin{array}{l}
t+1 \rightarrow \underbrace{k+1 \rightarrow 2k+1 \rightarrow \dots \rightarrow t-k-3}_{\frac{t-4}{k}-1} \rightarrow t-3 \rightarrow \\
\rightarrow k-3 \rightarrow 2k-3 \rightarrow \dots \rightarrow t-k-7 \rightarrow t-7 \rightarrow \\
\vdots \\
\rightarrow 7 \rightarrow k+7 \rightarrow \dots \rightarrow t-2k+3 \rightarrow t-k+3 \\
\left. \vphantom{\begin{array}{l} t+1 \\ \rightarrow k-3 \\ \vdots \\ \rightarrow 7 \end{array}} \right\} \frac{k_2-1}{2} \\
\rightarrow \underbrace{3 \rightarrow k+3 \rightarrow \dots \rightarrow t-k-1}_{\frac{t-4}{k}} \rightarrow t-1 \rightarrow \\
\rightarrow \underbrace{k-1 \rightarrow 2k-1 \rightarrow \dots \rightarrow t-k-5}_{\frac{t-4}{k}-1} \rightarrow t-5 \rightarrow \\
\rightarrow k-5 \rightarrow 2k-5 \rightarrow \dots \rightarrow t-k-9 \rightarrow t-9 \rightarrow \\
\vdots \\
\rightarrow 9 \rightarrow k+9 \rightarrow \dots \rightarrow t-2k+5 \rightarrow t-k+5 \\
\rightarrow 5 \rightarrow k+5 \rightarrow \dots \rightarrow t-2k+1 \rightarrow t-k+1 \\
\left. \vphantom{\begin{array}{l} \rightarrow k-1 \\ \rightarrow k-5 \\ \vdots \\ \rightarrow 9 \\ \rightarrow 5 \end{array}} \right\} \frac{k_2-1}{2} \\
\rightarrow 1 \rightarrow k+1
\end{array}$$

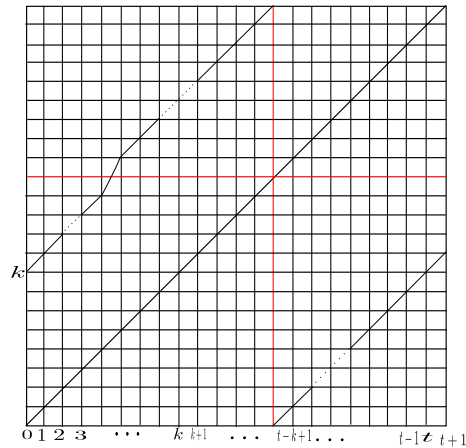
En la sucesión minimal tenemos primero $\frac{k_2-1}{2}$ términos y luego $\frac{k_2-1}{2} - 1$ términos, en efecto tomemos los primeros terminos de cada sucesión $k, k-4, k-8, k-12 \dots k-4T = 10, k-4(T+1) = 6, T = \frac{k-10}{4}, T+2 = \frac{k-10}{4} + 2 = \frac{k-2}{4} = \frac{2k_2-2}{4} = \frac{k_2-1}{2}$, es decir hay $\frac{k_2-1}{2}$ términos, analogamente tomamos los primeros términos de la siguiente sucesión $k-2, k-6, \dots, k-(2+4T) = 8, T = \frac{k-10}{4}, T+1 = \frac{k-6}{4} = \frac{2k_2-6}{4} = \frac{k_2-3}{2} = \frac{k_2-1}{2} - 1$, así tenemos $\frac{k_2-1}{2} - 1$ términos. Analogamente se procede con la sucesión maximal. De donde obtenemos

$$\begin{aligned}
a_{-b} &= \frac{0(0_{\frac{t-4}{k}-1}1)_{\frac{k_2-1}{2}}0_{\frac{t-4}{k}}1(0_{\frac{t-4}{k}-1}1)_{\frac{k_2-1}{2}-1}0_{\frac{t-4}{k}}1}{1(0_{\frac{t-4}{k}-1}1)_{\frac{k_2-1}{2}}0_{\frac{t-4}{k}}1(0_{\frac{t-4}{k}-1}1)_{\frac{k_2-1}{2}}0} \text{, donde} \\
a &= \frac{0_{\frac{t-4}{k}}1(0_{\frac{t-4}{k}-1}1)_{\frac{k_2-1}{2}-1}0_{\frac{t-4}{k}}1(0_{\frac{t-4}{k}-1}1)_{\frac{k_2-1}{2}}}{\text{Si } m+1 = \frac{t-4}{k} \text{ y } s+1 = \frac{k_2-1}{2}, \text{ entonces}} \\
a &= \underline{0_{m+1}1(0_m1)_s0_{m+1}1(0_m1)_{s+1}} \text{ y}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Per(a) &= \overline{m+2} + (m+1)s + m+2 + (m+1)(s+1) \\
&= \frac{t-4}{k} + 1 + \frac{t-4}{k} \left(\frac{k_2-1}{2} - 1 \right) + \frac{t-4}{k} + 1 + \frac{t-4}{k} \cdot \frac{k_2-1}{2} \\
&= \frac{t-4}{k} + 1 + \frac{t-4}{k} \cdot \frac{k_2-1}{2} - \frac{t-4}{k} + \frac{t-4}{k} + 1 + \frac{t-4}{k} \cdot \frac{k_2-1}{2} \\
&= 2 \frac{t-4}{k} \cdot \frac{k_2-1}{2} + \frac{t-4}{k} + 2 \\
&= \frac{t-4}{k} \cdot k_2 - \frac{t-4}{k} + \frac{t-4}{k} + 2 \\
&= \frac{2t_2-4}{2k_2} \cdot k_2 + 2 \\
&= t_2 - 2 + 2 \\
&= t_2
\end{aligned}$$

En este caso la sucesión a genera la sucesión $\underline{a-b_+} \in A_\infty^\infty$, que es de período $2t-2=t$

- Si $k_1 = 4$ entonces el gráfico asociado a la permutación es



Del gráfico observamos que

$$\left. \begin{aligned}
0 &\rightarrow \underbrace{k \rightarrow 2k \rightarrow \dots \rightarrow t-k-4 \rightarrow t-4}_{\frac{t-4}{k}-1} \rightarrow \\
&\rightarrow k-4 \rightarrow 2k-4 \rightarrow \dots \rightarrow t-k-8 \rightarrow t-8 \rightarrow \\
&\vdots \\
&\rightarrow 8 \rightarrow k+8 \rightarrow \dots \rightarrow t-2k+4 \rightarrow t-k+4 \\
&\rightarrow \underbrace{4 \rightarrow k+4 \rightarrow \dots \rightarrow t-2k \rightarrow t-k}_{\frac{t-4}{k}} \rightarrow t \rightarrow k
\end{aligned} \right\} k_2 - 1$$

y

$$\begin{array}{l}
t+1 \rightarrow \underbrace{k+1 \rightarrow 2k+1 \rightarrow \dots \rightarrow t-k-3}_{\frac{t-4}{k}-1} \rightarrow t-3 \rightarrow \\
\rightarrow k-3 \rightarrow 2k-3 \rightarrow \dots \rightarrow t-k-7 \rightarrow t-7 \rightarrow \\
\vdots \\
\rightarrow 9 \rightarrow k+9 \rightarrow \dots \rightarrow t-2k+5 \rightarrow t-k+5 \rightarrow \\
\rightarrow 5 \rightarrow k+5 \rightarrow \dots \rightarrow t-2k+1 \rightarrow t-k+1 \\
\rightarrow 1 \rightarrow k+1
\end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} t+1 \\ \rightarrow \\ \rightarrow \\ \vdots \\ \rightarrow \\ \rightarrow \end{array}} \right\} k_2$$

En el primer caso tenemos $k_2 - 1$ terminos ya que tomando el primer término de cada sucesión tenemos:

$k, k-4, \dots, 12, 8 = \underbrace{4k_2}_{k_2-1}, \underbrace{4(k_2-1)}_{k_2-2}, \dots, \underbrace{4 \cdot 3}_2, \underbrace{4 \cdot 2}_1$, donde claramente tenemos $k_2 - 1$ terminos, de manera analoga se prueba que en la sucesión maximal hay k_2 terminos.

Así obtenemos

$$\begin{aligned}
a_- b &= 0 \underbrace{(0_{\frac{t-4}{k}-1} 1)_{k_2-1}}_{k_2-1} \underbrace{0_{\frac{t-4}{k}} 1}_{k_2-1} \\
b_+ a &= 1 \underbrace{(0_{\frac{t-4}{k}-1} 1)_{k_2}}_{k_2} 0, \text{ donde} \\
a &= 0 \underbrace{\frac{t-4}{k}}_{k_2-1} 1 \underbrace{(0_{\frac{t-4}{k}-1} 1)_{k_2-1}}_{k_2-1} \\
\text{Si } m+1 &= \frac{t-4}{k}, \text{ entonces} \\
a &= \underline{0_{m+1} 1 (0_m 1)_{k_2-1}} \text{ y}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Per(a) &= m+2 + (m+1)(k_2-1) \\
&= \frac{t-4}{k} + 1 + \frac{t-4}{k} \cdot (k_2-1) \\
&= \frac{t-4}{k} + 1 + \frac{t-4}{k} \cdot k_2 - \frac{t-4}{k} \\
&= \frac{t-4}{k} \cdot k_2 + 1 \\
&= \frac{4t_2-4}{4k_2} \cdot k_2 + 1 \\
&= t_2 - 1 + 1 \\
&= t_2
\end{aligned}$$

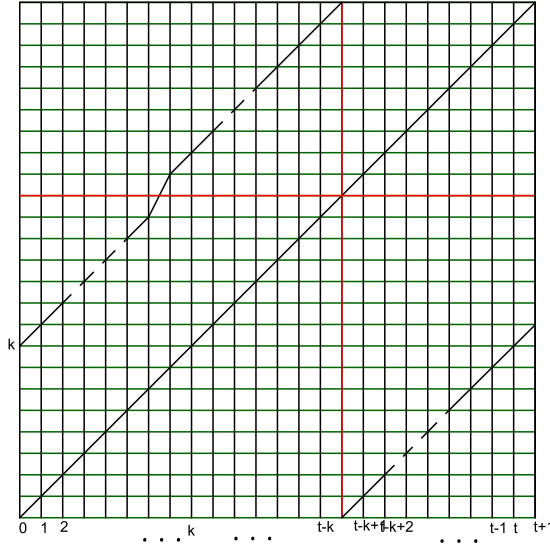
La sucesión a genera las sucesiones $\underline{a_- b_+ a^2}$ y $\underline{a_- b^2 b_+}$ pertenecientes a A_∞^∞ de período $4t_2 = t$

- Sucesivamente si k divide a $t-k+2$, entonces $k_1 = 2$

En efecto si k divide a $t-k+2$, entonces $t-k+2 = h \cdot k$ entonces $t = h \cdot k + k - 2$,

luego $t_2 = \frac{k_1 \cdot (h \cdot k_2 + k_2) - 2}{k_1} = h \cdot k_2 + k_2 - \frac{2}{k_1}$, así como $t_2 \in \mathbb{N}$ tenemos que k_1 es divisor de 2, luego $k_1 = 2$

El gráfico asociado a la permutación es



Observemos que

$$\begin{aligned}
 0 &\rightarrow \underbrace{k \rightarrow 2k \rightarrow \dots \rightarrow t - 2k + 2}_{\frac{t-k+2}{k}-1} \rightarrow t - k + 2 \rightarrow \\
 &\rightarrow \left. \begin{aligned} &\underbrace{2 \rightarrow 2+k \rightarrow \dots \rightarrow t - 2k + 4}_{\frac{t-k+2}{k}} \rightarrow t - k + 4 \rightarrow \\ &\vdots \\ &\rightarrow k - 4 \rightarrow 2k - 4 \rightarrow \dots \rightarrow t - k - 2 \rightarrow t - 2 \rightarrow \\ &\rightarrow k - 2 \rightarrow 2k - 2 \rightarrow \dots \rightarrow t - k \rightarrow t \end{aligned} \right\} k_2 - 1
 \end{aligned}$$

Observemos que son $k_2 - 1$ terminos ya que si consideramos el primer elemeto de cada sucesión tenemos:

$$2, 4, \dots, k - 4, k - 2 = \underbrace{2 \cdot 1}_1, \underbrace{2 \cdot 2}_2, \dots, \underbrace{2 \cdot (k_2 - 2)}_{k_2 - 2}, \underbrace{2 \cdot (k_2 - 1)}_{k_2 - 1}, \text{ es decir tenemos}$$

$k_2 - 1$ términos y para cada sucesión maximal tenemos

$$t + 1 \rightarrow \underbrace{k + 1 \rightarrow 2k + 1 \rightarrow \dots \rightarrow t - 2k + 3}_{\frac{t-k+2}{k}-1} \rightarrow t - k + 3 \rightarrow$$

$$\begin{array}{l}
\rightarrow \underbrace{3 \rightarrow 3+k \rightarrow \dots \rightarrow t-2k+5 \rightarrow t-k+5 \rightarrow}_{\frac{t-k+2}{k}} \\
\vdots \\
\rightarrow \underbrace{k-3 \rightarrow 2k-3 \rightarrow \dots \rightarrow t-k-1 \rightarrow t-1 \rightarrow}_{\frac{t-k+2}{k}} \\
\rightarrow \underbrace{k-1 \rightarrow 2k-1 \rightarrow \dots \rightarrow t-2k+1 \rightarrow t-k+1 \rightarrow 1 \rightarrow k+1}_{\frac{t-k+2}{k}-1}
\end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \rightarrow \\ \vdots \\ \rightarrow \\ \rightarrow \end{array}} \right\} k_2 - 2$$

Observemos que son $k_2 - 2$ términos ya que tomando el primer elemento de cada sucesión tenemos

$$3, 5, \dots, k-3 = \underbrace{2 \cdot 1 + 1}_1, \underbrace{2 \cdot 2 + 1}_2, \dots, \underbrace{2 \cdot (k_2 - 2) + 1}_{k_2 - 2}, \text{ es decir tenemos } k_2 - 2 \text{ términos.}$$

Así obtenemos

$$\begin{aligned}
a_{-}b &= \underbrace{00}_{\frac{t-k+2}{k}-1} \underbrace{1(0)}_{\frac{t-k+2}{k}} \underbrace{(0)}_{k_2-1} \\
b_{+}a &= \underbrace{10}_{\frac{t-k+2}{k}-1} \underbrace{1(0)}_{\frac{t-k+2}{k}} \underbrace{(0)}_{k_2-2} \underbrace{0}_{\frac{t-k+2}{k}-1} \underbrace{10}_{\frac{t-k+2}{k}} \text{ Donde } a = \underbrace{(0)}_{\frac{t-k+2}{k}} \underbrace{(0)}_{k_2-1} \underbrace{0}_{\frac{t-k+2}{k}-1} \underbrace{1}_{\frac{t-k+2}{k}}.
\end{aligned}$$

Si $m = \frac{t-k+2}{k} - 1$ tenemos que $a = \underbrace{(0_{m+1}1)_{k_2-1}}_{\frac{t-k+2}{k}} \underbrace{0_m 1}_y$

$$\begin{aligned}
Per(a) &= (m+2) \cdot (k_2 - 1) + m + 1 \\
&= \left(\frac{t-k+2}{k} + 1\right) \cdot (k_2 - 1) + \frac{t-k+2}{k} \\
&= \frac{t-k+2}{k} \cdot k_2 + k_2 - \frac{t-k+2}{k} - 1 + \frac{t-k+2}{k} \\
&= \frac{t-k+2}{k} \cdot k_2 + k_2 - 1 \\
&= \frac{t-k+2}{2k_2} \cdot k_2 + k_2 - 1 \\
&= \frac{2t_2 - 2k_2 + 2}{2} + k_2 - 1 \\
&= t_2 - k_2 + 1 + k_2 - 1 \\
&= t_2
\end{aligned}$$

En este caso como $t = 2t_2$, entonces la sucesión a genera la sucesión $\underline{a_{-}b_{+}}$ de período $2t_2 = t$ perteneciente a A_{∞}^{∞} .

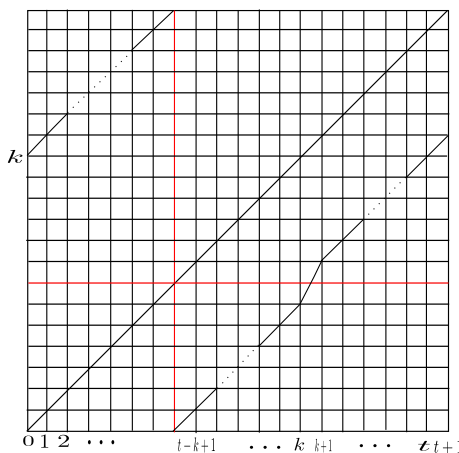
Es claro que no puede ocurrir que k divida a $t - k + 1$ ya que si así fuera $k_1 = 1$, contrario a $k_1 > 1$.

Ahora vemos el caso en que $k > \frac{t}{2}$. En estas condiciones tenemos:

$$p^k = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 \dots & t-k & t-k+1 & \dots & k & \dots & t & t+1 \\ k & k+1 \dots & t & 1 & \dots & 2k-t & \dots & k & k+1 \end{array} \right)$$

Observemos que si $k > \frac{t}{2}$ entonces $2k > t$ y $k > t-k$, $k = l \cdot (t-k) + i$ y $t = k + t-k = l(t-k) + i + t-k = (l+1) \cdot (t-k) + i$ para algun $l \in \mathbb{N}$, $i = 0, \dots, t-k-1$

• Si $i = 0$, entonces el gráfico asociado a la permutación es



Del gráfico observamos que

$$0 \rightarrow k \rightarrow \underbrace{k - (t-k) \rightarrow k - 2 \cdot (t-k) \rightarrow \dots \rightarrow k - (l-2) \cdot (t-k)}_{l-1} \rightarrow t-k \rightarrow t \rightarrow k$$

Así obtenemos

$$a_{-}b = \underline{01_{l-1}01}$$

$$b_{+}a = \underline{11_l0}$$

Donde $a = \underline{01_l}$ y $Per(a) = l+1$

Como $k = l(t-k)$ y $t = (l+1)(t-k)$, entonces el $Per(a)$ cumple con lo señalado en el resultado pues $(l, l+1) = 1$

En este caso la sucesión a genera sucesiones $\underline{a_{-}b_{+}a^{t-k-2}}$ y $\underline{a_{-}b^{t-k-2}b_{+}}$ de período $(l+1) \cdot (t-k) = t$, perteneciente a A_{∞}^{∞}

• $i = 1$, entonces $k_1 = 1$ cosa que no puede ser

Veamos que $k_1 = 1$ si $i = 1$

$$\begin{aligned}
t &= (l+1)(t-k) + 1 \\
&= (l+1)k_1(t_2 - k_2) + 1 \\
k_1 \cdot t_2 &= (l+1)k_1(t_2 - k_2) + 1 \\
t_2 &= \frac{(l+1)k_1(t_2 - k_2) + 1}{k_1} \\
t_2 &= (l+1)(t_2 - k_2) + \frac{1}{k_1}
\end{aligned}$$

Como $t_2 \in \mathbb{N}$, entonces $k_1 = 1$

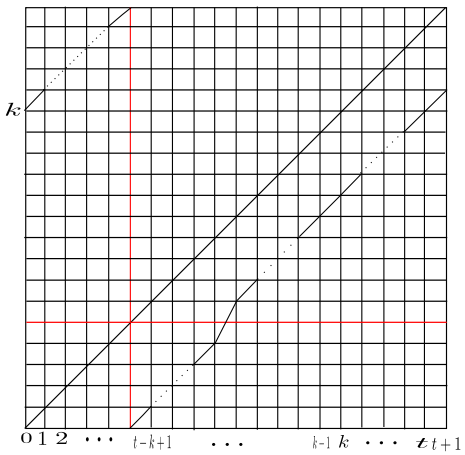
• Si $i = 2$, entonces $k_1 = 2$

En efecto, como $t = k_1 \cdot t_2$, $k = k_1 \cdot k_2$ y además $k = l \cdot (t - k) + 2$ tenemos que

$$\begin{aligned}
k_1 \cdot k_2 &= l \cdot (k_1 \cdot t_2 - k_1 \cdot k_2) + 2 \\
\Rightarrow k_1 \cdot k_2 &= k_1 \cdot l \cdot (t_2 - k_2) + 2 \\
\Rightarrow k_2 &= \frac{k_1 \cdot l \cdot (t_2 - k_2) + 2}{k_1}
\end{aligned}$$

Como $k_2 \in \mathbb{N}$, entonces $k_1 = 2$.

El gráfico asociado a la permutación es



Del gráfico observamos que

$$\left. \begin{aligned}
0 &\rightarrow \underbrace{k \rightarrow k - (t - k) \rightarrow \dots \rightarrow t - k + 2 \rightarrow 2}_{l} \rightarrow \\
&\rightarrow k + 2 \rightarrow k + 2 - (t - k) \rightarrow \dots \rightarrow t - k + 4 \rightarrow 4 \rightarrow \\
&\vdots \\
&\rightarrow (l + 1) \cdot (t - k) \rightarrow l \cdot (t - k) \rightarrow \dots \rightarrow 2 \cdot (t - k) \rightarrow t - k \rightarrow \\
&\rightarrow t \rightarrow k
\end{aligned} \right\} \frac{t - k}{2}$$

y

$$\begin{array}{l}
t+1 \rightarrow \underbrace{k+1 \rightarrow k+1 - (t-k) \rightarrow \dots \rightarrow t-k+3 \rightarrow 3}_{l} \rightarrow 3 \rightarrow \\
\rightarrow k+3 \rightarrow k+3 - (t-k) \rightarrow \dots \rightarrow t-k+5 \rightarrow 5 \rightarrow \\
\vdots \\
\rightarrow (l+1)(t-k) - 1 \rightarrow l(t-k) - 1 \rightarrow \dots \rightarrow 2(t-k) - 1 \rightarrow t-k-1 \\
\rightarrow \underbrace{(l+1) \cdot (t-k) + 1 \rightarrow l \cdot (t-k) + 1 \rightarrow \dots \rightarrow 2 \cdot (t-k) + 1 \rightarrow t-k+1}_{l+1} \\
\rightarrow 1 \rightarrow k+1
\end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} t+1 \\ \rightarrow \\ \rightarrow \\ \vdots \\ \rightarrow \\ \rightarrow \end{array}} \right\} *$$

Donde $*$ = $\frac{t-k}{2} - 1$

En la sucesión minimal son $\frac{t-k}{2}$ ya que si tomamos el ultimo término de cada sucesión tenemos:

$$\underbrace{2}_{\frac{2}{2}=1}, \underbrace{4}_{\frac{4}{2}=2}, \dots, \underbrace{t-k}_{\frac{t-k}{2}}$$

Del mismo modo podemos ver que en sucesión maximal son $\frac{t-k}{2} - 1$ ya que si tomamos el ultimo termino de cada sucesión tenemos:

$$\underbrace{3}_{\frac{3-1}{2}=1}, \underbrace{5}_{\frac{5-1}{2}=2}, \dots, \underbrace{t-k-1}_{\frac{t-k-2}{2}}$$

Así obtenemos

$$a_{-b} = 0 \underline{(1_l 0)_{\frac{t-k}{2}} 1}$$

$$b_{+a} = 1 \underline{(1_l 0)_{\frac{t-k}{2}-1} 1_{l+1} 0}$$

Donde $a = \underline{(01_l)_{\frac{t-k}{2}-1} 01_{l+1}}$

Si $m = \frac{t-k}{2} - 1$, entonces $a = \underline{(01_l)_m 01_{l+1}}$ y

$$\begin{aligned}
Per(a) &= (l+1) \cdot m + l + 2 \\
&= (l+1) \cdot \left(\frac{t-k}{2} - 1 \right) + l + 2 \\
&= (l+1) \cdot \frac{2 \cdot (t-k) - 2}{2} - l - 1 + l + 2 \\
&= (l+1) \cdot (t-k) + 1 \\
&= t_2
\end{aligned}$$

La sucesión a genera la sucesión $\underline{a_{-b}_+} \in A_{\infty}^{\infty}$ de período $2t_2 = t$

- Si $i = 3$, entonces $k_1 = 3$

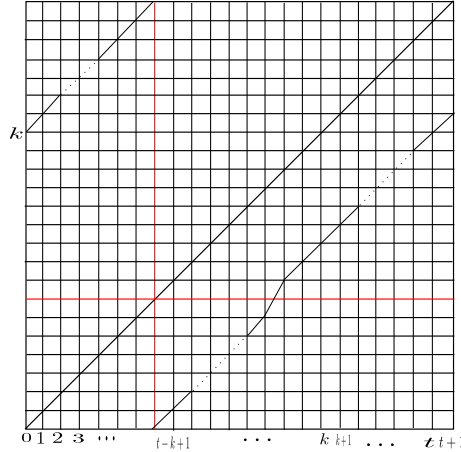
En efecto como $t = k_1 \cdot t_2$, $k = k_1 \cdot k_2$ y además $k = l \cdot (t-k) + 3$ tenemos que

$$k_1 \cdot k_2 = l \cdot (k_1 \cdot t_2 - k_1 \cdot k_2) + 3$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow k_1 \cdot k_2 &= k_1 \cdot l \cdot (t_2 - k_2) + 3 \\ \Rightarrow k_2 &= \frac{k_1 \cdot l \cdot (t_2 - k_2) + 3}{k_1} \end{aligned}$$

Como $k_2 \in \mathbb{N}$, entonces $k_1 = 3$.

El gráfico asociado a la permutación es



Del gráfico observamos que

$$\left. \begin{aligned} 0 &\rightarrow \underbrace{k \rightarrow k - (t - k) \rightarrow \dots \rightarrow t - k + 3}_{l} \rightarrow 3 \rightarrow \\ &\rightarrow k + 3 \rightarrow k + 3 - (t - k) \rightarrow \dots \rightarrow t - k + 6 \rightarrow 6 \rightarrow \\ &\vdots \\ &\rightarrow (l + 1) \cdot (t - k) \rightarrow l \cdot (t - k) \rightarrow \dots \rightarrow 2 \cdot (t - k) \rightarrow t - k \rightarrow \\ &\rightarrow t \rightarrow k \end{aligned} \right\} \frac{t - k}{3}$$

y

$$\left. \begin{aligned} t + 1 &\rightarrow \underbrace{k + 1 \rightarrow k + 1 - (t - k) \rightarrow \dots \rightarrow t - k + 4}_{l} \rightarrow 4 \rightarrow \\ &\rightarrow k + 4 \rightarrow k + 4 - (t - k) \rightarrow \dots \rightarrow t - k + 7 \rightarrow 7 \rightarrow \\ &\vdots \\ &\rightarrow (l + 1)(t - k) - 2 \rightarrow l(t - k) - 2 \rightarrow \dots \rightarrow 2(t - k) - 2 \rightarrow t - k - 2 \\ &\rightarrow \underbrace{(l + 1) \cdot (t - k) + 1 \rightarrow l \cdot (t - k) + 1 \rightarrow \dots \rightarrow 2 \cdot (t - k) + 1}_{l+1} \rightarrow t - k + 1 \\ &\rightarrow 1 \rightarrow k + 1 \end{aligned} \right\} *$$

Donde $* = \frac{t - k}{3} - 1$

En la sucesión minimal son $\frac{t - k}{3}$ ya que si tomamos el ultimo termino de cada

sucesión tenemos:

$$\underbrace{3}_{\frac{3}{3}=1}, \underbrace{6}_{\frac{6}{3}=2}, \dots, \underbrace{t-k}_{\frac{t-k}{3}}.$$

Del mismo modo podemos ver que en sucesión maximal son $\frac{t-k}{3} - 1$ ya que si tomamos el ultimo termino de cada sucesión tenemos:

$$\underbrace{4}_{\frac{4-1}{3}=1}, \underbrace{7}_{\frac{7-1}{3}=2}, \dots, \underbrace{t-k-2}_{\frac{t-k-3}{3}}.$$

Así obtenemos

$$a_{-b} = 0(1_l 0)_{\frac{t-k}{3}} 1$$

$$b_{+a} = 1(1_l 0)_{\frac{t-k}{3}-1} 1_{l+1} 0$$

$$\text{Donde } a = \underline{(01_l)_{\frac{t-k}{3}-1} 01_{l+1}}$$

$$\text{Si } m = \frac{t-k}{3} - 1, \text{ entonces } a = \underline{(01_l)_m 01_{l+1}} \text{ y}$$

$$\begin{aligned} \text{Per}(a) &= (l+1) \cdot m + l + 2 \\ &= (l+1) \cdot \left(\frac{t-k}{3} - 1 \right) + l + 2 \\ &= (l+1) \cdot \frac{3 \cdot (t-k) - 3}{3} - l - 1 + l + 2 \\ &= (l+1) \cdot (t-k) + 1 \\ &= t_2 \end{aligned}$$

La sucesión a genera las sucesiones $\underline{a_{-b_{+a}}}$ y $\underline{a_{-bb_{+a}}}$ pertenecientes a A_{∞}^{∞} de período $3t_2 = t$

• Si $i = 4$, entonces $k_1 = 2$ o $k_1 = 4$

En efecto como $t = k_1 \cdot t_2$, $k = k_1 \cdot k_2$ y además $k = l \cdot (t - k) + 4$ tenemos que

$$k_1 \cdot k_2 = l \cdot (k_1 \cdot t_2 - k_1 \cdot k_2) + 4$$

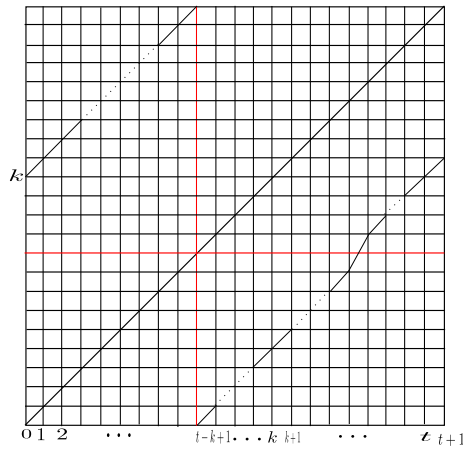
$$\Rightarrow k_1 \cdot k_2 = k_1 \cdot l \cdot (t_2 - k_2) + 4$$

$$\Rightarrow k_2 = \frac{k_1 \cdot l \cdot (t_2 - k_2) + 4}{k_1}$$

Como $k_2 \in \mathbb{N}$, entonces k_1 es divisor de 4, así $k_1 = 2$ o $k_1 = 4$

Si $k_1 = 4$, entonces

El gráfico asociado a la permutación es



Del gráfico observamos que

$$\left. \begin{aligned}
 0 &\rightarrow \underbrace{k \rightarrow k - (t - k) \rightarrow \dots \rightarrow t - k + 4 \rightarrow 4}_{l} \rightarrow \\
 &\rightarrow k + 4 \rightarrow k + 4 - (t - k) \rightarrow \dots \rightarrow t - k + 8 \rightarrow 8 \rightarrow \\
 &\vdots \\
 &\rightarrow (l + 1) \cdot (t - k) \rightarrow l \cdot (t - k) \rightarrow \dots \rightarrow 2 \cdot (t - k) \rightarrow t - k \rightarrow \\
 &\rightarrow t \rightarrow k
 \end{aligned} \right\} \frac{t - k}{4}$$

y

$$\left. \begin{aligned}
 t + 1 &\rightarrow \underbrace{k + 1 \rightarrow k + 1 - (t - k) \rightarrow \dots \rightarrow t - k + 5 \rightarrow 5}_{l} \rightarrow \\
 &\rightarrow k + 5 \rightarrow k + 5 - (t - k) \rightarrow \dots \rightarrow t - k + 9 \rightarrow 9 \rightarrow \\
 &\vdots \\
 &\rightarrow (l + 1)(t - k) - 3 \rightarrow l(t - k) - 3 \rightarrow \dots \rightarrow 2(t - k) - 3 \rightarrow t - k - 3 \\
 &\rightarrow \underbrace{(l + 1) \cdot (t - k) + 1 \rightarrow l \cdot (t - k) + 1 \rightarrow \dots \rightarrow 2 \cdot (t - k) + 1 \rightarrow t - k + 1}_{l+1} \\
 &\rightarrow 1 \rightarrow k + 1
 \end{aligned} \right\} *$$

Donde $* = \frac{t - k}{4} - 1$

En la sucesión minimal son $\frac{t - k}{4}$ ya que si tomamos el ultimo termino de cada sucesión tenemos:

$$\underbrace{4}_{\frac{4}{4}=1}, \underbrace{8}_{\frac{8}{4}=2}, \dots, \underbrace{t - k}_{\frac{t - k}{4}}$$

Del mismo modo podemos ver que en sucesión maximal son $\frac{t - k}{4} - 1$ ya que si

tomamos el ultimo termino de cada sucesión tenemos:

$$\underbrace{5}_{\frac{5-1}{4}=1}, \underbrace{9}_{\frac{9-1}{4}=2}, \dots, \underbrace{t-k-2}_{\frac{t-k-4}{4}}$$

Así obtenemos

$$a_{-b} = 0(1_l 0)_{\frac{t-k}{4}} 1$$

$$b_{+a} = 1(1_l 0)_{\frac{t-k}{4}-1} 1_{l+1}$$

Donde $a = (01_l)_{\frac{t-k}{4}-1} 01_{l+1}$

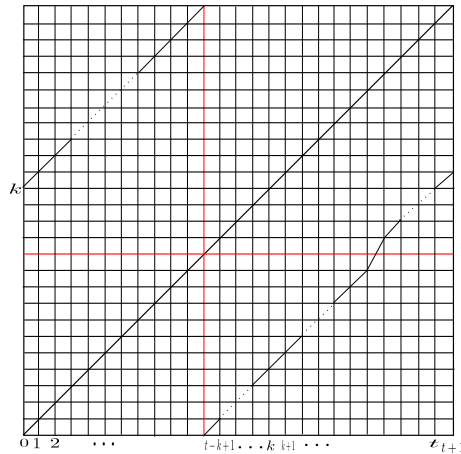
Si $m = \frac{t-k}{4} - 1$, entonces $a = (01_l)_m 01_{l+1}$ y

$$\begin{aligned} Per(a) &= (l+1) \cdot m + l + 2 \\ &= (l+1) \cdot \left(\frac{t-k}{4} - 1 \right) + l + 2 \\ &= (l+1) \cdot \frac{4 \cdot (t-k) - 4}{4} - l - 1 + l + 2 \\ &= (l+1) \cdot (t-k-1) + 1 \\ &= t_2 \end{aligned}$$

En este caso la sucesión a genera las sucesiones $\underline{a_{-b_+} a^2}$ y $\underline{a_{-b^2} b_+}$ pertenecientes a A_∞^2 de período $4t_2 = t$

Si $k_1 = 2$, entonces 4 es divisor de $t - k + 2$

El gráfico asociado a la permutación es



Del gráfico observamos que

$$\left. \begin{aligned} 0 &\rightarrow \underbrace{k \rightarrow k - (t-k) \rightarrow \dots \rightarrow t-k+4 \rightarrow 4 \rightarrow}_{l} \\ &\vdots \\ &\rightarrow (l+1) \cdot (t-k) - 2 \rightarrow l(t-k) - 2 \rightarrow \dots \rightarrow 2(t-k) - 2 \rightarrow t-k-2 \end{aligned} \right\} (1)$$

$$\begin{aligned}
&\rightarrow \underbrace{t-2 \rightarrow (t-2) - (t-k) \rightarrow \dots \rightarrow t-k+2}_{l+1} \rightarrow 2 \\
&\rightarrow \underbrace{k+2 \rightarrow k+2 - (t-k) \rightarrow \dots \rightarrow t-k+6}_l \rightarrow 6 \rightarrow \\
&\vdots \\
&\rightarrow (l+1) \cdot (t-k) \rightarrow l(t-k) \rightarrow \dots \rightarrow 2 \cdot (t-k) \rightarrow t-k \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} &\rightarrow \dots \rightarrow 2 \\ &\rightarrow \dots \rightarrow 6 \\ &\vdots \\ &\rightarrow \dots \rightarrow 2 \cdot (t-k) \end{aligned}} \right\} (2) \\
&\rightarrow t \rightarrow k
\end{aligned}$$

(1) = $\frac{t-k-2}{4}$, ya que tomando el ultimo termino de cada sucesión tenemos

$$\underbrace{4}_{\frac{4}{4}=1}, \dots, \underbrace{t-k-2}_{\frac{t-k-2}{4}}$$

(2) = $\frac{t-k-2}{4}$ ya que tomando el último termino de cada sucesión tenemos

$$\underbrace{6}_{\frac{6-2}{4}=1}, \dots, \underbrace{t-k}_{\frac{t-k-2}{4}}$$

$$\begin{aligned}
t+1 &\rightarrow \underbrace{k+1 \rightarrow k+1 - (t-k) \rightarrow \dots \rightarrow t-k+5}_l \rightarrow 5 \rightarrow \\
&\vdots \\
&\rightarrow (l+1) \cdot (t-k) - 1 \rightarrow l(t-k) - 1 \rightarrow \dots \rightarrow 2(t-k) - 1 \rightarrow t-k-1 \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} &\rightarrow \dots \rightarrow 5 \\ &\vdots \\ &\rightarrow \dots \rightarrow 2(t-k) - 1 \end{aligned}} \right\} (3)
\end{aligned}$$

$$\rightarrow \underbrace{t-1 \rightarrow (t-1) - (t-k) \rightarrow \dots \rightarrow t-k+3}_{l+1} \rightarrow 3$$

$$\rightarrow \underbrace{k+3 \rightarrow k+3 - (t-k) \rightarrow \dots \rightarrow t-k+7}_l \rightarrow 7 \rightarrow$$

$$\begin{aligned}
&\vdots \\
&\rightarrow (l+1) \cdot (t-k) - 3 \rightarrow l(t-k) - 3 \rightarrow \dots \rightarrow 2 \cdot (t-k) - 3 \rightarrow t-k-3 \\
&\rightarrow \underbrace{(l+1) \cdot (t-k) + 1 \rightarrow l(t-k) + 1 \rightarrow \dots \rightarrow 2 \cdot (t-k) + 1}_{l+1} \rightarrow t-k+1 \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} &\rightarrow \dots \rightarrow 7 \\ &\vdots \\ &\rightarrow \dots \rightarrow 2 \cdot (t-k) - 3 \end{aligned}} \right\} (4)
\end{aligned}$$

$$\rightarrow 1 \rightarrow k+1$$

(3) = $\frac{t-k-2}{4}$, ya que tomando el ultimo termino de cada sucesión tenemos

$$\underbrace{5}_{\frac{5-1}{4}=1}, \dots, \underbrace{t-k-1}_{\frac{t-k-2}{4}}$$

(2) = $\frac{t-k-2}{4} - 1$ ya que tomando el último termino de cada sucesión tenemos

$$\underbrace{7}_{\frac{7-3}{4}=1}, \dots, \underbrace{t-k-3}_{\frac{t-k-6}{4}}$$

Así obtenemos

$$a_{-b} = \overline{0(1_l 0) \frac{t-k-2}{4} 1_{l+1} 0(1_l 0) \frac{t-k-2}{4} 1}$$

$$b_{+a} = \overline{1(1_l 0) \frac{t-k-2}{4} 1_{l+1} 0(1_l 0) \frac{t-k-2}{4} -1 1_{l+1} 0}$$

$$\text{Donde } a = \overline{(01_l) \frac{t-k-2}{4} 01_{l+1} (01_l) \frac{t-k-2}{4} -1 01_{l+1}}$$

$$\text{Si } m = \frac{t-k-2}{4} - 1, \text{ entonces } a = \overline{(01_l)_{m+1} 01_{l+1} (01_l)_m 01_{l+1}} \text{ y}$$

$$\begin{aligned} \text{Per}(a) &= (l+1) \cdot (m+1) + l + 2 + (l+1) \cdot m + l + 2 \\ &= (l+1) \cdot \frac{t-k-2}{4} + (l+1) \cdot \left(\frac{t-k-2}{4} - 1 \right) + 2l + 4 \\ &= 2(l+1) \cdot \frac{t-k-2}{4} - (l+1) + 2l + 4 \\ &= (l+1) \cdot \frac{2 \cdot (t_2 - k_2 - 1)}{2} + l + 3 \\ &= (l+1) \cdot (t_2 - k_2 - 1) + l + 3 \\ &= (l+1) \cdot (t_2 - k_2) - l - 1 + l + 3 \\ &= (l+1) \cdot (t_2 - k_2) + 2 \\ &= t_2 \end{aligned}$$

En este caso la sucesión a genera la sucesión $\underline{a_{-b_+}} \in A_\infty^\infty$ de período $2t_2 = t$

Sucesivamente

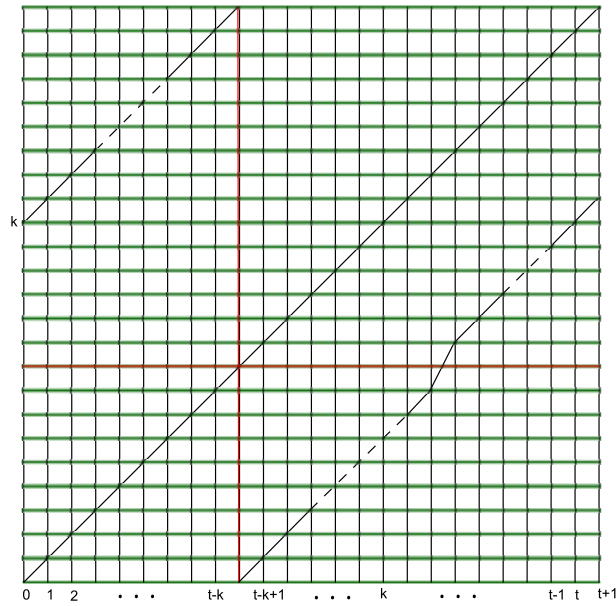
- Si $i = t - k - 2$, entonces $k_1 = 2$

En efecto, como $t = k_1 \cdot t_2$, $k = k_1 \cdot k_2$ y además $k = l \cdot (t - k) + t - k - 2$ tenemos que

$$\begin{aligned} k_1 \cdot k_2 &= l \cdot (k_1 \cdot t_2 - k_1 \cdot k_2) + k_1(t_2 - k_2) - 2 \\ \Rightarrow k_1 \cdot k_2 &= k_1 \cdot (l+1) \cdot (t_2 - k_2) - 2 \\ \Rightarrow k_2 &= \frac{k_1 \cdot (l+1) \cdot (t_2 - k_2) - 2}{k_1} \end{aligned}$$

Como $k_2 \in \mathbb{N}$, entonces $k_1 = 2$.

El gráfico asociado a la permutación es



Del gráfico observamos que

$$\begin{aligned}
 0 &\rightarrow \underbrace{k \rightarrow k - (t - k) \rightarrow \dots \rightarrow t - k + i \rightarrow t - k - 2}_{l} \rightarrow \\
 &\rightarrow \underbrace{t - 2 \rightarrow t - 2 - (t - k) \rightarrow \dots \rightarrow 2(t - k) - 4}_{l+1} \rightarrow i - 2 \rightarrow \\
 &\vdots \\
 &\rightarrow k + 4 \rightarrow k + 4 - (t - k) \rightarrow \dots \rightarrow t - k + 2 \rightarrow 2 \rightarrow \\
 &\rightarrow \underbrace{k + 2 \rightarrow k + 2 - (t - k) \rightarrow \dots \rightarrow 2(t - k)}_{l} \rightarrow t - k \rightarrow t \rightarrow k
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\begin{aligned} 0 \\ \rightarrow \\ \rightarrow \\ \vdots \\ \rightarrow \\ \rightarrow \end{aligned}} \right\} \frac{t - k - 4}{2}$$

y

$$\begin{aligned}
 t + 1 &\rightarrow \underbrace{k + 1 \rightarrow k + 1 - (t - k) \rightarrow \dots \rightarrow t - k + 1 + i \rightarrow t - k - 1}_{l} \rightarrow \\
 &\rightarrow \underbrace{t - 1 \rightarrow t - 1 - (t - k) \rightarrow \dots \rightarrow 2(t - k) - 3}_{l+1} \rightarrow i - 1 \rightarrow \\
 &\vdots \\
 &\rightarrow k + 5 \rightarrow k + 5 - (t - k) \rightarrow \dots \rightarrow t - k + 3 \rightarrow 3 \rightarrow \\
 &\rightarrow k + 3 \rightarrow k + 3 - (t - k) \rightarrow \dots \rightarrow t - k + 1 \rightarrow 1 \rightarrow \\
 &\rightarrow k + 1
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\begin{aligned} t + 1 \\ \rightarrow \\ \rightarrow \\ \vdots \\ \rightarrow \\ \rightarrow \end{aligned}} \right\} \frac{t - k - 2}{2}$$

En la sucesión minimal son $\frac{t - k - 4}{2}$ terminos, ya que si tomamos el primer termino de cada sucesión tenemos

$$\underbrace{t-2}_{\frac{2}{2}=1}, \underbrace{t-4}_{\frac{4}{2}=2}, \dots, \underbrace{k+4}_{\frac{t-k-4}{2}} = t - (t-k-4)$$

En la sucesión maximal son $\frac{t-k-2}{2}$ terminos, ya que si tomamos el primer termino de cada sucesión tenemos

$$\underbrace{t-1}_{\frac{1+1}{2}=1}, \underbrace{t-3}_{\frac{3+1}{2}=2}, \dots, \underbrace{k+3}_{\frac{t-k-3+1}{2}} = t - (t-k-3)$$

Así obtenemos

$$a_{-}b = 01_l 0(1_{l+1} 0)_{\frac{t-k-4}{2}} 1_l 01$$

$$b_{+}a = 11_l 0(1_{l+1} 0)_{\frac{t-k-2}{2}}$$

$$\text{Donde } a = 01_l (01_{l+1})_{\frac{t-k-2}{2}}$$

Si $m = \frac{t-k-2}{2}$, entonces $a = (01_l)(01_{l+1})_m$ y

$$\begin{aligned} \text{Per}(a) &= l+1 + (l+2) \cdot m \\ &= l+1 + (l+2) \cdot \frac{t-k-2}{2} \\ &= (l+2) \cdot \frac{i}{2} + l+1 \\ &= (l+1) \cdot \frac{i}{2} + \frac{i}{2} + l+1 \\ &= (l+1) \cdot \left(\frac{i}{2} + 1\right) + \frac{i}{2} \\ &= (l+1) \cdot \frac{t-k-2+2}{2} + \frac{i}{2} \\ &= (l+1) \cdot \frac{t-k}{2} + \frac{i}{2} \\ &= (l+1) \cdot \frac{2(t_2-k_2)}{2} + \frac{i}{2} \\ &= (l+1) \cdot (t_2 - k_2) + \frac{i}{2} \\ &= t_2 \end{aligned}$$

$t_2 = (l+1) \cdot (t_2 - k_2) + \frac{i}{2}$, pues

$$\begin{aligned} t &= (l+1)(t-k) + i \\ \Rightarrow k_1 \cdot t_2 &= (l+1)k_1(t_2 - k_2) + i \\ \Rightarrow t_2 &= (l+1)(t_2 - k_2) + \frac{i}{k_1} \\ \Rightarrow t_2 &= (l+1)(t_2 - k_2) + \frac{i}{2} \end{aligned}$$

En este caso la sucesión a genera la sucesión $\underline{a_{-}b_{+}} \in A_{\infty}^{\infty}$ de período $2t_2 = t$

- Si $i = t - k - 1$, entonces $k_1 = 1$ cosa que no puede ser $k_1 = 1$ ya que

$$\begin{aligned}
t &= (l+1) \cdot (t-k) + t - k - 1 \\
&= (l+2) \cdot (t-k) - 1 \\
&= (l+2) \cdot k_1 \cdot (t_2 - k_2) - 1 \\
\Rightarrow k_1 \cdot t_2 &= (l+2) \cdot k_1 \cdot (t_2 - k_2) - 1 \\
\Rightarrow t_2 &= \frac{(l+2) \cdot k_1 \cdot (t_2 - k_2) - 1}{k_1} \\
\Rightarrow t_2 &= (l+2) \cdot (t_2 - k_2) - \frac{1}{k_1}
\end{aligned}$$

Como $t_2 \in \mathbb{N}$, entonces $k_1 = 1$ □

Theorem 3.1.10. Sea $t \in \mathbb{N}$ un número no primo y sea $a \in A_\infty^\infty$ talque $t = k \cdot \text{per}(a)$, $k \geq 2$, entonces a genera sucesiones $\alpha \in A_\infty^\infty$ talque $\text{Per}(\alpha) = t$.

Proof. Considere $\alpha_1 = \underline{a_- b_+ a^{t-\text{per}(a)}} = \underline{a_- b_+ a^{(k-2)\text{per}(a)}}$ y $\alpha_2 = \underline{a_- b^{(k-2)\text{per}(a)} b_+}$. Claro que $\alpha_1, \alpha_2 \in A_\infty^\infty$ y $\text{per}(\alpha_1) = \text{per}(\alpha_2) = t$. Notamos que si $t = 2\text{per}(a)$ entonces $\alpha_1 = \alpha_2 = \underline{a_- b_+}$ □

Ejemplo

Consideremos $t = 10 = 2 \cdot 5$

1. $a = \underline{01011}$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \underline{0101011011}$
2. $a = \underline{00101}$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \underline{0010010101}$
3. $a = \underline{01}$, $\alpha_1 = \underline{0011010101}$, $\alpha_2 = \underline{0010101011}$
4. $a = \underline{00001}$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \underline{0000010001}$
5. $a = \underline{01111}$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \underline{0111011111}$

3.1.3 Demostración del Teorema C

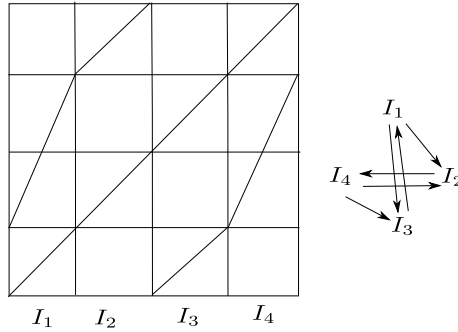
Ahora demostraremos el teorema 3.1.1 Si $a = \underline{a_1 a_2 \dots a_t} \in A_\infty^\infty$ entonces $h_{top}(a_{-}\underline{b}, b_{+}\underline{a}) = \frac{\log(2)}{t}$

Proof. Vamos a demostrar el teorema primero suponiendo que $Per(a) = t$ es un número primo

Partamos con $t = 2$

La única sucesión minimal en A_∞^∞ es $a = \underline{01}$, así $b(a) = \underline{10}$,

$a_{-}\underline{b} = 00\underline{10} = 00\underline{1} = 0\underline{\sigma(b)}$ y $b_{+}\underline{a} = 11\underline{01} = 11\underline{0} = 1\underline{\sigma(a)}$. El gráfico asociado es:



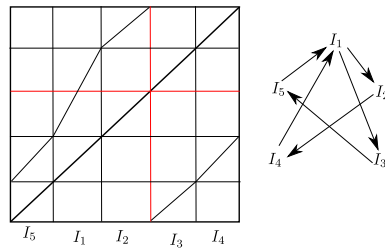
Así el polinomio característico es $p = x^4 - 2x^2 = x^2(x^2 - 2)$, y la mayor raíz real es $x = \sqrt{2}$

$$\text{Luego } h_{top}(00\underline{10}, 11\underline{01}) = \log(\sqrt{2}) = \frac{\log(2)}{2}$$

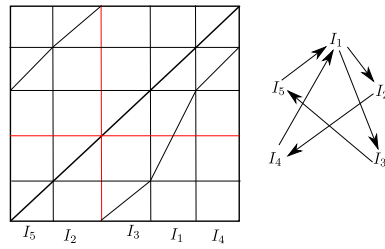
Supongamos ahora $t = 3$

Las dos sucesiones minimales de período 3 en A_∞^∞ son $a = \underline{001}$ y $a = \underline{011}$

Si $a = \underline{001}$, entonces $b = \underline{100}$, $a_{-}\underline{b} = 000\underline{100} = 000\underline{1} = 0\underline{\sigma(b)}$ y $b_{+}\underline{a} = 101\underline{001} = 101\underline{0} = 1\underline{\sigma(a)}$, así tenemos que el gráfico asociado es:



Si $a = \underline{011}$, entonces $b = \underline{110}$, $a_{-}b = 010\underline{110} = \underline{0101} = \underline{0\sigma(b)}$ y $b_{+}a = 1110\underline{11} = \underline{1110} = \underline{1\sigma(a)}$ así tenemos que el gráfico asociado es: :



Observemos que los grafos de ambas sucesiones son iguales. La roma es $R = \{I_1\}$

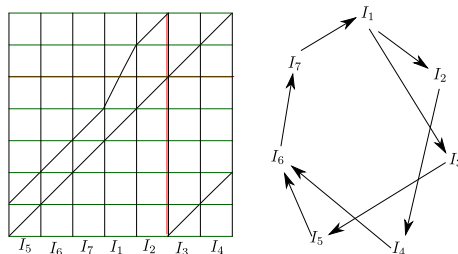
$$I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow I_4 \rightarrow I_1 \text{ y } I_1 \rightarrow I_3 \rightarrow I_5 \rightarrow I_1$$

Así $a_{1,1} = 2x^{-3}$ y el polinomio característico es $p(x) = (-1)^{5-1}x^5(2x^{-3} - 1) = -x^5 + 2x^2 = -x^2(x^3 - 2)$, y la mayor raíz real es $x = \sqrt[3]{2}$

Luego en ambos casos $h_{top}(a_{-}b, b_{+}a) = \log(\sqrt[3]{2}) = \frac{\log(2)}{3}$

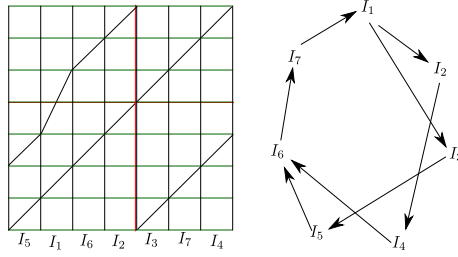
Si $t = 5$ tenemos 4 sucesiones en A_∞^∞ estas son $a = \underline{0_41}$, $a = \underline{00101}$, $a = \underline{01011}$, $a = \underline{01_4}$.

Si $a = \underline{0_41}$, entonces $b = \underline{10_4}$, $a_{-}b = 0_5\underline{10_4} = \underline{0\sigma(b)}$ y $b_{+}a = 10_3\underline{10_41} = \underline{1\sigma(a)}$ así tenemos que el gráfico asociado es:

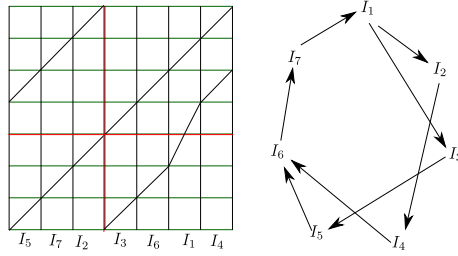


Si $a = \underline{00101}$, entonces $b = \underline{101001}$, $a_{-}b = 00100\underline{10100} = \underline{0\sigma(b)}$ y $b_{+}a = 10101\underline{00101} =$

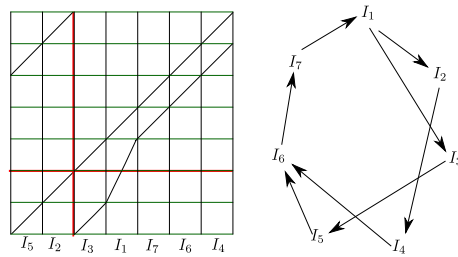
$\underline{1\sigma(a)}$ así tenemos que el gráfico asociado es:



Si $a = \underline{01011}$, entonces $b = \underline{11010}$, $a_{-}\underline{b} = 01010\underline{11010} = \underline{0\sigma(b)}$ y $b_{+}\underline{a} = 11011\underline{01011} = \underline{1\sigma(a)}$ Así tenemos que el gráfico asociado es:



Si $a = \underline{01}_4$, entonces $b = \underline{1}_40$, $a_{-}\underline{b} = 01110\underline{1}_40 = \underline{0\sigma(b)}$ y $b_{+}\underline{a} = 1_5\underline{1}_40 = \underline{1\sigma(a)}$ así tenemos que el gráfico asociado es:



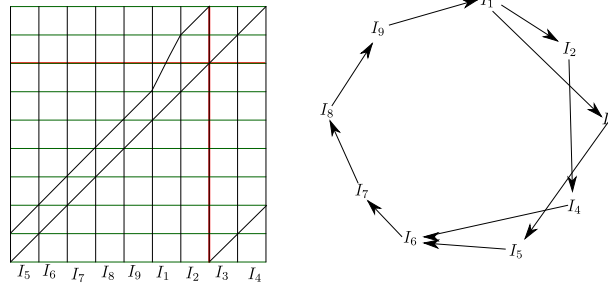
Observemos que en todos los casos el grafo es el mismo. La Roma es $R = \{I_1\}$ $I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow I_4 \rightarrow I_6 \rightarrow I_7 \rightarrow I_1$ y $I_1 \rightarrow I_3 \rightarrow I_5 \rightarrow I_6 \rightarrow I_7 \rightarrow I_1$

Así $a_{1,1} = 2x^{-5}$ y el polinomio característico es $p(x) = (-1)^{7-1}x^7(2x^{-5} - 1) = -x^7 + 2x^2 = -x^2(x^5 - 2)$, y la mayor raíz real es $x = \sqrt[5]{2}$

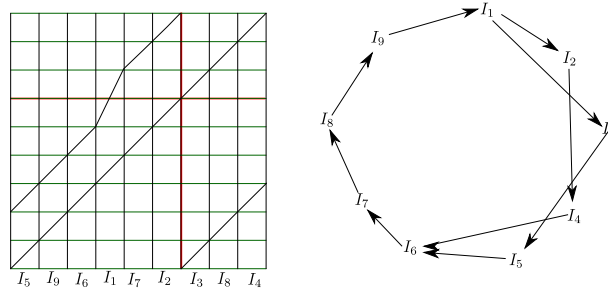
Luego $h_{top}(a_{-}\underline{b}, b_{+}\underline{a}) = \log(\sqrt[5]{2}) = \frac{\log(2)}{5}$

Si $t = 7$, tenemos 6 sucesiones minimales en A_∞ estas son $a = \underline{0_6 1}$, $a = \underline{0001001}$, $a = \underline{0010101}$, $a = \underline{0101011}$, $a = \underline{0110111}$, $a = \underline{01_6}$

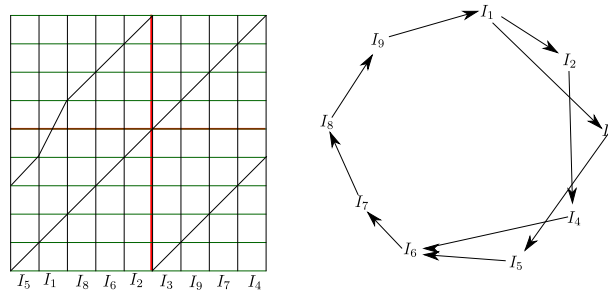
Si $a = \underline{0_6 1}$, entonces $b = \underline{10_6}$, $a_- b = 0_7 \underline{10_6} = 0 \underline{\sigma(b)}$ y $b_+ a = 10_5 \underline{10_6 1} = 1 \underline{\sigma(a)}$ Así tenemos que el gráfico asociado es:



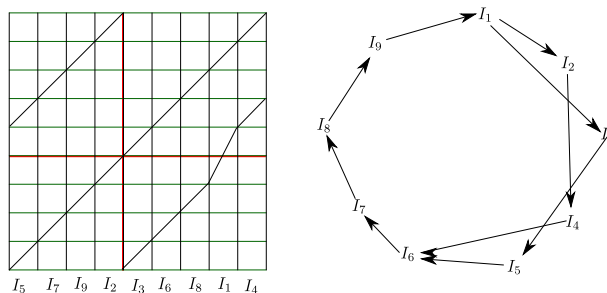
Si $a = \underline{0001001}$, entonces $b = \underline{1001000}$, $a_- b = 0001000 \underline{1001000} = 0 \underline{\sigma(b)}$ y $b_+ a = 1001001 \underline{0001001} = 1 \underline{\sigma(a)}$; así tenemos que el gráfico asociado es:



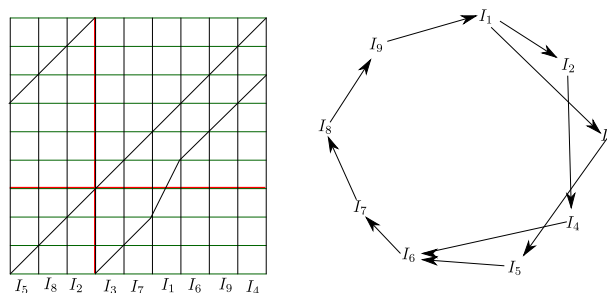
Si $a = \underline{0010101}$, entonces $b = \underline{1010100}$, $a_- b = 0010100 \underline{1010100} = 0 \underline{\sigma(b)}$ y $b_+ a = 1010101 \underline{0010101} = 1 \underline{\sigma(a)}$; así tenemos que el gráfico asociado es:



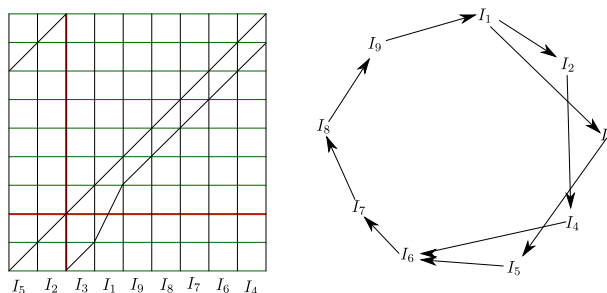
Si $a = \underline{0101011}$, entonces $b = \underline{1101010}$, $a \cdot b = 0101010\underline{1101010} = 0\underline{\sigma(b)}$ y $b + a = 1101011\underline{0101011} = 1\underline{\sigma(a)}$; así tenemos que el gráfico asociado es:



Si $a = \underline{0110111}$, entonces $b = \underline{1110110}$, $a \cdot b = 0110110\underline{1110110} = 0\underline{\sigma(b)}$ y $b + a = 1110111\underline{0110111} = 1\underline{\sigma(a)}$; así tenemos que el gráfico asociado es:



Si $a = \underline{01}_6$, entonces $b = \underline{1}_60$, $a \cdot b = 01_5\underline{01}_60 = 0\underline{\sigma(b)}$ y $b + a = 1_7\underline{01}_6 = 1\underline{\sigma(a)}$; así tenemos que el gráfico asociado es:



Observemos que en todos los casos los grafos son iguales. La Roma es $R = \{I_1\}$

$I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow I_4 \rightarrow I_6 \rightarrow I_7 \rightarrow I_8 \rightarrow I_9 \rightarrow I_1$ y

$$I_1 \rightarrow I_3 \rightarrow I_5 \rightarrow I_6 \rightarrow I_7 \rightarrow I_8 \rightarrow I_9 \rightarrow I_1$$

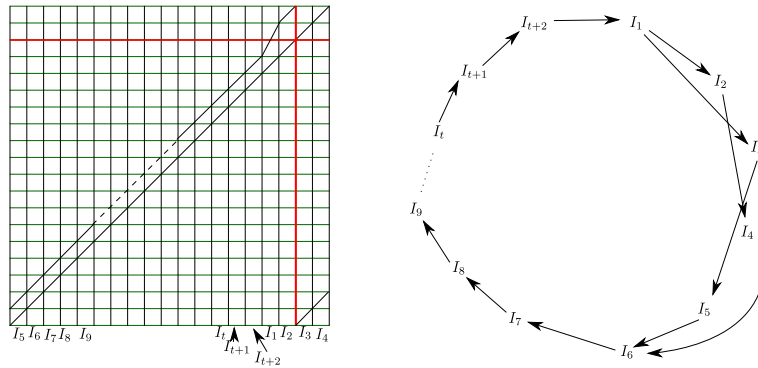
Así $a_{1,1} = 2x^{-7}$ y el polinomio característico es $p(x) = (-1)^{9-1}x^9(2x^{-7} - 1) = -x^9 + 2x^2 = -x^2(x^7 - 2)$, y la mayor raíz real es $x = \sqrt[7]{2}$

$$\text{Luego } h_{top}(a_{-b}, b_{+a}) = \log(\sqrt[7]{2}) = \frac{\log(2)}{7}$$

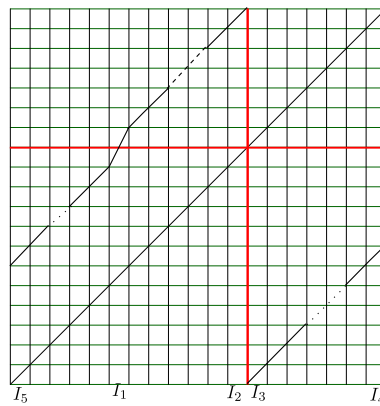
Supongamos que el resultado es válido para todo período primo $t < 2n - 1$. Por demostrar que el resultado es válido para el período primo $t=2n-1, \forall n \geq 6$.

Por el teorema 3.1.3 las sucesiones minimales en A_∞^∞ de período primo t las obtenemos con las permutaciones $p, p^2, p^3, \dots, p^{t-1}$

Con la permutación p obtenemos la sucesión $a = \underline{0_{t-1}1}$, entonces $b = \underline{10_{t-1}}$, $a_{-b} = \underline{0_t 10_{t-1}} = \underline{0\sigma(b)}$ y $b_{+a} = \underline{10_{t-2}10_{t-1}1} = \underline{1\sigma(a)}$ y tenemos el gráfico:



Ahora si consideramos la permutación p^k con $k < \frac{t+1}{2}$, entonces tenemos el siguiente gráfico asociado (por el teorema 3.1.3)



Por el gráfico el intervalo I_1 es el que va a dar a dos intervalos I_2 e I_3 .

$$I_1 \rightarrow I_2 = I_1 + k$$

$$I_1 \rightarrow I_3 = I_1 + k + 1$$

Observemos que I_2 es el intervalo que queda justo a la izquierda de la discontinuidad e I_3 es el intervalo que queda justo a la derecha. $I_2 \rightarrow I_4 = I_2 + k + 1$, I_4 es el último intervalo

$$I_3 \rightarrow I_5, I_5 \text{ es el primer intervalo}$$

$$I_4 \rightarrow I_6 \text{ e } I_5 \rightarrow I_6, I_6 = I_5 + k < I_2.$$

$$I_6 \rightarrow I_7$$

$$\text{Si } I_6 < I_1, \text{ entonces } I_7 = I_6 + k.$$

$$\text{Si } I_6 > I_1, \text{ entonces } I_7 = I_6 + k + 1$$

$$I_7 \rightarrow I_8$$

$$\text{Si } I_7 < I_1, \text{ entonces } I_8 = I_7 + k$$

$$\text{Si } I_1 < I_7 < I_2, \text{ entonces } I_8 = I_7 + k + 1$$

$$\text{Si } I_7 > I_3, \text{ entonces } I_8 = I_5 + k - (t + 2 - I_7)$$

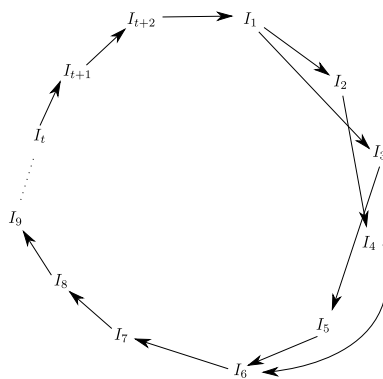
$$\text{Sucesivamente } I_h \rightarrow I_{h+1}, h \leq t + 1$$

$$\text{Si } I_h < I_1, \text{ entonces } I_{h+1} = I_h + k$$

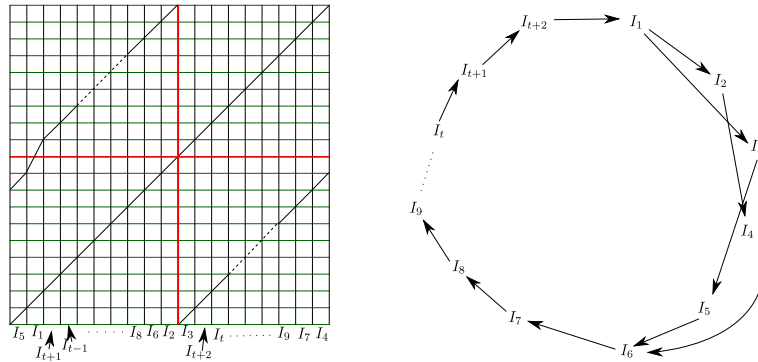
$$\text{Si } I_1 < I_h < I_2, \text{ entonces } I_{h+1} = I_h + k + 1$$

$$\text{Si } I_h > I_3, \text{ entonces } I_{h+1} = I_5 + k - (t + 2 - I_h)$$

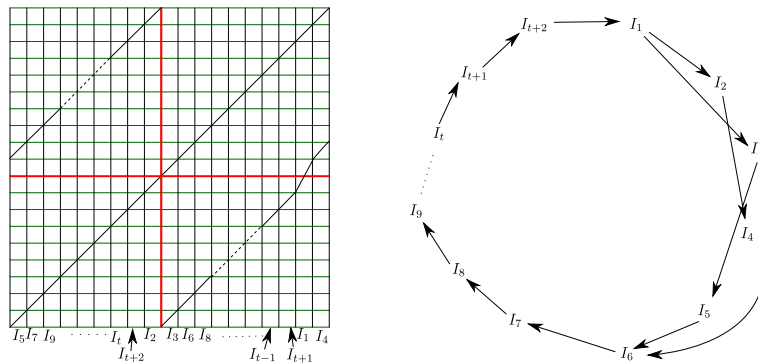
Obseemos que este procedimiento continua hasta $I_{t+1} \rightarrow I_{t+2}$ y ademas $I_{t+2} \rightarrow I_1$, ya que si esto no pasara en el gráfico habría una orbita periodica de período menor a t lo que no puede pasar. Así tenemos el siguiente grafo



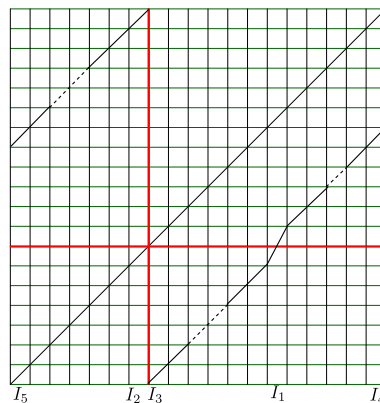
Consideramos ahora la permutación p^{n-1} , entonces tenemos el siguiente gráfico



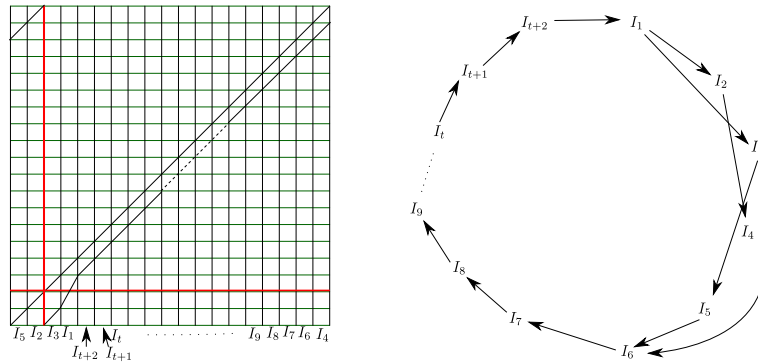
Con la permutación p^n , tenemos el siguiente gráfico:



Ahora si consideramos la permutación p^k con $k > \frac{t+1}{2}$, entonces tenemos el siguiente gráfico asociado (por el teorema 3.1.3)



Por último si consideramos el procedimiento p^{t-1} tenemos el siguiente gráfico:



Observemos que todos los grafos son iguales. La Roma es $R = \{I_1\}$

$$I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow I_4 \rightarrow I_6 \rightarrow I_7 \rightarrow I_8 \rightarrow \dots \rightarrow I_t \rightarrow I_{t+1} \rightarrow I_{t+2} \text{ y}$$

$$I_1 \rightarrow I_3 \rightarrow I_5 \rightarrow I_6 \rightarrow I_7 \rightarrow I_8 \rightarrow \dots \rightarrow I_t \rightarrow I_{t+1} \rightarrow I_{t+2}$$

Así $a_{1,1} = 2x^{-t}$ y el polinomio característico es $p = -x^{t+2} + 2x^2 = -x^2(x^t - 2)$, y la mayor raíz real es $x = \sqrt[t]{2}$

$$\text{Luego } h_{top}(a_{-\underline{b}}, b_{+\underline{a}}) = \log(\sqrt[t]{2}) = \frac{\log(2)}{t}$$

$$\text{Así si } a = \underline{a_1 a_2 \dots a_t} \in A_\infty^\infty \text{ es de período primo } t \text{ entonces } h_{top}(a_{-\underline{b}}, b_{+\underline{a}}) = \frac{\log(2)}{per(a)}$$

□

La demostración del teorema 3.1.1 para el caso de que $t = Per(a)$ no es primo se encuentra, en detalle, en el anexo 3.2

3.2 Anexo

Ahora demostraremos el teorema 3.1.1 Si $a = \underline{a_1 a_2 \dots a_t} \in A_\infty$ entonces $h_{top}(a_{-\underline{b}}, b_{+\underline{a}}) = \frac{\log(2)}{t}$, donde t es un número no primo

Proof. Supongamos que $Per(a) = t$ es un número no primo

Comenzemos con el **período** $t = 4$

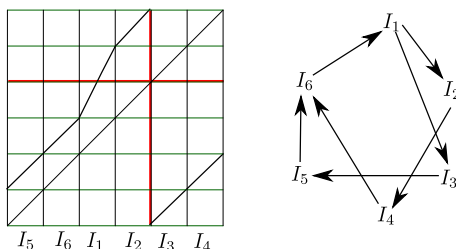
Las sucesiones minimales en A_∞ de período 4 son $a = \underline{0001}$, $a = \underline{0111}$ y $a = \underline{0011}$

Si $a = \underline{0001}$, entonces $b = \underline{1000}$

$$a_{-\underline{b}} = \underline{00001} = \underline{0\sigma(b)}$$

$$b_{+\underline{a}} = \underline{10010} = \underline{1\sigma(a)}$$

El gráfico asociado con su respectivo grafo es:



La Roma es $R = \{I_1\}$ y el polinomio característico es

$$p(x) = (-1)^{6-1} \cdot x^6 \cdot (2x^{-4} - 1) = -x^2 \cdot (2 - x^4), \text{ y la mayor raíz real es } x = \sqrt[4]{2}$$

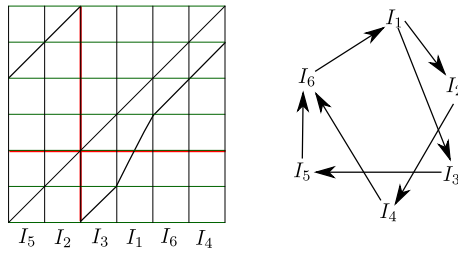
$$\text{Luego } h_{top}(a_{-\underline{b}}, b_{+\underline{a}}) = \frac{\log(2)}{4}$$

Si $a = \underline{0111}$, entonces $b = \underline{1110}$

$$a_{-\underline{b}} = \underline{01101} = \underline{0\sigma(b)}$$

$$b_{+\underline{a}} = \underline{11110} = \underline{1\sigma(a)}$$

El gráfico asociado con su respectivo grafo es:



Observemos que es el mismo grafo de la sucesión anterior y ocurre lo mismo que en el período primo así el polinomio característico es

$$p(x) = (-1)^{6-1} \cdot x^6 \cdot (2x^{-4} - 1) = -x^2 \cdot (2 - x^4), \text{ y la mayor raíz real es } x = \sqrt[4]{2}$$

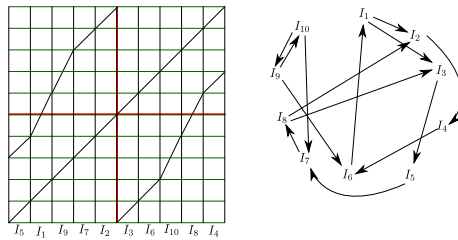
$$\text{Luego } h_{top}(a_{-}\underline{b}, b_{+}\underline{a}) = \frac{\log(2)}{4}$$

Si $\alpha = \underline{0011}$, entonces $\beta = \underline{1100}$

$$\alpha_{-}\underline{\beta} = 0010\underline{110}$$

$$\beta_{+}\underline{\alpha} = 110\underline{1001}$$

El gráfico asociado con su respectivo grafo es:



La Roma es $R = \{I_1, I_8, I_{10}\}$ y el polinomio característico es

$$p(x) = x^4 \cdot (2 - 2x^2 - x^4 + x^6) = x^4 \cdot (1 - x^2) \cdot (x^4 - 2), \text{ y la mayor raíz real es } x = \sqrt[4]{2}$$

$$\text{Luego } h_{top}(a_{-}\underline{b}, b_{+}\underline{a}) = \frac{\log(2)}{4}$$

Período $t = 6$

Las sucesiones de período $t = 6$ son $a = \underline{0_5}1$, $\alpha = \underline{000101}$ esta sucesión proviene de

$a = \underline{001}$, $\alpha = \underline{001101}$, $\alpha = \underline{001011}$ estas sucesiones provienen de $a = \underline{01}$, $\alpha = \underline{010111}$,

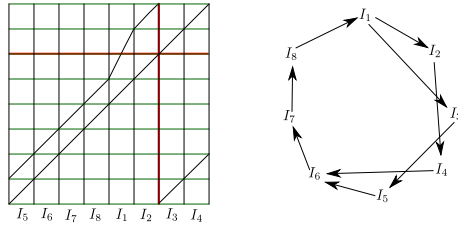
esta sucesión proviene de $a = \underline{011}$ y $a = \underline{01_5}$

Si $a = \underline{0_5}1$, entonces $b = \underline{10_5}$

$$a_{-}\underline{b} = 00\underline{0_5}1 = 0\underline{\sigma(b)}$$

$$b_{+}\underline{a} = 10\underline{4}10 = 1\underline{\sigma(a)}$$

El gráfico asociado con su respectivo grafo es:

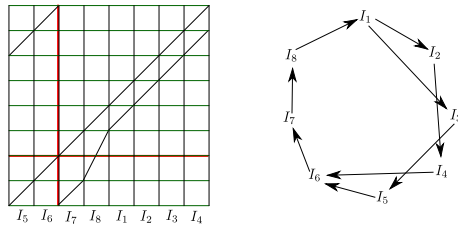


Si $a = \underline{01}_5$, entonces $b = \underline{1}_5 0$

$$a \underline{-} b = \underline{0111101} = \underline{0\sigma(b)}$$

$$b \underline{+} a = \underline{11}_5 0 = \underline{1\sigma(a)}$$

El gráfico asociado con su respectivo grafo es:



Observemos que ambas sucesiones generan el mismo grafo y ocurre lo mismo que en el período primo, la roma es $R = \{I_1\}$ y el polinomio característico es

$$p(x) = (-1)^{8-1} \cdot x^8 \cdot (2x^{-6} - 1) = -x^2 \cdot (2 - x^6), \text{ y la mayor raíz real es } x = \sqrt[6]{2}$$

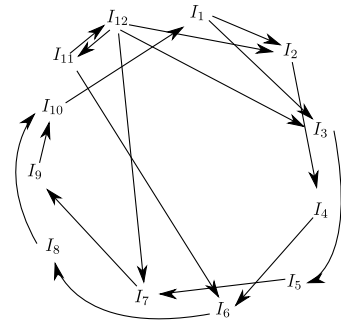
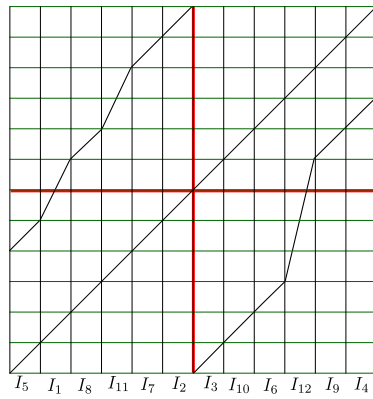
$$\text{Luego } h_{top}(a \underline{-} b, b \underline{+} a) = \frac{\log(2)}{6}$$

Si $\alpha = \underline{001101}$, entonces $\beta = \underline{110100}$

$$\alpha \underline{-} \beta = \underline{001100110}$$

$$\beta \underline{+} \alpha = \underline{110101001}$$

El gráfico asociado con su respectivo grafo es:



La roma es $R = \{I_1, I_{12}\}$, los caminos son:

$1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 8 \rightarrow 10 \rightarrow 1$, $1 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 9 \rightarrow 10 \rightarrow 1$

$12 \rightarrow 11 \rightarrow 12$, $12 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 8 \rightarrow 10 \rightarrow 1$, $12 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 9 \rightarrow 10 \rightarrow 1$,

$12 \rightarrow 7 \rightarrow 9 \rightarrow 10 \rightarrow 1$ y $12 \rightarrow 11 \rightarrow 6 \rightarrow 8 \rightarrow 10 \rightarrow 1$

Así $a_{1,1} = 2x^{-6}$, $a_{12,12} = x^{-2}$ y el polinomio característico es

$$p(x) = (-1)^{12-1} \cdot x^{12} \cdot \det \begin{pmatrix} 2x^{-6} - 1 & 0 \\ a_{12,1} & x^{-2} - 1 \end{pmatrix} = -x^{12} \cdot (2x^{-6} - 1) \cdot (x^{-2} - 1) =$$

$-x^4 \cdot (2 - x^6) \cdot (1 - x^2)$, y la mayor raíz real es $x = \sqrt[6]{2}$

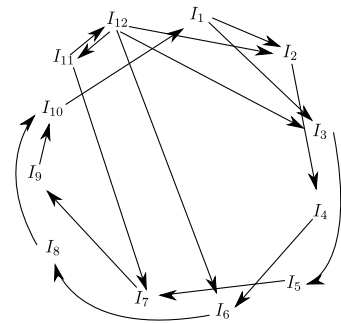
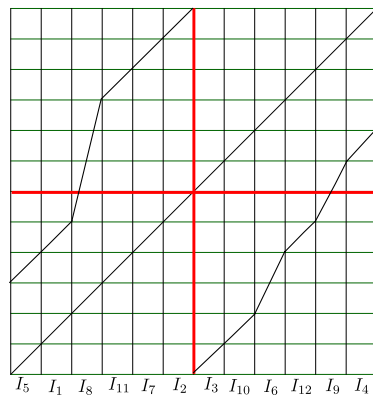
Luego $h_{top}(\alpha_{-}\underline{\beta}, \beta_{+}\underline{\alpha}) = \frac{\log(2)}{6}$

Si $\alpha = \underline{001011}$, entonces $\beta = \underline{110010}$

$\alpha_{-}\underline{\beta} = \underline{0010101110}$

$\beta_{+}\underline{\alpha} = \underline{110011001}$

El gráfico asociado con su respectivo grafo es:



La roma es $R = \{I_1, I_{12}\}$, los caminos son:

$1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 8 \rightarrow 10 \rightarrow 1$, $1 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 9 \rightarrow 10 \rightarrow 1$

$12 \rightarrow 11 \rightarrow 12$, $12 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 8 \rightarrow 10 \rightarrow 1$, $12 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 9 \rightarrow 10 \rightarrow 1$,

$12 \rightarrow 11 \rightarrow 7 \rightarrow 9 \rightarrow 10 \rightarrow 1$ y $12 \rightarrow 6 \rightarrow 8 \rightarrow 10 \rightarrow 1$

Así $a_{1,1} = 2x^{-6}$, $a_{12,12} = x^{-2}$ y el polinomio característico es

$$p(x) = (-1)^{12-1} \cdot x^{12} \cdot \det \begin{pmatrix} 2x^{-6} - 1 & 0 \\ a_{12,1} & x^{-2} - 1 \end{pmatrix} = -x^{12} \cdot (2x^{-6} - 1) \cdot (x^{-2} - 1) = -x^4 \cdot (2 - x^6) \cdot (1 - x^2),$$

y la mayor raíz real es $x = \sqrt[6]{2}$

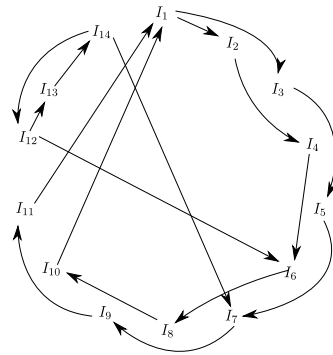
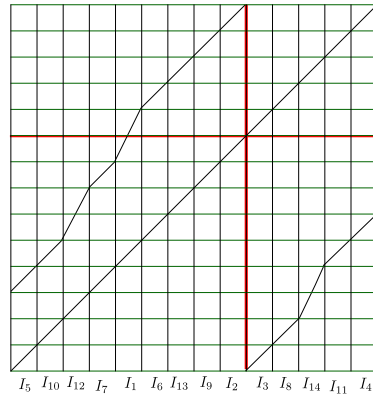
Luego $h_{top}(\alpha_{-\underline{\beta}}, \beta_{+\underline{\alpha}}) = \frac{\log(2)}{6}$

Si $\alpha = \underline{000101}$, entonces $\beta = \underline{101000}$

$\alpha_{-\underline{\beta}} = 0001\underline{001010}$

$\beta_{+\underline{\alpha}} = 10100\underline{10001}$

El gráfico asociado con su respectivo grafo es:



La roma es $R = \{I_1, I_{14}\}$, los caminos son:

$1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 8 \rightarrow 10 \rightarrow 1$, $1 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 9 \rightarrow 11 \rightarrow 1$

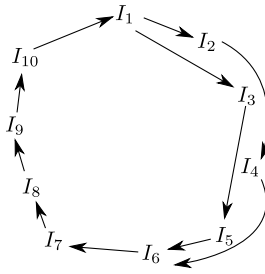
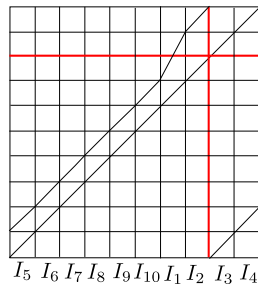
$14 \rightarrow 12 \rightarrow 13 \rightarrow 14$, $14 \rightarrow 12 \rightarrow 6 \rightarrow 8 \rightarrow 10 \rightarrow 1$, $14 \rightarrow 7 \rightarrow 9 \rightarrow 11 \rightarrow 1$

Así $a_{1,1} = 2x^{-6}$, $a_{14,14} = x^{-3}$ y el polinomio característico es

$$p(x) = (-1)^{14-1} \cdot x^{14} \cdot \det \begin{pmatrix} 2x^{-6} - 1 & 0 \\ a_{14,1} & x^{-3} - 1 \end{pmatrix} = -x^{14} \cdot (2x^{-6} - 1) \cdot (x^{-3} - 1) = -x^5 \cdot (2 - x^6) \cdot (1 - x^3),$$

y la mayor raíz real es $x = \sqrt[6]{2}$

Luego $h_{top}(\alpha_{-\underline{\beta}}, \beta_{+\underline{\alpha}}) = \frac{\log(2)}{6}$

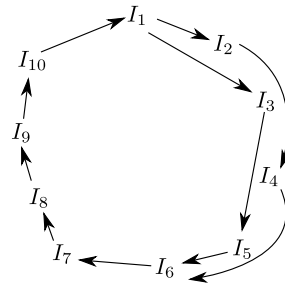
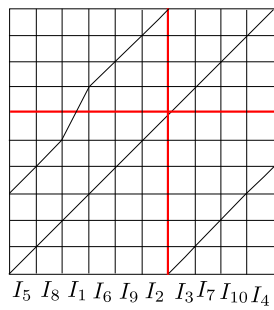


Si $a = \underline{00100101}$, entonces $b = \underline{10100100}$

$$a \underline{-} b = \underline{001001001} = \underline{0\sigma(b)}$$

$$b \underline{+} a = \underline{101001010} = \underline{1\sigma(a)}$$

El gráfico asociado con su respectivo grafo es:

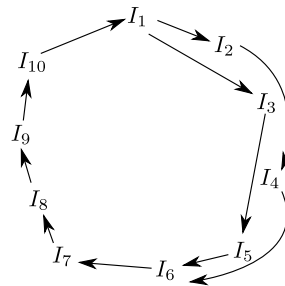
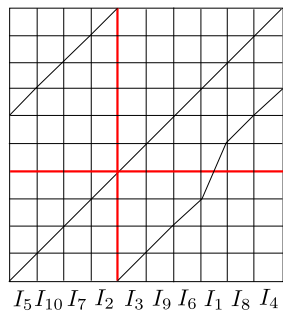


Si $a = \underline{01011011}$, entonces $b = \underline{11011010}$

$$a \underline{-} b = \underline{010110101} = \underline{0\sigma(b)}$$

$$b \underline{+} a = \underline{110110110} = \underline{1\sigma(a)}$$

El gráfico asociado con su respectivo grafo es:

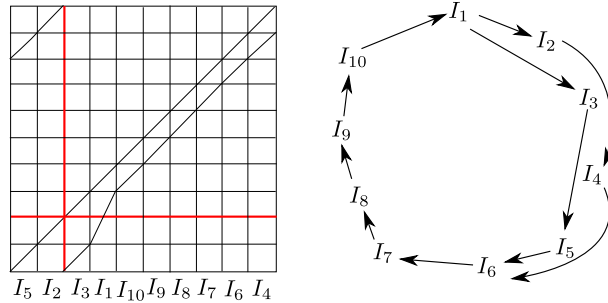


Si $a = \underline{01}_7$, entonces $b = \underline{1}_70$

$$a_{-b} = 0\underline{1}_6\underline{01} = 0\underline{\sigma(b)}$$

$$b_{+a} = 1\underline{1}_7\underline{0} = 1\underline{\sigma(a)}$$

El gráfico asociado con su respectivo grafo es:



Observemos que los grafos de todas las sucesiones anteriores son los mismos y ocurre lo mismo que en el período primo, la roma es $R = \{I_1\}$ y el polinomio característico es

$$p(x) = (-1)^{10-1} \cdot x^{10} \cdot (2x^{-8} - 1) = -x^2 \cdot (2 - x^8), \text{ y la mayor raíz real es } x = \sqrt[8]{2}$$

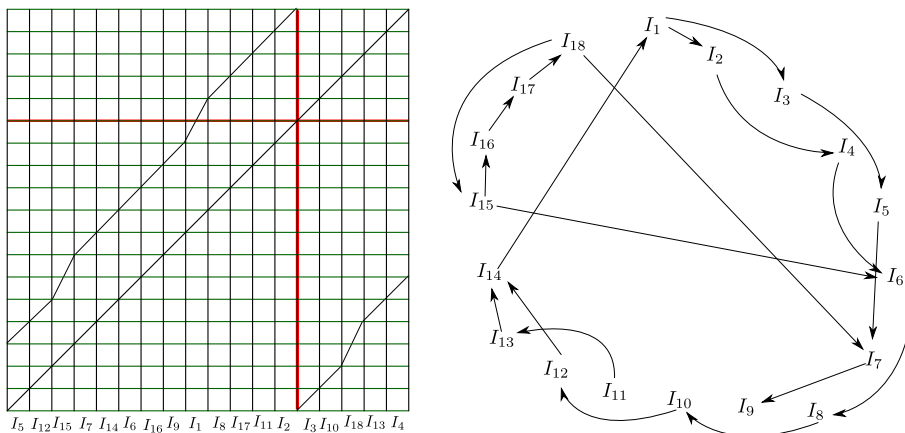
$$\text{Luego } h_{top}(a_{-b}, b_{+a}) = \frac{\log(2)}{8}$$

p^2 genera a la sucesión $a = \underline{0001}$ que a su vez genera a la sucesión $\alpha = \underline{00001001}$ de período 8 así $\beta = b(\alpha) = \underline{10010000}$

$$\alpha_{-\beta} = 00001\underline{00010010}$$

$$\beta_{+\alpha} = 1001\underline{000100001}$$

El gráfico asociado con su respectivo grafo es:



Del grafo tenemos que la Roma es $R = \{I_1, I_{18}\}$, $a_{1,1} = 2x^{-8}$, $a_{18,18} = x^{-4}$ y el polinomio

característico es

$$p(x) = (-1)^{18-1} \cdot x^{18} \cdot \det \begin{pmatrix} 2x^{-8} - 1 & 0 \\ a_{18,1} & x^{-4} - 1 \end{pmatrix} = -x^6 \cdot (2 - x^8) \cdot (1 - x^4),$$

y la mayor raíz real es $x = \sqrt[8]{2}$

$$\text{Luego } h_{top}(\alpha_{-\underline{\beta}}, \beta_{+\underline{\alpha}}) = \frac{\log(2)}{8}$$

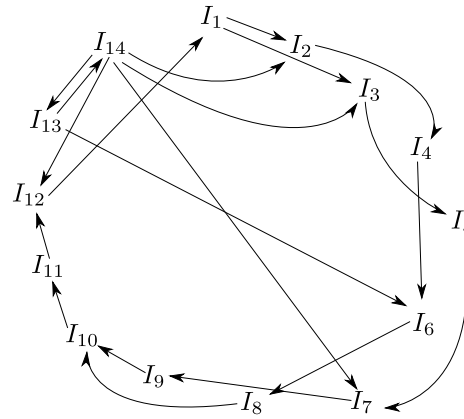
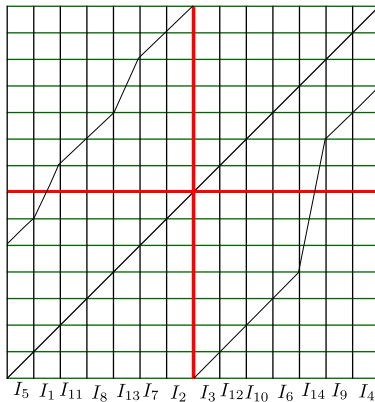
p^4 genera a la sucesión $a = \underline{01}$ que a su vez genera a la sucesiones $\alpha = \underline{00110101}$, $\alpha = \underline{00101011}$, $\alpha = \underline{00101101}$ de período 8

Si $\alpha = \underline{00110101}$, entonces $\beta = b(\alpha) = \underline{11010100}$

$$\alpha_{-\underline{\beta}} = \underline{00110100110}$$

$$\beta_{+\underline{\alpha}} = \underline{11010101001}$$

El gráfico asociado con su respectivo grafo es:



Del grafo tenemos que la Roma es $R = \{I_1, I_{14}\}$, $a_{1,1} = 2x^{-8}$, $a_{14,14} = x^{-2}$ y el polinomio característico es

$$p(x) = (-1)^{14-1} \cdot x^{14} \cdot \det \begin{pmatrix} 2x^{-8} - 1 & 0 \\ a_{14,1} & x^{-2} - 1 \end{pmatrix} = -x^4 \cdot (2 - x^8) \cdot (1 - x^2),$$

y la mayor raíz real es $x = \sqrt[8]{2}$

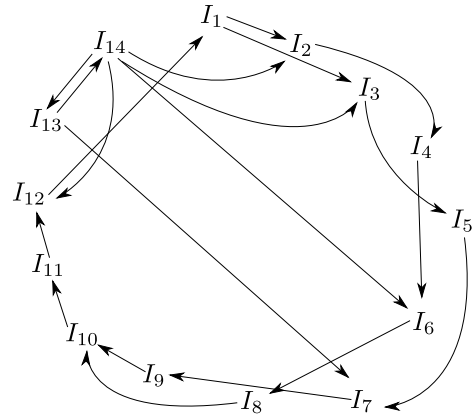
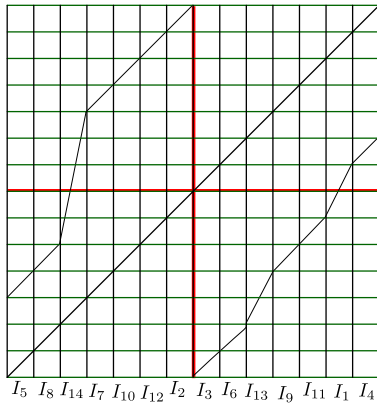
$$\text{Luego } h_{top}(\alpha_{-\underline{\beta}}, \beta_{+\underline{\alpha}}) = \frac{\log(2)}{8}$$

Si $\alpha = \underline{00101011}$, entonces $\beta = b(\alpha) = \underline{11001010}$

$$\alpha_{-\underline{\beta}} = \underline{00101010110}$$

$$\beta_{+\underline{\alpha}} = \underline{11001011001}$$

El gráfico asociado con su respectivo grafo es:



Del grafo tenemos que la Roma es $R = \{I_1, I_{14}\}$, $a_{1,1} = 2x^{-8}$, $a_{14,14} = x^{-2}$ y el polinomio característico es

$$p(x) = (-1)^{14-1} \cdot x^{14} \cdot \det \begin{pmatrix} 2x^{-8} - 1 & 0 \\ a_{14,1} & x^{-2} - 1 \end{pmatrix} = -x^4 \cdot (2 - x^8) \cdot (1 - x^2),$$

y la mayor raíz real es $x = \sqrt[8]{2}$

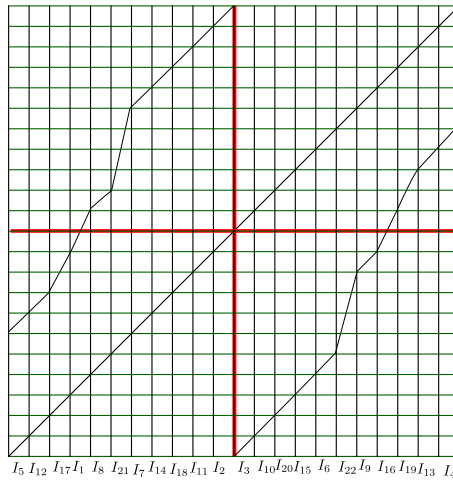
Luego $h_{top}(\underline{\alpha}_-, \underline{\beta}_+, \underline{\alpha}) = \frac{\log(2)}{8}$

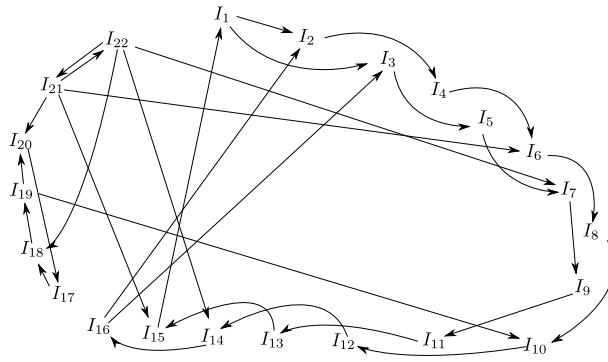
Si $\alpha = \underline{001011101}$, entonces $\beta = b(\alpha) = \underline{11010010}$

$$\alpha_- \underline{\beta} = \underline{0010111001101001}$$

$$\beta_+ \underline{\alpha} = \underline{1101001100101110}$$

El gráfico asociado con su respectivo grafo es:





Del grafo tenemos que la Roma es $R = \{I_2, I_3, I_{17}, I_{22}\}$, $a_{2,2} = x^{-8}$, $a_{2,3} = x^{-8}$, $a_{3,2} = x^{-8}$, $a_{3,3} = x^{-8}$, $a_{17,2} = x^{-7} + x^{-5} = a_{17,3}$, $a_{17,22} = 0$, $a_{22,2} = 2x^{-7} + x^{-3} + x^{-8} + x^{-4} = a_{22,3}$, $a_{22,17} = x^{-4}$, $a_{22,22} = x^{-2}$ y el polinomio característico es

$$p(x) = (-1)^{14-1} \cdot x^{14} \cdot \det \begin{pmatrix} x^{-8} - 1 & x^{-8} & 0 & 0 \\ x^{-8} & x^{-8} - 1 & 0 & 0 \\ a_{17,2} & a_{17,3} & x^{-4} - 1 & 0 \\ a_{22,2} & a_{22,3} & a_{22,17} & x^{-2} - 1 \end{pmatrix} =$$

$$= -x^8 \cdot (-1 + x^4) \cdot (-2 + x^8) \cdot (-1 + x^2), \text{ y la mayor raíz real es } x = \sqrt[8]{2}$$

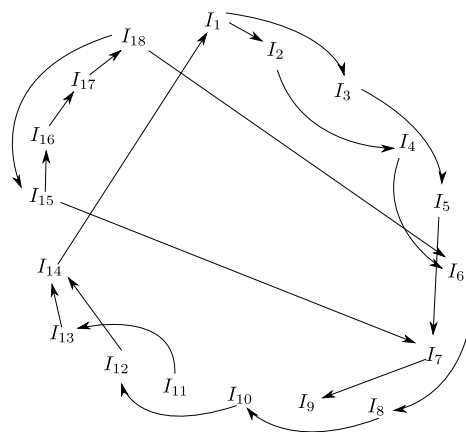
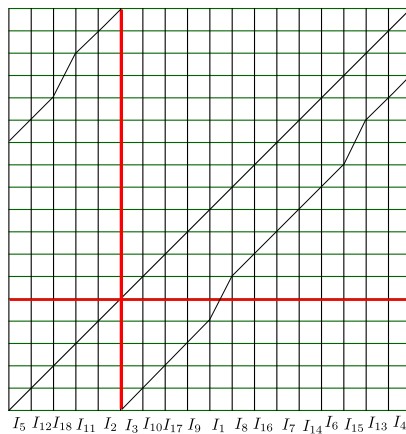
$$\text{Luego } h_{top}(\underline{\alpha_- \beta}, \underline{\beta_+ \alpha}) = \frac{\log(2)}{8}$$

p^6 genera a la sucesión $a = \underline{0111}$ que a su vez genera a la sucesión $\alpha = \underline{01101111}$ de período 8 así $\beta = b(\alpha) = \underline{11110110}$

$$\underline{\alpha_- \beta} = 01101\underline{11011110}$$

$$\underline{\beta_+ \alpha} = 11110\underline{11101101}$$

El gráfico asociado con su respectivo grafo es:



Del grafo tenemos que la Roma es $R = \{I_1, I_{18}\}$, $a_{1,1} = 2x^{-8}$, $a_{18,18} = x^{-4}$ y el polinomio característico es

$$p(x) = (-1)^{18-1} \cdot x^{18} \cdot \det \begin{pmatrix} 2x^{-8} - 1 & 0 \\ a_{18,1} & x^{-4} - 1 \end{pmatrix} = -x^6 \cdot (2 - x^8) \cdot (1 - x^4), \text{ y la mayor}$$

raíz real es $x = \sqrt[8]{2}$

$$\text{Luego } h_{top}(\alpha_{-\underline{\beta}}, \beta_{+\underline{\alpha}}) = \frac{\log(2)}{8}$$

Supongamos que el resultado es válido para todas las sucesiones de período no primo menor a t en A_∞^∞ y demostremoslo para el **período no primo** t

El teorema 3.1.8 nos ayuda a obtener las sucesiones de período no primo t en A_∞^∞ de la siguiente manera

- Si k es primo relativo con t entonces p^k genera una sucesión $a \in A_\infty^\infty$ de período t talque $h_{top}(a_{-\underline{b}}, b_{+\underline{a}}) = \frac{\log(2)}{Per(a)}$

Proof. La demostración es análoga al caso primo □

- Si k es divisor de t entonces p^k genera $a = \underline{0_n 1}$, donde $n = \frac{t-k}{k}$; ésta sucesión a genera las sucesiones $\alpha = \underline{a_{-} b_{+} a^{k-2}}$ y $\alpha = \underline{a_{-} b^{k-2} b_{+}}$ de período t perteneciente a A_∞^∞ , entonces $h_{top}(\alpha_{-\underline{\beta}}, \beta_{+\underline{\alpha}}) = \frac{\log(2)}{t}$, donde $\beta = b(\alpha)$

Proof. Supondremos primero que $k = 2$, así $\alpha = \underline{a_{-} b_{+}}$

Si $n = 1$, $a = \underline{01}$ y $\alpha = \underline{a_{-} b_{+}} = \underline{0011}$ y éste caso está hecho en el período $t = 4$

Si $n = 2$, $a = \underline{001}$ y $\alpha = \underline{a_{-} b_{+}} = \underline{000101}$ y éste caso está hecho en el período $t = 6$

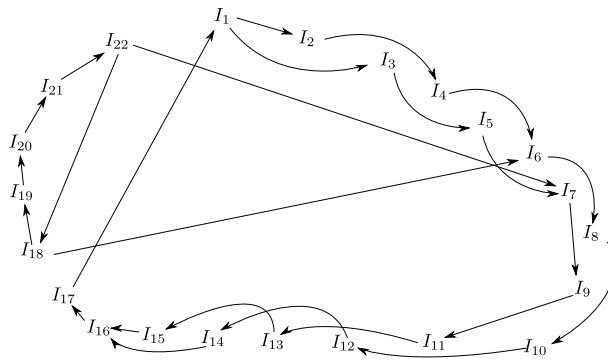
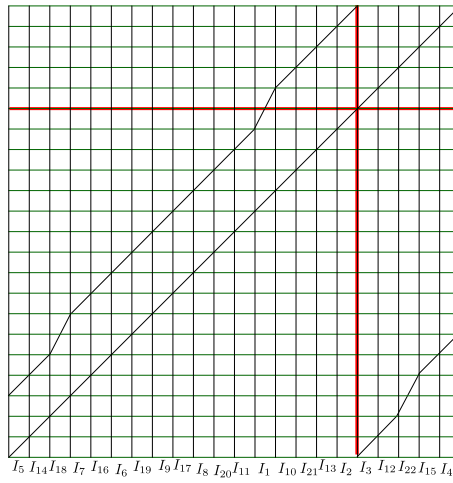
Si $n = 3$ $a = \underline{0001}$ y $\alpha = \underline{a_{-} b_{+}}$ y éste caso está hecho en el período $t = 8$

Si $n = 4$, $a = \underline{041}$ y $\alpha = \underline{a_{-} b_{+}} = \underline{051031}$, $Per(\alpha) = 10$

$$\alpha_{-\underline{\beta}} = \underline{0510410310}$$

$$\beta_{+\underline{\alpha}} = \underline{10310031051}$$

El gráfico asociado con su respectivo grafo es:



Del grafo tenemos que la Roma es $R = \{I_1, I_{22}\}$, $a_{1,1} = 2x^{-10}$, $a_{22,22} = x^{-5}$ y el polinomio característico es

$$p(x) = (-1)^{22-1} \cdot x^{22} \cdot \det \begin{pmatrix} 2x^{-10} - 1 & 0 \\ a_{22,1} & x^{-5} - 1 \end{pmatrix} = -x^7 \cdot (2 - x^{10}) \cdot (1 - x^5),$$

y la mayor raíz real es $x = \sqrt[10]{2}$

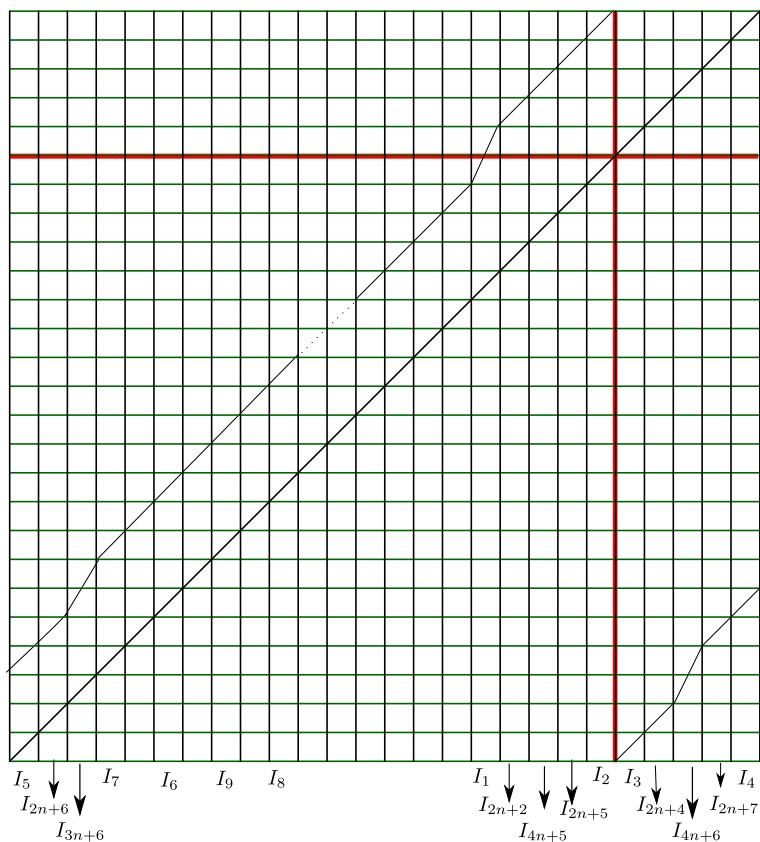
$$\text{Luego } h_{top}(\underline{\alpha}, \underline{\beta}) = \frac{\log(2)}{Per(\alpha)}$$

Si $a = \underline{0_n 1}$, entonces $\alpha = \underline{a_- b_+} = \underline{0_{n+1} 10_{n-1} 1}$, $Per(\alpha) = 2n + 2 = t$

$$\underline{\alpha_- \beta} = \underline{0_{n+1} 10_n 10_{n-1} 10}$$

$$\underline{\beta_+ \alpha} = \underline{10_{n-1} 100_{n-1} 10_{n+1} 1}$$

El gráfico asociado es:



I_1 es el intervalo del lado izquierdo de la discontinuidad, más cercano a la discontinuidad que va a dos intervalos $I_1 \rightarrow I_2$ e $I_1 \rightarrow I_3$

I_2 es el intervalo anterior a la discontinuidad, $I_2 \rightarrow I_4$

I_3 es el intervalo posterior a la discontinuidad $I_3 \rightarrow I_5$

I_4 es el último intervalo, $I_4 \rightarrow I_6$

I_5 es el primer intervalo $I_5 \rightarrow I_7$

$I_6 = I_5 + 5$, $I_6 \rightarrow I_8$, $I_8 = I_6 + 4$, $I_8 \rightarrow I_{10}$, $I_{10} = I_8 + 4$

$I_7 = I_5 + 3$, $I_7 \rightarrow I_9$, $I_9 = I_7 + 4$, $I_9 \rightarrow I_{11}$, $I_{11} = I_9 + 4$

Sucesivamente $I_{2n} \rightarrow I_{2n+2} = I_{2n} + 4$, $I_{2n+2} \rightarrow I_{2n+4} = I_3 + 1$, $I_{2n+4} \rightarrow I_{2n+6} = I_5 + 1$

$I_{2n+1} \rightarrow I_{2n+3} = I_{2n+1} + 4$, $I_{2n+3} \rightarrow I_{2n+5} = I_{2n+3} + 4$, $I_{2n+5} \rightarrow I_{2n+7} = I_3 + 3$

$I_{2n+6} \rightarrow I_{2n+8} = I_5 + 4$ y $I_{2n+7} \rightarrow I_{2n+8}$

$I_{2n+8} \rightarrow I_{2n+9} = I_{2n+8} + 4$, \dots $I_{3n+4} \rightarrow I_{3n+5} = I_{3n+4} + 4$, $I_{3n+5} \rightarrow I_1$

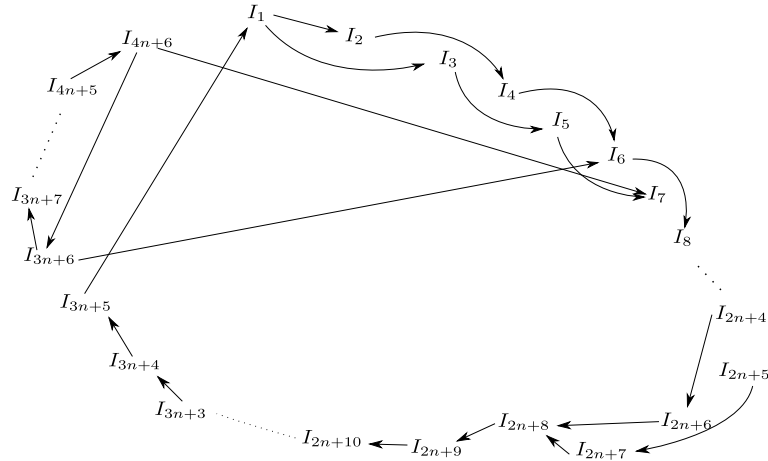
I_{3n+6} es el otro intervalo al lado izquierdo de la discontinuidad que va a dar a dos intervalos

$$I_{3n+6} \rightarrow I_6 \text{ e } I_{3n+6} \rightarrow I_{3n+7} = I_{3n+6} + 4$$

$$I_{3n+7} \rightarrow I_{3n+8} = I_{3n+7} + 4, \dots I_{4n+4} \rightarrow I_{4n+5} = I_{4n+4} + 4, I_{4n+5} \rightarrow I_{4n+6} = I_3 + 2,$$

$$I_{4n+6} \rightarrow I_7 \text{ e } I_{4n+6} \rightarrow I_{3n+6}$$

Así tenemos el siguiente grafo



Del grafo tenemos que la Roma es $R = \{I_1, I_{4n+6}\}$, $a_{1,1} = 2x^{-(2n+2)}$, $a_{4n+6,4n+6} = x^{-n}$ y el polinomio característico es

$$p(x) = (-1)^{4n+6-1} \cdot x^{4n+6} \cdot \det \begin{pmatrix} 2x^{-(2n+2)} - 1 & 0 \\ a_{4n+6,4n+6} & x^{-n} - 1 \end{pmatrix} = -x^{n+4} \cdot (2 - x^{2n+2}) \cdot (1 - x^n),$$

y la mayor raíz real es $x = \sqrt[2n+2]{2}$

$$\text{Luego } h_{top}(\alpha_{-\underline{\beta}}, \beta_{+\underline{\alpha}}) = \frac{\log(2)}{Per(\alpha)}$$

• Si $k \neq 2$ y $n = 1$ tenemos que $a = \underline{01}$

Si $\alpha = \underline{a_{-}b_{+}a} = \underline{0011101}$, $Per(\alpha) = 6$ (Hecho en el período $t = 6$)

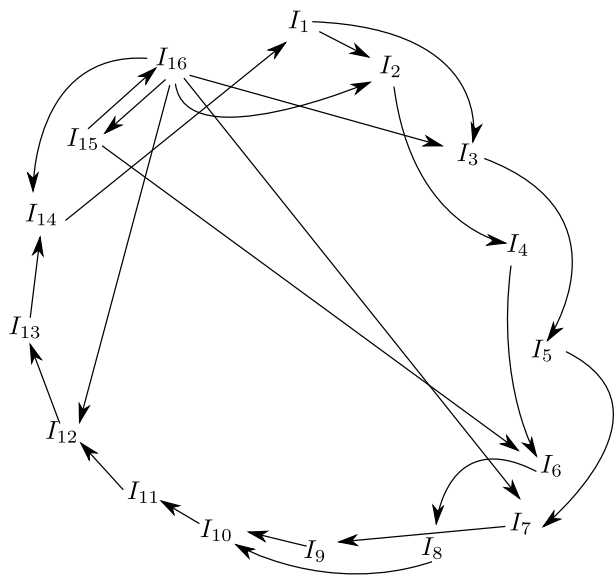
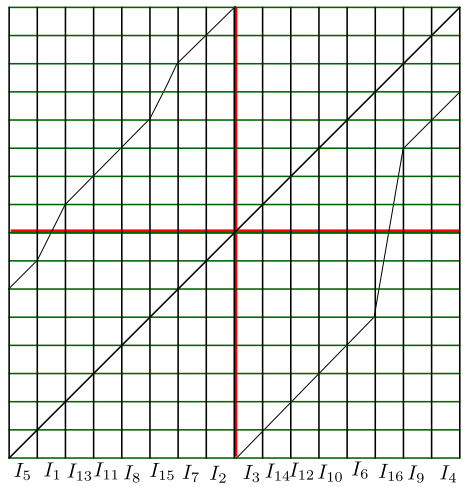
Si $\alpha = \underline{a_{-}b_{+}a^2} = \underline{001110101}$, $Per(\alpha) = 8$ (Hecho en el período $t = 8$)

Si $\alpha = \underline{a_{-}b_{+}a^3} = \underline{00111010101}$, $Per(\alpha) = 10$

$$\alpha_{-\underline{\beta}} = 001\underline{1010100110}$$

$$\beta_{+\underline{\alpha}} = 110\underline{1010101001}$$

El gráfico asociado con su respectivo grafo es:



Del grafo tenemos que la Roma es $R = \{I_1, I_{16}\}$, $a_{1,1} = 2x^{-10}$, $a_{16,16} = x^{-2}$ y el polinomio característico es

$$p(x) = (-1)^{16-1} \cdot x^{16} \cdot \det \begin{pmatrix} 2x^{-10} - 1 & 0 \\ a_{16,1} & x^{-2} - 1 \end{pmatrix} = -x^4 \cdot (2 - x^{10}) \cdot (1 - x^2),$$

y la mayor raíz real es $x = \sqrt[10]{2}$

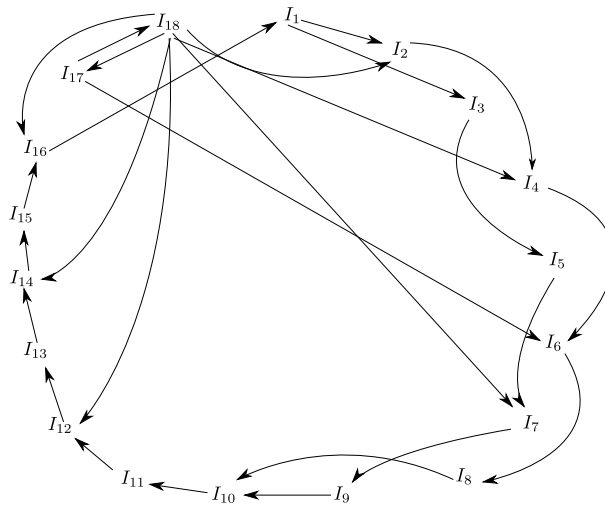
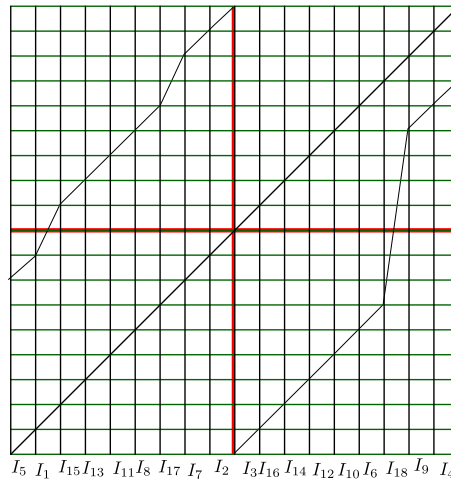
$$\text{Luego } h_{top}(\underline{\alpha_- \beta}, \underline{\beta_+ \alpha}) = \frac{\log(2)}{Per(\alpha)}$$

Si $\alpha = \underline{a_- b_+ a^4} = \underline{0011(01)_4}$, $Per(\alpha) = 12$

$$\underline{\alpha_- \beta} = \underline{0011(01)_3 00110}$$

$$\underline{\beta_+ \alpha} = \underline{1101(01)_4 001}$$

El gráfico asociado con su respectivo grafo es:



Del grafo tenemos que la Roma es $R = \{I_1, I_{18}\}$, $a_{1,1} = 2x^{-12}$, $a_{18,18} = x^{-2}$ y el polinomio característico es

$$p(x) = (-1)^{18-1} \cdot x^{18} \cdot \det \begin{pmatrix} 2x^{-12} - 1 & 0 \\ a_{18,1} & x^{-2} - 1 \end{pmatrix} = -x^4 \cdot (2 - x^{12}) \cdot (1 - x^2),$$

y la mayor raíz real es $x = \sqrt[12]{2}$

$$\text{Luego } h_{top}(\underline{\alpha}_-, \underline{\beta}_+) = \frac{\log(2)}{Per(\alpha)}$$

Si $\alpha = \underline{a_- b_+ a^i} = 0011(01)_i$, $Per(\alpha) = 2i + 4 = t$, $i \geq 1$

$$\underline{\alpha_- \beta} = 0011(01)_{i-1}00110$$

$$\underline{\beta_+ \alpha} = 1101(01)_i001$$

El gráfico asociado es:

$$p(x) = (-1)^{2i+10-1} \cdot x^{2i+10} \cdot \det \begin{pmatrix} 2x^{-(2i+4)} - 1 & 0 \\ a_{2i+10,1} & x^{-2} - 1 \end{pmatrix} = -x^4 \cdot (2 - x^{2i+4}) \cdot (1 - x^2),$$

y la mayor raíz real es $x = \sqrt[2i+4]{2}$

$$\text{Luego } h_{top}(\alpha_{-}\underline{\beta}, \beta_{+}\underline{\alpha}) = \frac{\log(2)}{Per(\alpha)}$$

Ahora si $\alpha = \underline{a}b\underline{b}_{+} = \underline{001011}$, entonces $Per(\alpha) = 6$ (hecho en el período $t = 6$)

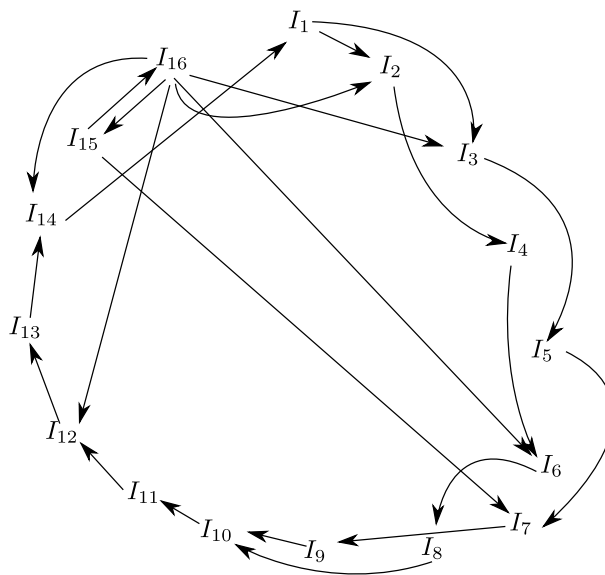
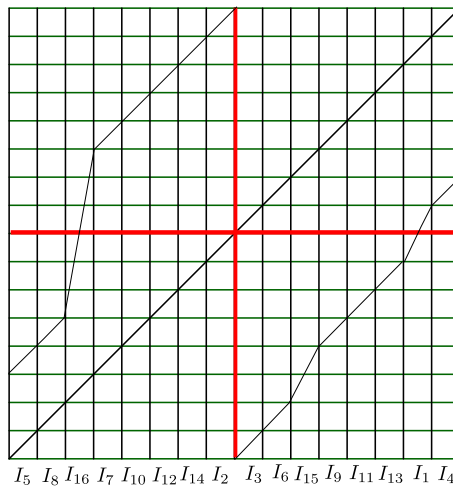
Si $\alpha = \underline{a}b^2\underline{b}_{+} = \underline{00101011}$, entonces $Per(\alpha) = 8$ (hecho en el período $t = 8$)

Si $\alpha = \underline{a}b^3\underline{b}_{+} = \underline{0010101011}$, entonces $Per(\alpha) = 10$

$$\alpha_{-}\underline{\beta} = 001\underline{0101010110}$$

$$\beta_{+}\underline{\alpha} = 1100\underline{101011001}$$

El gráfico asociado con su respectivo grafo es:



Del grafo tenemos que la Roma es $R = \{I_1, I_{16}\}$, $a_{1,1} = 2x^{-10}$, $a_{16,16} = x^{-2}$ y el polinomio característico es

$$p(x) = (-1)^{16-1} \cdot x^{16} \cdot \det \begin{pmatrix} 2x^{-10} - 1 & 0 \\ a_{16,1} & x^{-2} - 1 \end{pmatrix} = -x^4 \cdot (2 - x^{10}) \cdot (1 - x^2),$$

y la mayor raíz real es $x = \sqrt[10]{2}$

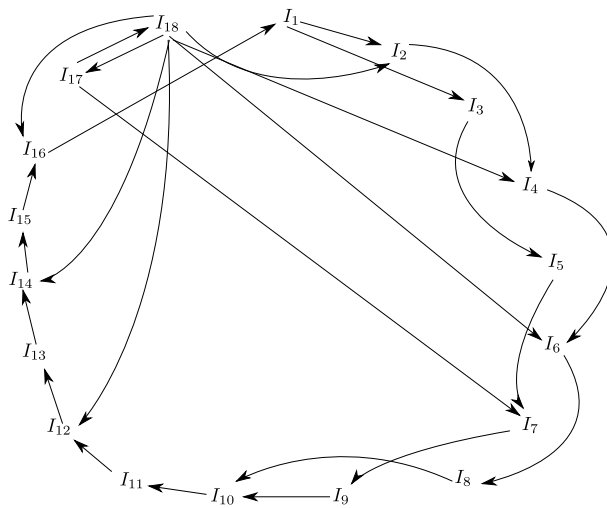
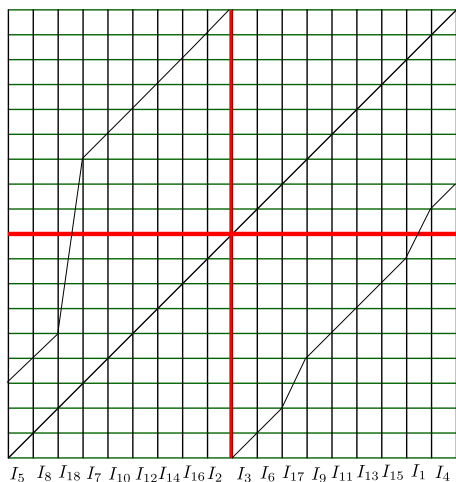
Luego $h_{top}(\underline{\alpha}, \underline{\beta}) = \frac{\log(2)}{Per(\alpha)}$

Si $\alpha = \underline{a_- b^4 b_+} = \underline{00(10)_4 11}$, $Per(\alpha) = 12$

$$\underline{\alpha_- \beta} = \underline{0010(10)_4 110}$$

$$\underline{\beta_+ \alpha} = \underline{1100(10)_3 11001}$$

El gráfico asociado con su respectivo grafo es:



Del grafo tenemos que la Roma es $R = \{I_1, I_{18}\}$, $a_{1,1} = 2x^{-12}$, $a_{18,18} = x^{-2}$ y el polinomio característico es

$$p(x) = (-1)^{18-1} \cdot x^{18} \cdot \det \begin{pmatrix} 2x^{-12} - 1 & 0 \\ a_{18,1} & x^{-2} - 1 \end{pmatrix} = -x^4 \cdot (2 - x^{12}) \cdot (1 - x^2),$$

y la mayor raíz real es $x = \sqrt[12]{2}$

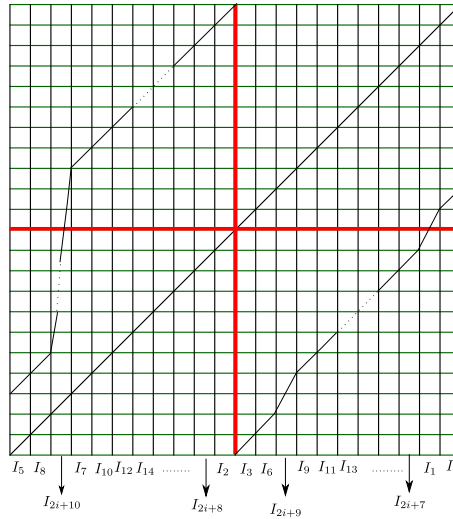
$$\text{Luego } h_{top}(\alpha_{-\beta}, \beta_{+\alpha}) = \frac{\log(2)}{Per(\alpha)}$$

Si $\alpha = \underline{a_- b^i b_+} = \underline{00(10)_i 11}$, $Per(\alpha) = 2i + 4 = t$, $i \geq 1$

$$\alpha_{-\beta} = \underline{0010(10)_i 100}$$

$$\beta_{+\alpha} = \underline{1100(10)_{i-1} 11001}$$

El gráfico asociado es:

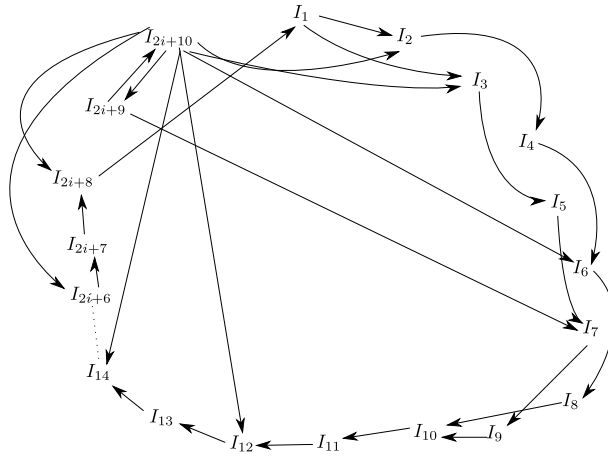


I_1 es el penúltimo intervalo, $I_1 \rightarrow I_2$ e $I_1 \rightarrow I_3$, I_2 es el intervalo anterior a la discontinuidad, I_3 es el intervalo posterior a la discontinuidad $I_2 \rightarrow I_4$, I_4 es el último intervalo, $I_3 \rightarrow I_5$ es el primer intervalo

$I_4 \rightarrow I_6 = I_3 + 1$, $I_5 \rightarrow I_7 = I_5 + 3$, $I_6 \rightarrow I_8 = I_5 + 1$, $I_7 \rightarrow I_9 = I_3 + 2$, $I_8 \rightarrow I_{10} = I_7 + 1$, $I_9 \rightarrow I_{10}$, $I_{10} \rightarrow I_{11} = I_9 + 1$, $I_{11} \rightarrow I_{12} = I_{10} + 1$, $I_{12} \rightarrow I_{13} = I_{11} + 1$, $I_{13} \rightarrow I_{14} = I_{12} + 1$, sucesivamente $I_{2i+6} \rightarrow I_{2i+7} = I_{2i+5} + 1$, $I_{2i+7} \rightarrow I_{2i+8} = I_{2i+6} + 1$, $I_{2i+8} \rightarrow I_1$

$I_{2i+9} = I_3 + 2$, $I_{2i+9} \rightarrow I_7$, e $I_{2i+9} \rightarrow I_{2i+10} = I_5 + 2$

Así obtenemos el siguiente grafo:



Del grafo tenemos que la Roma es $R = \{I_1, I_{2i+10}\}$, $a_{1,1} = 2x^{-(2i+4)}$, $a_{2i+10,2i+10} = x^{-2}$ y el polinomio característico es

$$p(x) = (-1)^{2i+10-1} \cdot x^{2i+10} \cdot \det \begin{pmatrix} 2x^{-(2i+4)} - 1 & 0 \\ a_{2i+10,1} & x^{-2} - 1 \end{pmatrix} = -x^4 \cdot (2 - x^{2i+4}) \cdot (1 - x^2),$$

y la mayor raíz real es $x = \sqrt[2i+4]{2}$

$$\text{Luego } h_{top}(\alpha_{-\underline{\beta}}, \beta_{+\underline{\alpha}}) = \frac{\log(2)}{Per(\alpha)}$$

Ahora si $n \geq 2$ y $k = 3$, tenemos que $a = \underline{0_n 1}$ y

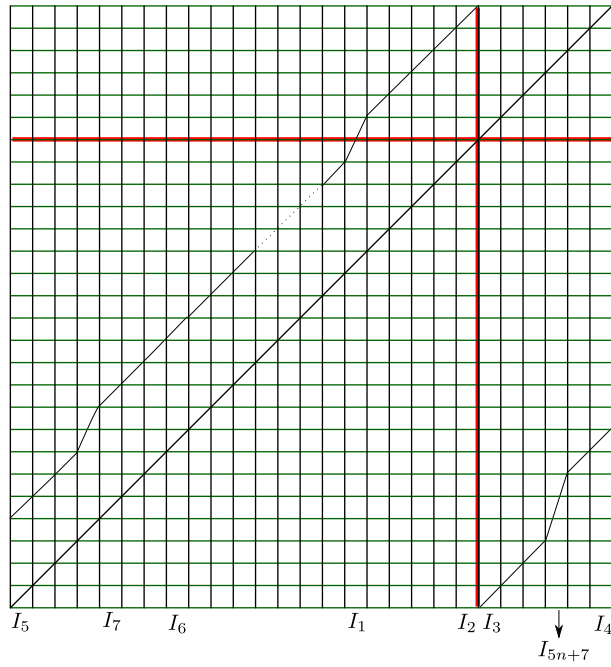
$$\alpha = \underline{a_{-b_+ a}} = \underline{0_{n+1} 10_{n-1} 10_n 1}, Per(\alpha) = 3n + 3$$

$$\beta = \underline{10_{n-1} 10_n 10_{n+1}}$$

$$\alpha_{-\underline{\beta}} = \underline{0_{n+1} 10_{n-1} 10_{n+1} 10_{n-1} 10}$$

$$\beta_{+\underline{\alpha}} = \underline{10_{n-1} 100_{n-1} 10_n 10_{n+1} 1}$$

El gráfico asociado es:

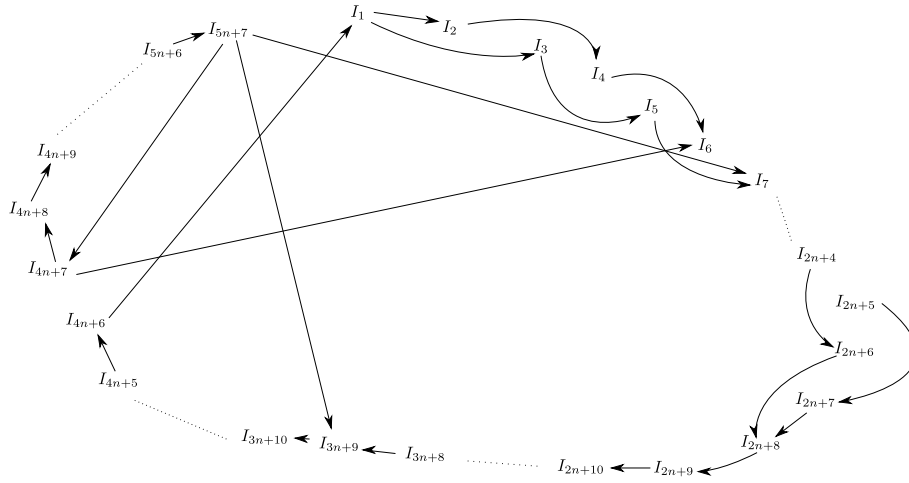


I_1 es el intervalo al lado izquierdo de la discontinuidad y mas cercano a la discontinuidad que va a dar a dos intervalos. $I_1 \rightarrow I_2$ e $I_1 \rightarrow I_3$, I_2 es el intervalo anterior a la discontinuidad, I_3 es el intervalo posterior a la discontinuidad. $I_2 \rightarrow I_4$, I_4 es el último intervalo, $I_3 \rightarrow I_5$, I_5 es el primer intervalo

$$I_4 \rightarrow I_6 = I_5 + 7, I_5 \rightarrow I_7 = I_5 + 4, I_6 \rightarrow I_8 = I_6 + 5, I_7 \text{ to } I_9 = I_7 + 5, \dots, I_{2n} \rightarrow I_{2n+2} = I_{2n} + 5, I_{2n+1} \rightarrow I_{2n+3} = I_{2n+1} + 5, I_{2n+2} \rightarrow I_{2n+4} = I_3 + 2, I_{2n+5} \rightarrow I_{2n+7} = I_4 - 1, I_{2n+4} \rightarrow I_{2n+6} = I_5 + 2, I_{2n+6} \rightarrow I_{2n+8} = I_{2n+6} + 4, I_{2n+7} \rightarrow I_{2n+8}, I_{2n+8} \rightarrow I_{2n+9} = I_{2n+8} + 5, I_{2n+9} \rightarrow I_{2n+10} = I_{2n+9} + 5, \dots I_{3n+5} \rightarrow I_{3n+6} = I_{3n+5} + 5, I_{3n+6} \rightarrow I_{3n+7} = I_3 + 1, I_{3n+7} \rightarrow I_{3n+8} = I_5 + 1, I_{3n+8} \rightarrow I_{3n+9} = I_{3n+8} + 5, \dots I_{4n+6} \rightarrow I_1$$

I_{4n+7} es el intervalo que queda al lado izquierdo de la discontinuidad que va a dar a dos intervalos y es distinto a I_1 . $I_{4n+7} \rightarrow I_6$ e $I_{4n+7} \rightarrow I_{4n+8} = I_{4n+7} + 5, \dots I_{5n+5} \rightarrow I_{5n+6} = I_{5n+5} + 5, I_{5n+6} \rightarrow I_{5n+7} = I_3 + 3$

Observemos que $I_{5n+7} \rightarrow I_7$, $I_{5n+7} \rightarrow I_{4n+7}$ e $I_{5n+7} \rightarrow I_{3n+9}$, en el caso que $n = 2$, I_{3n+9} se reemplaza por I_1 Así tenemos el siguiente grafo



Del grafo tenemos que la Roma es $R = \{I_1, I_{5n+7}\}$, $a_{1,1} = 2x^{-(3n+3)}$, $a_{5n+7,5n+7} = x^{-(n+1)}$

y el polinomio característico es

$$p(x) = (-1)^{5n+7-1} \cdot x^{5n+7} \cdot \det \begin{pmatrix} 2x^{-(3n+3)} - 1 & 0 \\ a_{5n+7,1} & x^{-(n+1)} - 1 \end{pmatrix} =$$

$$= (-1)^{5n+6} x^{n+3} \cdot (2 - x^{3n+3}) \cdot (1 - x^{n+1}), \text{ y la mayor raíz real es } x = \sqrt[3n+3]{2}$$

$$\text{Luego } h_{top}(\underline{\alpha}, \underline{\beta}, \underline{\alpha}) = \frac{\log(2)}{Per(\underline{\alpha})}$$

Si $k - 2 = i \geq 1$, $a = \underline{0_n 1}$, $n \geq 2$

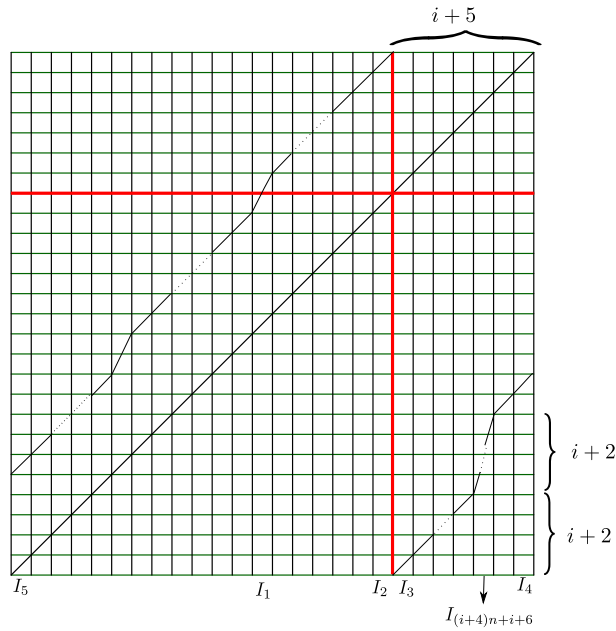
$$\underline{\alpha} = \underline{0_{n+1} 1 0_{n-1} 1 (0_n 1)^i}, Per(\underline{\alpha}) = (i + 2)n + i + 2$$

$$\underline{\beta} = \underline{1 0_{n-1} 1 (0_n 1)^i 0_{n+1}}$$

$$\underline{\alpha} \underline{\beta} = \underline{0_{n+1} 1 0_{n-1} 1 (0_n 1)^{i-1} 0_{n+1} 1 0_{n-1} 1 0}$$

$$\underline{\beta} \underline{\alpha} = \underline{1 0_{n-1} 1 0 0_{n-1} 1 (0_n 1)^i 0_{n+1} 1}$$

El gráfico asociado es:



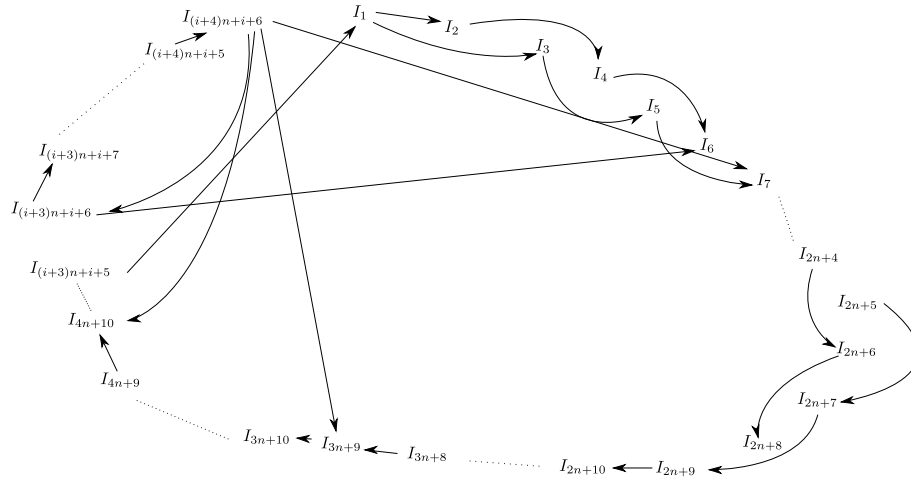
I_1 es el intervalo al lado izquierdo de la discontinuidad y mas cercano a la discontinuidad que va a dar a dos intervalos. $I_1 \rightarrow I_2$ e $I_1 \rightarrow I_3$, I_2 es el intervalo anterior a la discontinuidad, I_3 es el intervalo posterior a la discontinuidad. $I_2 \rightarrow I_4$, I_4 es el último intervalo, $I_3 \rightarrow I_5$, I_5 es el primer intervalo

$$I_4 \rightarrow I_6 = I_5 + 2i + 5, I_5 \rightarrow I_7 = I_5 + i + 3, I_6 \rightarrow I_8 = I_6 + i + 4, I_7 \rightarrow I_9 = I_7 + i + 4, \dots, I_{2n} \rightarrow I_{2n+2} = I_{2n} + i + 4, I_{2n+1} \rightarrow I_{2n+3} = I_{2n+1} + i + 4, I_{2n+2} \rightarrow I_{2n+4} = I_4 - 3, I_{2n+3} \rightarrow I_{2n+5} = I_{2n+3} + i + 4, I_{2n+5} \rightarrow I_{2n+7} = I_4 - 1, I_{2n+4} \rightarrow I_{2n+6} = I_5 + i + 1, I_{2n+6} \rightarrow I_{2n+8} = I_{2n+6} + i + 3, I_{2n+7} \rightarrow I_{2n+8}, I_{2n+8} \rightarrow I_{2n+9} = I_{2n+8} + i + 4, I_{2n+9} \rightarrow I_{2n+10} = I_{2n+9} + i + 4, \dots, I_{(i+3)n+i+5} \rightarrow I_1$$

$I_{(i+3)n+i+6}$ es el intervalo que queda al lado izquierdo de la discontinuidad que va a dar a dos intervalos y es distinto a I_1 . $I_{(i+3)n+i+6} \rightarrow I_6$ e $I_{(i+3)n+i+6} \rightarrow I_{(i+3)n+i+7} = I_{(i+3)n+i+6} + i + 4, \dots, I_{(i+4)n+i+4} \rightarrow I_{(i+4)n+i+5} = I_{(i+4)n+i+4} + i + 4, I_{(i+4)n+i+5} \rightarrow I_{(i+4)n+i+6} = I_4 - 2$

Observemos que $I_{(i+4)n+i+6}$ va a dar a $i + 2$ intervalos estos son $I_7, I_{3n+9}, I_{4n+10}, \dots, I_{(i+2)n+i+8}$ y a $I_{(i+3)n+i+6}$, en el caso $n = 2$, $I_{(i+2)n+i+8}$ se cambia por I_1

Así tenemos el siguiente grafo



Del grafo tenemos que la Roma es $R = \{I_1, I_{(i+4)n+i+6}\}$, $a_{1,1} = 2x^{-[(i+2)n+i+2]}$,

$a_{(i+4)n+i+6,(i+4)n+i+6} = x^{-(n+1)}$ y el polinomio característico es

$$p(x) = (-1)^{(i+4)n+i+6-1} \cdot x^{(i+4)n+i+6} \cdot \det \begin{pmatrix} 2x^{-[(i+2)n+i+2]} - 1 & 0 \\ a_{(i+4)n+i+6,1} & x^{-(n+1)} - 1 \end{pmatrix} =$$

$$= (-1)^{(i+4)n+i+5} x^{n+3} \cdot (2 - x^{(i+2)n+i+2}) \cdot (1 - x^{n+1}), \text{ y la mayor raíz real es } x = \sqrt[(i+2)n+i+2]{2}$$

$$\text{Luego } h_{top}(\alpha_{-\underline{\beta}}, \beta_{+\underline{\alpha}}) = \frac{\log(2)}{Per(\alpha)}$$

Sea $a = \underline{0_n 1}$, $n \geq 2$ y $\alpha = \underline{a_- b b_+}$, así

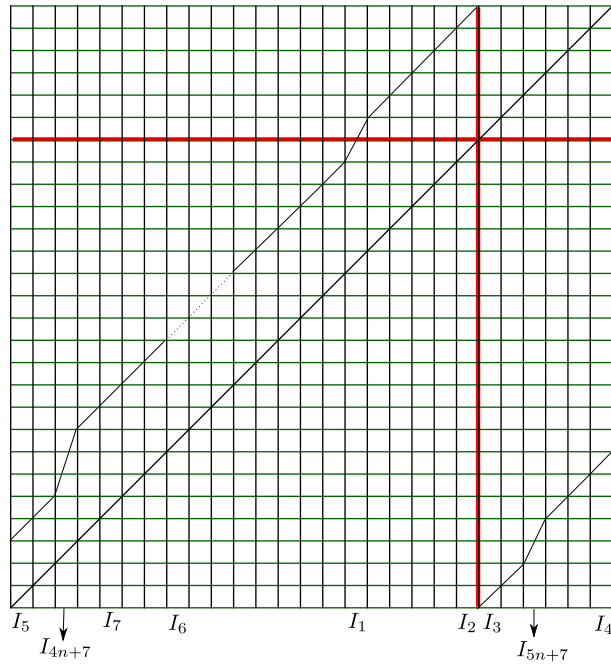
$$\alpha = \underline{0_{n+1} 10_n 10_{n-1} 1}, Per(\alpha) = 3n + 3$$

$$\beta = \underline{10_{n-1} 10_{n+1} 10_n}$$

$$\alpha_{-\underline{\beta}} = \underline{0_{n+1} 10_n 10_n 10_{n-1} 10}$$

$$\beta_{+\underline{\alpha}} = \underline{10_{n-1} 100_n 10_{n-1} 10_{n+1} 1}$$

El gráfico asociado es:



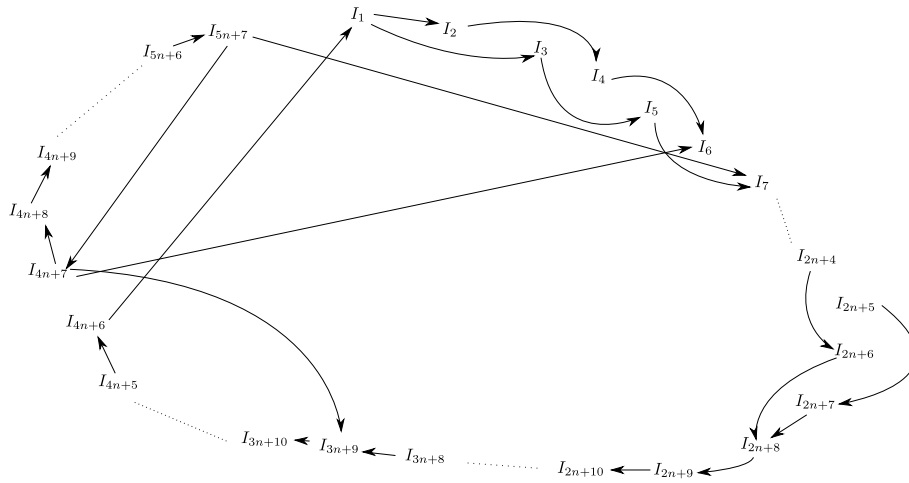
I_1 es el intervalo al lado izquierdo de la discontinuidad que va a dar a dos intervalos. $I_1 \rightarrow I_2$ e $I_1 \rightarrow I_3$, I_2 es el intervalo anterior a la discontinuidad, I_3 es el intervalo posterior a la discontinuidad. $I_2 \rightarrow I_4$, I_4 es el último intervalo, $I_3 \rightarrow I_5$, I_5 es el primer intervalo

$I_4 \rightarrow I_6 = I_5 + 6$, $I_5 \rightarrow I_7 = I_5 + 3$, $I_6 \rightarrow I_8 = I_6 + 5$, $I_7 \rightarrow I_9 = I_7 + 5$, \dots , $I_{2n} \rightarrow I_{2n+2} = I_{2n} + 5$, $I_{2n+1} \rightarrow I_{2n+3} = I_{2n+1} + 5$, $I_{2n+2} \rightarrow I_{2n+4} = I_3 + 1$, $I_{2n+3} \rightarrow I_{2n+5} = I_{2n+3} + 5$, $I_{2n+5} \rightarrow I_{2n+7} = I_4 - 2$, $I_{2n+4} \rightarrow I_{2n+6} = I_5 + 1$, $I_{2n+6} \rightarrow I_{2n+8} = I_{2n+6} + 3$, $I_{2n+7} \rightarrow I_{2n+8}$, $I_{2n+8} \rightarrow I_{2n+9} = I_{2n+8} + 5$, $I_{2n+9} \rightarrow I_{2n+10} = I_{2n+9} + 5$, \dots , $I_{3n+6} \rightarrow I_{3n+7} = I_{3n+6} + 5$, $I_{3n+7} \rightarrow I_{3n+8} = I_4 - 1$, $I_{3n+8} \rightarrow I_{3n+9} = I_5 + 5$, $I_{3n+9} \rightarrow I_{3n+10} = I_{3n+9} + 5$, \dots , $I_{4n+6} \rightarrow I_1$
 I_{4n+7} es el intervalo que queda al lado izquierdo de la discontinuidad que va a dar a tres intervalos. $I_{4n+7} \rightarrow I_6$, $I_{4n+7} \rightarrow I_{3n+9}$, $I_{4n+7} \rightarrow I_{4n+8} = I_{4n+7} + 5$ (en el caso que $n = 2$ I_{3n+9} se reemplaza por I_1).

$I_{4n+8} \rightarrow I_{4n+9} = I_{4n+8} + 5$, \dots , $I_{5n+5} \rightarrow I_{5n+6} = I_{5n+5} + 5$, $I_{5n+6} \rightarrow I_{5n+7} = I_4 - 3$

Observemos que I_{5n+7} va a dar a 2 intervalos I_7 , I_{4n+7}

Así tenemos el siguiente grafo



Del grafo tenemos que la Roma es $R = \{I_1, I_{5n+7}\}$, $a_{1,1} = 2x^{-(3n+3)}$, $a_{5n+7,5n+7} = x^{-(n+1)}$

y el polinomio característico es

$$p(x) = (-1)^{5n+7-1} \cdot x^{5n+7} \cdot \det \begin{pmatrix} 2x^{-(3n+3)} - 1 & 0 \\ a_{5n+7,1} & x^{-(n+1)} - 1 \end{pmatrix} =$$

$$= (-1)^{5n+6} x^{n+3} \cdot (2 - x^{3n+3}) \cdot (1 - x^{n+1}), \text{ y la mayor raíz real es } x = \sqrt[3n+3]{2}$$

$$\text{Luego } h_{top}(\underline{\alpha-\beta}, \underline{\beta+\alpha}) = \frac{\log(2)}{Per(\alpha)}$$

Sea $a = \underline{0_{n+1}}$, $n \geq 2$ y $\alpha = \underline{a-b^i b_+}$, $k-2 = 1 \geq 1$ así

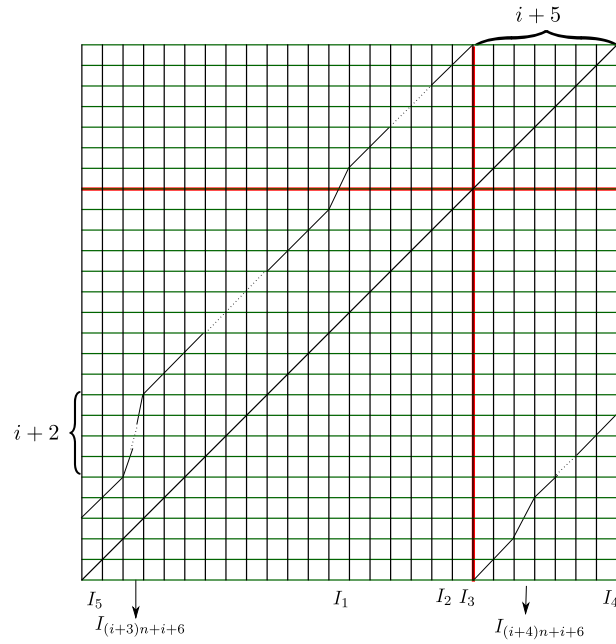
$$\alpha = \underline{0_{n+1}(10_n)^i 10_{n-1} 1}, Per(\alpha) = (i+2) \cdot n + i + 2$$

$$\beta = \underline{10_{n-1} 10_{n+1} (10_n)^i}$$

$$\underline{\alpha-\beta} = \underline{0_{n+1} 10_n (10_n)^i 10_{n-1} 10}$$

$$\underline{\beta+\alpha} = \underline{10_{n-1} 100_n (10_n)^{i-1} 10_{n-1} 10_{n+1} 1}$$

El gráfico asociado es:



I_1 es el intervalo al lado izquierdo de la discontinuidad que va a dar a dos intervalos. $I_1 \rightarrow I_2$ e $I_1 \rightarrow I_3$, I_2 es el intervalo anterior a la discontinuidad, I_3 es el intervalo posterior a la discontinuidad. $I_2 \rightarrow I_4$, I_4 es el último intervalo, $I_3 \rightarrow I_5$, I_5 es el primer intervalo

$$\begin{aligned}
I_4 \rightarrow I_6 &= I_5 + i + 5, I_5 \rightarrow I_7 = I_5 + 3, I_6 \rightarrow I_8 = I_6 + i + 4, I_7 \rightarrow I_9 = I_7 + i + 4, \\
\dots, I_{2n} \rightarrow I_{2n+2} &= I_{2n} + i + 4, I_{2n+1} \rightarrow I_{2n+3} = I_{2n+1} + i + 4, I_{2n+2} \rightarrow I_{2n+4} = I_3 + 1, \\
I_{2n+3} \rightarrow I_{2n+5} &= I_{2n+3} + i + 4, I_{2n+5} \rightarrow I_{2n+7} = I_3 + 3, I_{2n+4} \rightarrow I_{2n+6} = I_5 + 1, \\
I_{2n+6} \rightarrow I_{2n+8} &= I_{2n+6} + 3, I_{2n+7} \rightarrow I_{2n+8}, I_{2n+8} \rightarrow I_{2n+9} = I_{2n+8} + i + 4, I_{2n+9} \rightarrow I_{2n+10} = \\
I_{2n+9} + i + 4, \dots I_{3n+6} \rightarrow I_{3n+7} &= I_{3n+6} + i + 4, I_{3n+7} \rightarrow I_{3n+8} = I_3 + 4, I_{3n+8} \rightarrow I_{3n+9} = \\
I_5 + 5, I_{3n+9} \rightarrow I_{3n+10} &= I_{3n+9} + i + 4, \dots I_{(i+2)n+i+5} \rightarrow I_{(i+2)n+i+6} = I_{(i+2)n+i+5} + i + 4, \\
I_{(i+2)n+i+6} \rightarrow I_{(i+2)n+i+7} &= I_4 - 1, I_{(i+2)n+i+7} \rightarrow I_{(i+2)n+i+8} = I_6 - 1, I_{(i+2)n+i+8} \rightarrow \\
I_{(i+2)n+i+9} &= I_{(i+2)n+i+8} + i + 4, \dots, I_{(i+3)n+i+4} \rightarrow I_{(i+3)n+i+5} = I_{(i+3)n+i+4} + i + 4, \\
I_{(i+3)n+i+5} &\rightarrow I_1
\end{aligned}$$

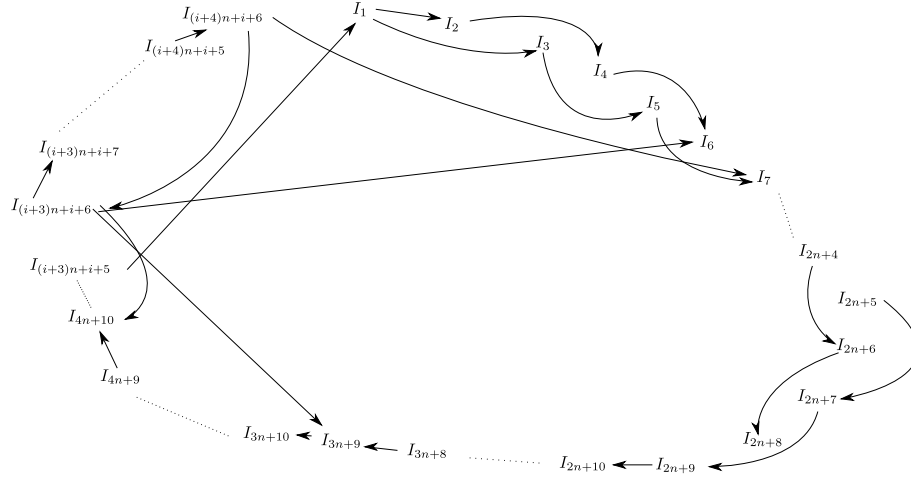
$I_{(i+3)n+i+6}$ es el intervalo que va a dar a $(i+2)$ intervalos. $I_{(i+3)n+i+6} \rightarrow I_6, I_{(i+3)n+i+6} \rightarrow I_{3n+9}, I_{(i+3)n+i+6} \rightarrow I_{4n+10}, \dots I_{(i+3)n+i+6} \rightarrow I_{(i+2)n+i+8}, I_{(i+3)n+i+6} \rightarrow I_{(i+3)n+i+7} = I_6 + 1$ (en el caso que $n = 2$ $I_{(i+2)n+i+8}$ se reemplaza por I_1).

$$I_{(i+3)n+i+7} \rightarrow I_{(i+3)n+i+8} = I_{(i+3)n+i+7} + i + 4, \dots I_{(i+4)n+i+4} \rightarrow I_{(i+4)n+i+5} = I_{(i+4)n+i+4} +$$

$$i + 4, I_{(i+4)n+i+5} \rightarrow I_{(i+4)n+i+6} = I_3 + 2$$

Observemos que $I_{(i+4)n+i+6}$ va a dar a 2 intervalos $I_7, I_{(i+3)n+i+6}$

Así tenemos el siguiente grafo



Del grafo tenemos que la Roma es $R = \{I_1, I_{(i+4)n+i+6}\}$, $a_{1,1} = 2x^{-[(i+2)n+i+2]}$,

$a_{(i+4)n+i+6, (i+4)n+i+6} = x^{-(n+1)}$ y el polinomio característico es

$$p(x) = (-1)^{(i+4)n+i+6-1} \cdot x^{(i+4)n+i+6} \cdot \det \begin{pmatrix} 2x^{-[(i+2)n+i+2]} - 1 & 0 \\ a_{(i+4)n+i+6,1} & x^{-(n+1)} - 1 \end{pmatrix} =$$

$$= (-1)^{(i+4)n+i+5} x^{n+3} \cdot (2 - x^{(i+2)n+i+2}) \cdot (1 - x^{n+1}), \text{ y la mayor raíz real es } x = \sqrt[(i+2)n+i+2]{2}$$

$$\text{Luego } h_{top}(\underline{\alpha_- \beta}, \underline{\beta_+ \alpha}) = \frac{\log(2)}{Per(\alpha)}$$

□

- Si $k = k_1 \cdot k_2$ y $t = k_1 \cdot t_2$, con k_2 y t_2 primos relativos y $k_1 > 1$ entonces por teorema tenemos que p^k genera sucesión $a \in A_\infty^\infty$ talque $Per(a) = t_2$ y a genera a las sucesiones $\alpha_1 = \underline{a_- b_+ a^{k_1-2}}$ y $\alpha_2 = \underline{a_- b^{k_1-2} b_+}$ cuyo período es t : (esto es por el teorema 3.1.8)

- Comencemos con **período** $t = 6 = 2 \cdot 3 = k_1 \cdot t_2$

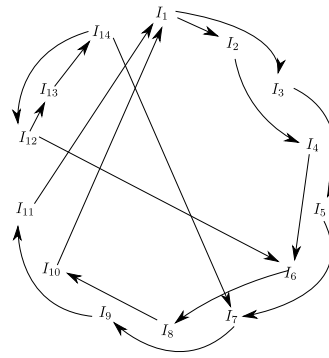
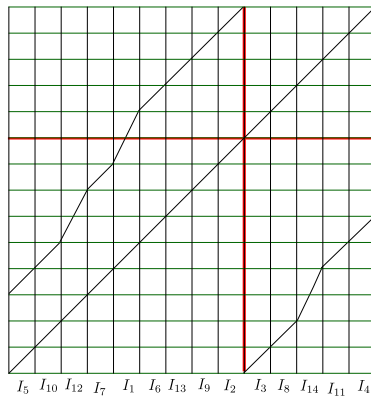
Si $k = 2 = k_1 \cdot k_2$, o sea $k_1 = 2, k_2 = 1$

En este caso p^k genera a $a = \underline{001}$ y a genera a $\alpha = \underline{a_- b_+} = \underline{000101}$, así

$$\alpha_- \underline{\beta} = 0001\underline{001010}$$

$$\beta_+ \underline{\alpha} = 10100\underline{10001}$$

El grafico asociado con su respectivo grafo es:



La roma es $R = \{I_1, I_{14}\}$, $a_{1,1} = 2x^{-6}$, $a_{14,14} = x^{-3}$ y el polinomio característico es

$$p(x) = (-1)^{14-1} \cdot x^{14} \cdot \det \begin{pmatrix} 2x^{-6} - 1 & 0 \\ a_{14,1} & x^{-3} - 1 \end{pmatrix} = -x^{14} \cdot (2x^{-6} - 1) \cdot (x^{-3} - 1) =$$

$$-x^5 \cdot (2 - x^6) \cdot (1 - x^3), \text{ y la mayor raíz real es } x = \sqrt[6]{2}$$

Luego $h_{top}(\underline{\alpha_- \beta}, \underline{\beta_+ \alpha}) = \frac{\log(2)}{6}$

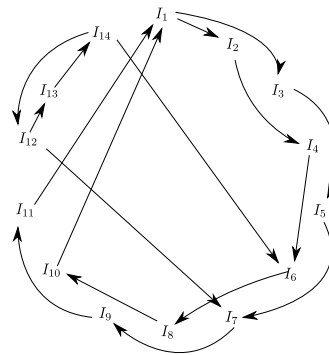
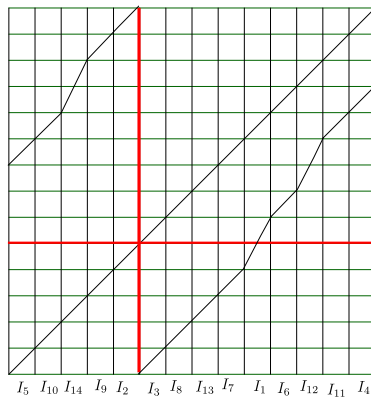
- Si $k = 4 = 2 \cdot 2 = k_1 \cdot k_2$, o sea $k_1 = 2, k_2 = 2$

En este caso p^k genera a $a = \underline{011}$ y a genera a $\alpha = \underline{a_- b_+} = \underline{010111}$, así

$$\underline{\alpha_- \beta} = 0101\underline{101110}$$

$$\underline{\beta_+ \alpha} = 1110\underline{110101}$$

El gráfico asociado con su respectivo grafo es:



La roma es $R = \{I_1, I_{14}\}$, así $a_{1,1} = 2x^{-6}$, $a_{14,14} = x^{-3}$ y el polinomio característico es

$$p(x) = (-1)^{14-1} \cdot x^{14} \cdot \det \begin{pmatrix} 2x^{-6} - 1 & 0 \\ a_{14,1} & x^{-3} - 1 \end{pmatrix} = -x^{14} \cdot (2x^{-6} - 1) \cdot (x^{-3} - 1) =$$

$-x^5 \cdot (2 - x^6) \cdot (1 - x^3)$, y la mayor raíz real es $x = \sqrt[6]{2}$

Luego $h_{top}(\alpha_{-\underline{\beta}}, \beta_{+\underline{\alpha}}) = \frac{\log(2)}{6}$

• Si $k = 3 = 3 \cdot 1$, o sea $k_1 = 3, k_2 = 1$. En este caso $t = 3 \cdot 2$ o sea $k_1 = 3, t_2 = 2$ y p^k

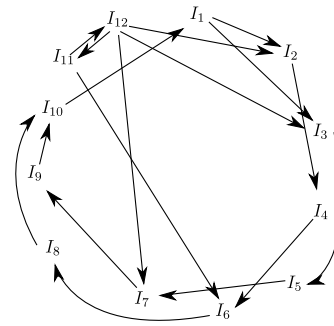
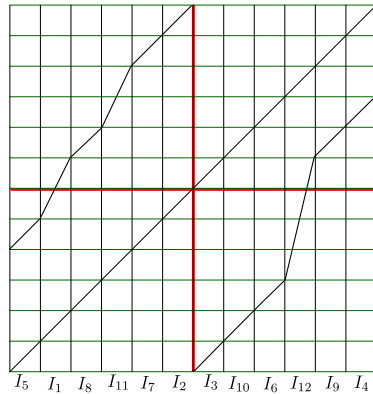
genera a $a = \underline{01}$ y a genera a $\alpha_1 = \underline{a_-b_+a} = \underline{001101}$ y $\alpha_2 = \underline{a_-bb_+} = \underline{001011}$

Si $\alpha = \underline{a_-b_+a} = \underline{001101}$

$\alpha_{-\underline{\beta}} = 001\underline{100110}$

$\beta_{+\underline{\alpha}} = 110\underline{101001}$

El gráfico asociado con su respectivo grafo es:



La roma es $R = \{I_1, I_{12}\}$, así $a_{1,1} = 2x^{-6}$, $a_{12,12} = x^{-2}$ y el polinomio característico es

$$p(x) = (-1)^{12-1} \cdot x^{12} \cdot \det \begin{pmatrix} 2x^{-6} - 1 & 0 \\ a_{12,1} & x^{-2} - 1 \end{pmatrix} = -x^{12} \cdot (2x^{-6} - 1) \cdot (x^{-2} - 1) =$$

$-x^4 \cdot (2 - x^6) \cdot (1 - x^2)$, y la mayor raíz real es $x = \sqrt[6]{2}$

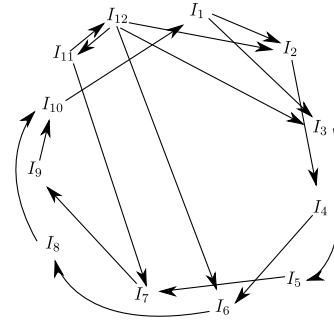
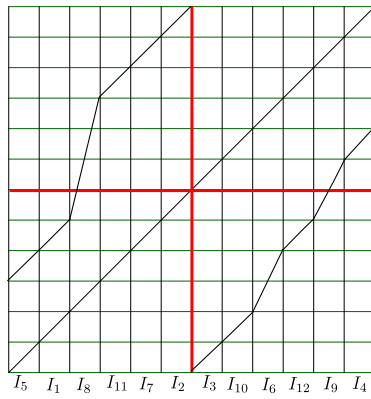
Luego $h_{top}(\alpha_{-\underline{\beta}}, \beta_{+\underline{\alpha}}) = \frac{\log(2)}{6}$

Si $\alpha = \underline{001011}$

$\alpha_{-\underline{\beta}} = 001\underline{010110}$

$\beta_{+\underline{\alpha}} = 110\underline{011001}$

El gráfico asociado con su respectivo grafo es:



La roma es $R = \{I_1, I_{12}\}$, así $a_{1,1} = 2x^{-6}$, $a_{12,12} = x^{-2}$ y el polinomio característico es $p(x) = (-1)^{12-1} \cdot x^{12} \cdot \det \begin{pmatrix} 2x^{-6} - 1 & 0 \\ a_{12,1} & x^{-2} - 1 \end{pmatrix} = -x^{12} \cdot (2x^{-6} - 1) \cdot (x^{-2} - 1) = -x^4 \cdot (2 - x^6) \cdot (1 - x^2)$, y la mayor raíz real es $x = \sqrt[6]{2}$
 Luego $h_{top}(\underline{\alpha-\beta}, \underline{\beta+\alpha}) = \frac{\log(2)}{6}$

• **Período** $t = 8$

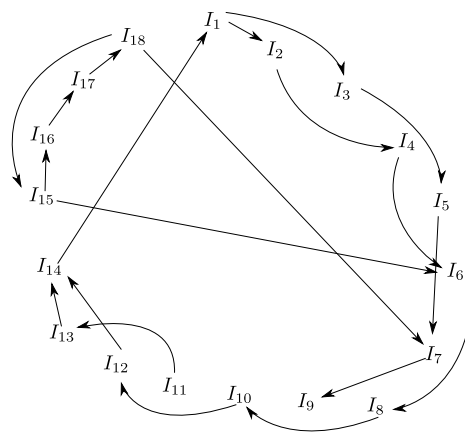
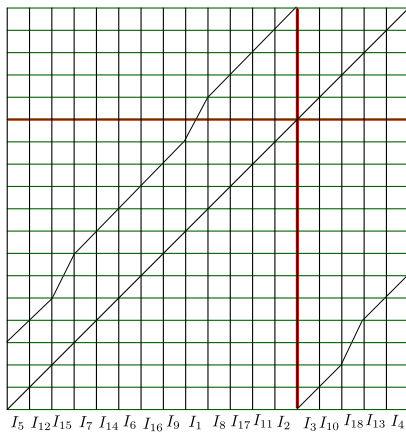
• Consideremos $k = 2 = 2 \cdot 1 = k_1 \cdot k_2$ y $t = 2 \cdot 2 \cdot 4 = k_1 \cdot t_2$, o sea $k_1 = 2, k_2 = 1$ y $t_2 = 4$

En este caso p^2 genera a la sucesión $a = \underline{0001}$ que a su vez genera a la sucesión $\alpha = \underline{00001001}$ de período 8 así

$$\underline{\alpha-\beta} = 0000100010010$$

$$\underline{\beta+\alpha} = 1001000100001$$

El gráfico asociado con su respectivo grafo es:



Del grafo tenemos que la Roma es $R = \{I_1, I_{18}\}$, $a_{1,1} = 2x^{-8}$, $a_{18,18} = x^{-4}$ y el polinomio característico es

$$p(x) = (-1)^{18-1} \cdot x^{18} \cdot \det \begin{pmatrix} 2x^{-8} - 1 & 0 \\ a_{18,1} & x^{-4} - 1 \end{pmatrix} = -x^6 \cdot (2 - x^8) \cdot (1 - x^4), \text{ y la mayor}$$

raíz real es $x = \sqrt[8]{2}$

$$\text{Luego } h_{top}(\alpha_{-\underline{\beta}}, \beta_{+\underline{\alpha}}) = \frac{\log(2)}{8}$$

• Consideremos ahora $k = 4 = 4 \cdot 1$, $t = 8 = 4 \cdot 2$ o sea $k_1 = 4, k_2 = 1, t_2 = 2$

En este caso p^4 genera a la sucesión $a = \underline{01}$; que a su vez genera a la sucesiones

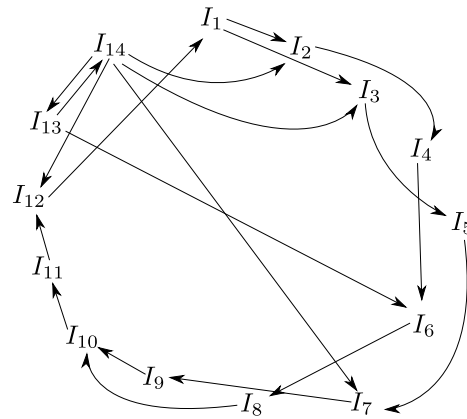
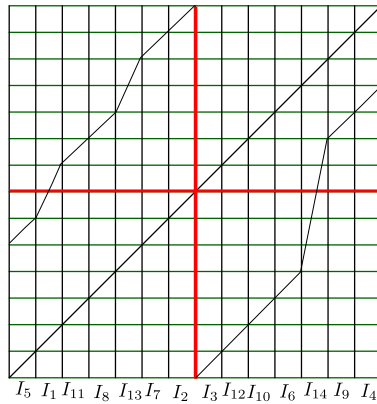
$\alpha = \underline{00110101}$, $\alpha = \underline{00101011}$, $\alpha = \underline{00101101}$ de período 8

Si $\alpha = \underline{00110101}$, entonces $\beta = b(\alpha) = \underline{11010100}$

$$\alpha_{-\underline{\beta}} = \underline{00110100110}$$

$$\beta_{+\underline{\alpha}} = \underline{11010101001}$$

El gráfico asociado con su respectivo grafo es:



Del grafo tenemos que la Roma es $R = \{I_1, I_{14}\}$, $a_{1,1} = 2x^{-8}$, $a_{14,14} = x^{-2}$ y el polinomio característico es

$$p(x) = (-1)^{14-1} \cdot x^{14} \cdot \det \begin{pmatrix} 2x^{-8} - 1 & 0 \\ a_{14,1} & x^{-2} - 1 \end{pmatrix} = -x^4 \cdot (2 - x^8) \cdot (1 - x^2), \text{ y la mayor}$$

raíz real es $x = \sqrt[8]{2}$

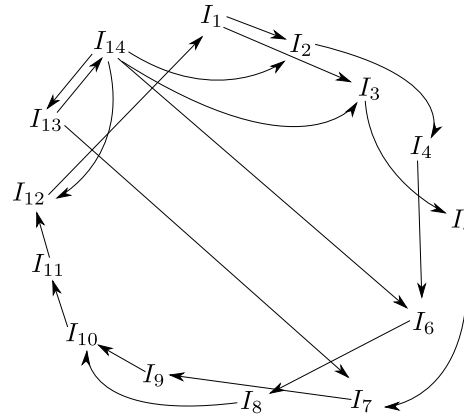
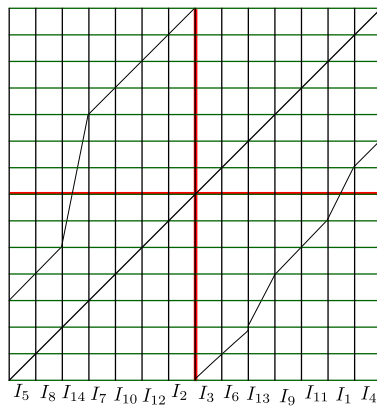
$$\text{Luego } h_{top}(\alpha_{-\underline{\beta}}, \beta_{+\underline{\alpha}}) = \frac{\log(2)}{8}$$

Si $\alpha = \underline{00101011}$, entonces $\beta = b(\alpha) = \underline{11001010}$

$$\alpha_{-\underline{\beta}} = \underline{00101010110}$$

$$\beta_+\underline{\alpha} = 11001011001$$

El gráfico asociado con su respectivo grafo es:



Del grafo tenemos que la Roma es $R = \{I_1, I_{14}\}$, $a_{1,1} = 2x^{-8}$, $a_{14,14} = x^{-2}$ y el polinomio característico es

$$p(x) = (-1)^{14-1} \cdot x^{14} \cdot \det \begin{pmatrix} 2x^{-8} - 1 & 0 \\ a_{14,1} & x^{-2} - 1 \end{pmatrix} = -x^4 \cdot (2 - x^8) \cdot (1 - x^2),$$

y la mayor raíz real es $x = \sqrt[8]{2}$

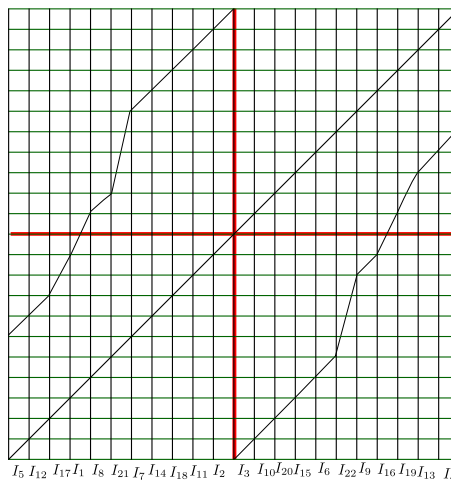
$$\text{Luego } h_{top}(\underline{\alpha}_-, \beta_+\underline{\alpha}) = \frac{\log(2)}{8}$$

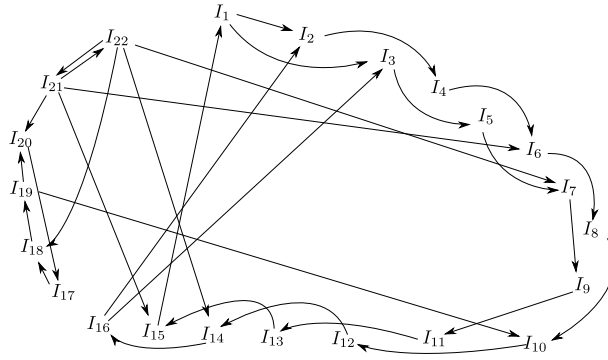
Si $\alpha = 001011101$, entonces $\beta = b(\alpha) = 11010010$

$$\alpha_-\underline{\beta} = 0010111001101001$$

$$\beta_+\underline{\alpha} = 1101001100101110$$

El gráfico asociado con su respectivo grafo es:





Del grafo tenemos que la Roma es $R = \{I_2, I_3, I_{17}, I_{22}\}$, $a_{2,2} = x^{-8}$, $a_{2,3} = x^{-8}$, $a_{3,2} = x^{-8}$, $a_{3,3} = x^{-8}$, $a_{17,2} = x^{-7} + x^{-5} = a_{17,3}$, $a_{17,22} = 0$, $a_{22,2} = 2x^{-7} + x^{-3} + x^{-8} + x^{-4} = a_{22,3}$, $a_{22,17} = x^{-4}$, $a_{22,22} = x^{-2}$ y el polinomio característico es

$$p(x) = (-1)^{14-1} \cdot x^{14} \cdot \det \begin{pmatrix} x^{-8} - 1 & x^{-8} & 0 & 0 \\ x^{-8} & x^{-8} - 1 & 0 & 0 \\ a_{17,2} & a_{17,3} & x^{-4} - 1 & 0 \\ a_{22,2} & a_{22,3} & a_{22,17} & x^{-2} - 1 \end{pmatrix} =$$

$= -x^8 \cdot (-1 + x^4) \cdot (-2 + x^8) \cdot (-1 + x^2)$, y la mayor raíz real es $x = \sqrt[8]{2}$

Luego $h_{top}(\underline{\alpha_- \beta}, \underline{\beta_+ \alpha}) = \frac{\log(2)}{8}$

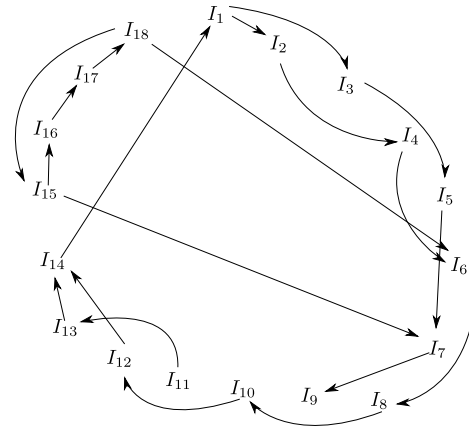
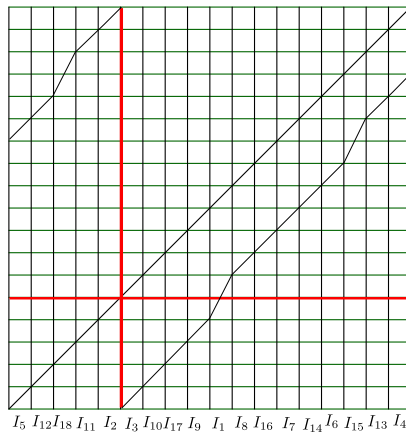
• Si $k = 6 = 2 \cdot 3 = k_1 \cdot k_2$ y $t = 8 = 2 \cdot 4 = k_1 \cdot t_2$, o sea $k_1 = 2, k_2 = 3, t_2 = 4$

En este caso p^6 genera a la sucesión $a = \underline{01111}$ que a su vez genera a la sucesión $\alpha = \underline{01101111}$ de período 8 así

$$\underline{\alpha_- \beta} = 01101\underline{22011110}$$

$$\underline{\beta_+ \alpha} = 11110\underline{11101101}$$

El gráfico asociado con su respectivo grafo es:



Del grafo tenemos que la Roma es $R = \{I_1, I_{18}\}$, $a_{1,1} = 2x^{-8}$, $a_{18,18} = x^{-4}$ y el polinomio característico es

$$p(x) = (-1)^{18-1} \cdot x^{18} \cdot \det \begin{pmatrix} 2x^{-8} - 1 & 0 \\ a_{18,1} & x^{-4} - 1 \end{pmatrix} = -x^6 \cdot (2 - x^8) \cdot (1 - x^4),$$

y la mayor raíz real es $x = \sqrt[8]{2}$

$$\text{Luego } h_{top}(\alpha_{-}\underline{\beta}, \beta_{+}\underline{\alpha}) = \frac{\log(2)}{8}$$

• **Período** $t = 9$

$t = 9 = 3 \cdot 3$ entonces $k_1 = 3$ y $t_2 = 3$.

• Si $k = 3 = 3 \cdot 1 = k_1 \cdot k_2$, o sea $k_1 = 3, k_2 = 1, t_2 = 3$

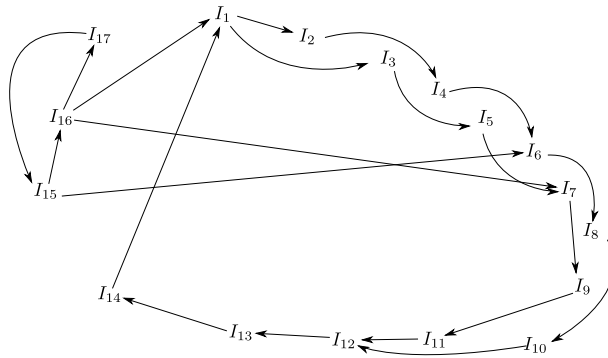
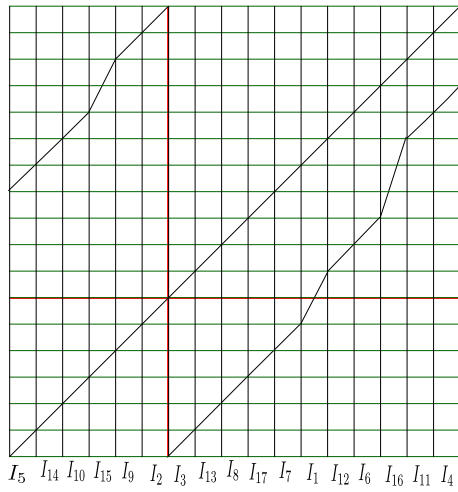
En este caso p^3 genera la sucesión $a = \underline{001}$ de período 3, esta sucesión genera a $\alpha_1 = \underline{a_{-}b_{+}a} = \underline{0_31010_21}$ y la sucesión $\alpha_2 = \underline{a_{-}bb_{+}} = \underline{0_310_2101}$ ambas de período 9

Comenzemos con $\alpha = \underline{a_{-}b_{+}a} = \underline{0_31010_21}$, entonces

$$\alpha_{-}\underline{\beta} = 0_3\underline{1010_31010}$$

$$\beta_{+}\underline{\alpha} = 10100\underline{10_210_31}$$

Así tenemos el siguiente gráfico con su respectivo grafo



Del grafo tenemos que la Roma es $R = \{I_1, I_{17}\}$, $a_{1,1} = 2x^{-9}$, $a_{17,17} = x^{-3}$ y el polinomio característico es

$$p(x) = (-1)^{17-1} \cdot x^{17} \cdot \det \begin{pmatrix} 2x^{-9} - 1 & 0 \\ a_{17,1} & x^{-3} - 1 \end{pmatrix} = x^5 \cdot (2 - x^9) \cdot (1 - x^3),$$

y la mayor raíz real es $x = \sqrt[9]{2}$

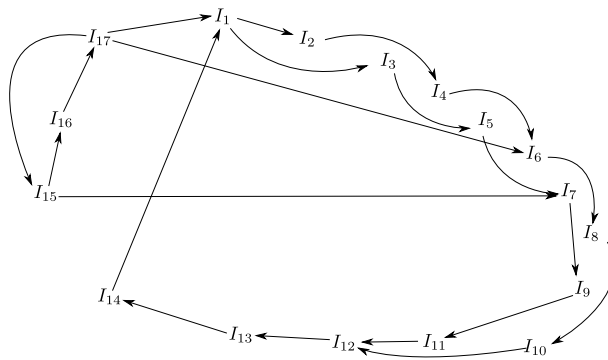
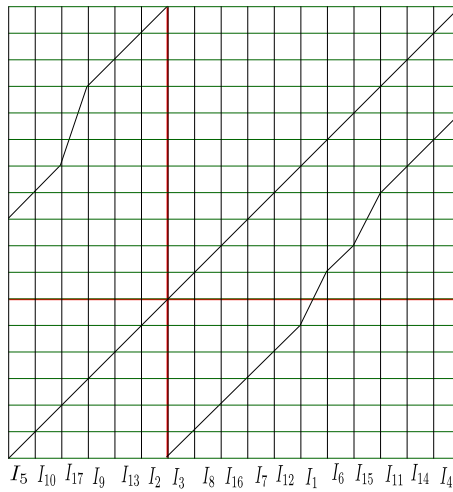
$$\text{Luego } h_{top}(\alpha_{-}, \beta_{+}) = \frac{\log(2)}{Per(\alpha)} = \frac{1}{9} \log(2)$$

Si $\alpha = \underline{a_{-} b b_{+}} = \underline{0101_2 01_3}$, entonces

$$\alpha_{-} \beta = 0101\underline{101_2 01_3}0$$

$$\beta_{+} \alpha = 1_3 0\underline{101_3 0101}$$

Así tenemos el siguiente gráfico con su respectivo grafo



Del grafo tenemos que la Roma es $R = \{I_1, I_{17}\}$, $a_{1,1} = 2x^{-9}$, $a_{17,17} = x^{-3}$ y el polinomio característico es

$$p(x) = (-1)^{17-1} \cdot x^{17} \cdot \det \begin{pmatrix} 2x^{-9} - 1 & 0 \\ a_{17,1} & x^{-3} - 1 \end{pmatrix} = x^5 \cdot (2 - x^9) \cdot (1 - x^3), \text{ y la mayor}$$

raíz real es $x = \sqrt[9]{2}$

$$\text{Luego } h_{top}(\alpha_{-\underline{\beta}}, \beta_{+\underline{\alpha}}) = \frac{\log(2)}{Per(\alpha)} = \frac{1}{9} \log(2)$$

• **Periodo** $t = 10$

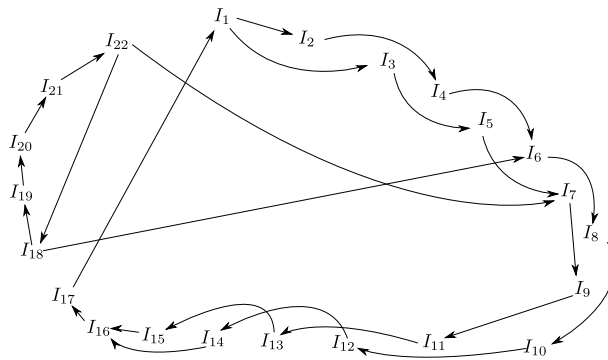
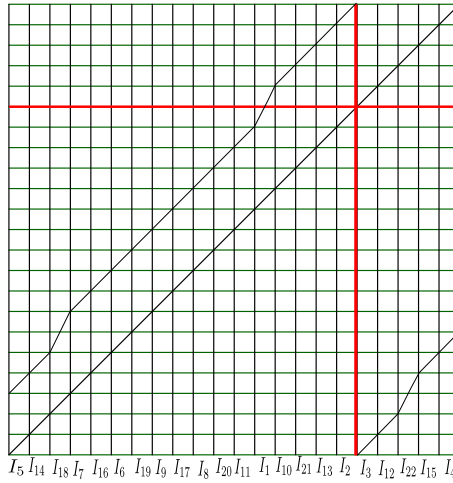
$t = 10 = 5 \cdot 2$ entonces si $k_1 = 2$, entonces $t_2 = 5$

• Si $k = 2 = 2 \cdot 1 = k_1 \cdot k_2$, o sea $k_1 = 2, k_2 = 1$ y $t_2 = 5$, entonces $p^k = p^2$ genera la sucesión $a = \underline{0_4 1}$ de período 5, esta sucesión genera a $\alpha = \underline{a_- b_+} = \underline{0_5 10_3 1}$ de período 10 así

$$\alpha_{-\underline{\beta}} = \underline{0_5 10_4 10_3 10}$$

$$\beta_{+\underline{\alpha}} = \underline{10_3 100_3 10_5 1}$$

Así tenemos el siguiente gráfico con su respectivo grafo



Del grafo tenemos que la Roma es $R = \{I_1, I_{22}\}$, $a_{1,1} = 2x^{-10}$, $a_{22,22} = x^{-5}$ y el polinomio característico es

$$p(x) = (-1)^{22-1} \cdot x^{22} \cdot \det \begin{pmatrix} 2x^{-10} - 1 & 0 \\ a_{22,1} & x^{-5} - 1 \end{pmatrix} = -x^7 \cdot (2 - x^{10}) \cdot (1 - x^5),$$

y la mayor raíz real es $x = \sqrt[10]{2}$

$$\text{Luego } h_{top}(\alpha_{-}\underline{\beta}, \beta_{+}\underline{\alpha}) = \frac{\log(2)}{Per(\alpha)} = \frac{1}{10} \log(2)$$

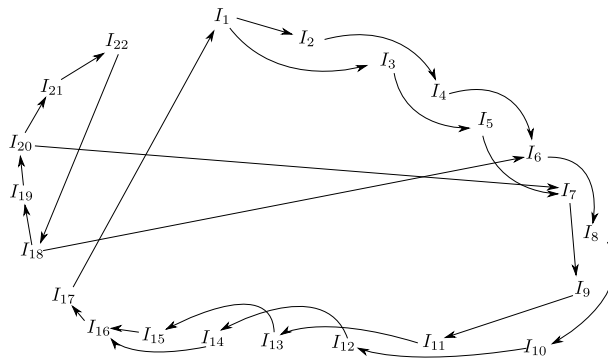
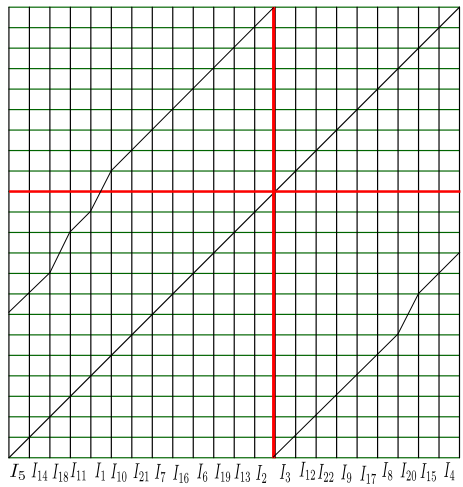
Si $k = 4$, entonces $k_1 = 2$ y $k_2 = 2$

p^4 genera la sucesión $a = \underline{0_2 10_1}$ de período 5, esta sucesión genera a $\alpha = \underline{a_{-} b_{+}} = \underline{0_2 10_2 10_1 0_1}$ de período 10 Así

$$\alpha_{-}\underline{\beta} = 0_2 10_2 \underline{10_1 0_2 10_1 0_1 0_1}$$

$$\beta_{+}\underline{\alpha} = 10_1 0_1 0_0 \underline{10_1 0_2 10_2 1}$$

Así tenemos el siguiente gráfico con su respectivo grafo



Del grafo tenemos que la Roma es $R = \{I_1, I_{22}\}$, $a_{1,1} = 2x^{-10}$, $a_{22,22} = x^{-5}$ y el polinomio característico es

$$p(x) = (-1)^{22-1} \cdot x^{22} \cdot \det \begin{pmatrix} 2x^{-10} - 1 & 0 \\ a_{22,1} & x^{-5} - 1 \end{pmatrix} = -x^7 \cdot (2 - x^{10}) \cdot (1 - x^5),$$

y la mayor raíz real es $x = \sqrt[10]{2}$

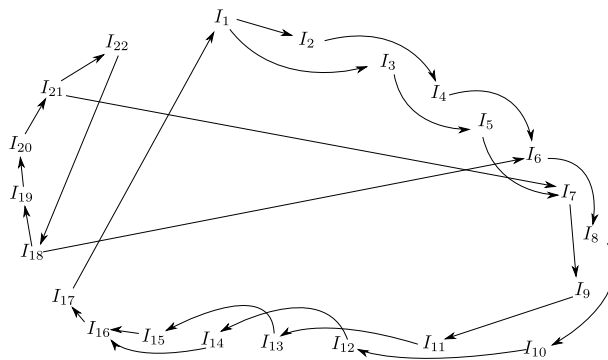
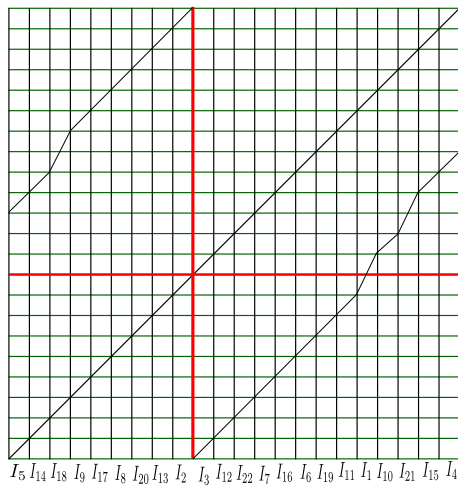
$$\text{Luego } h_{top}(\underline{\alpha}_-, \underline{\beta}_+) = \frac{\log(2)}{Per(\alpha)} = \frac{1}{10} \log(2)$$

• Si $k = 6 = 2 \cdot 3 = k_1 \cdot k_2$, o sea $k_1 = 2$, $k_2 = 3$ y $t_2 = 5$ entonces $p^k = p^6$ genera la sucesión $a = \underline{01011}$ de período 5, esta sucesión genera a $\alpha = \underline{a}_- \underline{b}_+ = \underline{0101011011}$ de período 10 Así

$$\underline{\alpha}_- \underline{\beta} = 010101\underline{1010110110}$$

$$\underline{\beta}_+ \underline{\alpha} = 110110\underline{1011010101}$$

Así tenemos el siguiente gráfico con su respectivo grafo



Del grafo tenemos que la Roma es $R = \{I_1, I_{22}\}$, $a_{1,1} = 2x^{-10}$, $a_{22,22} = x^{-5}$ y el polinomio característico es

$$p(x) = (-1)^{22-1} \cdot x^{22} \cdot \det \begin{pmatrix} 2x^{-10} - 1 & 0 \\ a_{22,1} & x^{-5} - 1 \end{pmatrix} = -x^7 \cdot (2 - x^{10}) \cdot (1 - x^5),$$

y la mayor raíz real es $x = \sqrt[10]{2}$

$$\text{Luego } h_{top}(\alpha_{-\underline{\beta}}, \beta_{+\underline{\alpha}}) = \frac{\log(2)}{Per(\alpha)} = \frac{1}{10} \log(2)$$

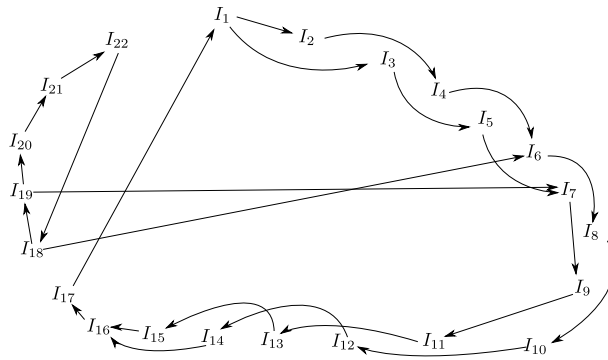
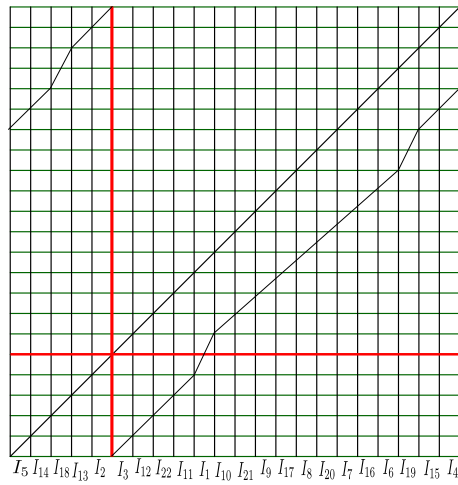
• Si $k = 8 = 2 \cdot 4 = k_1 \cdot k_2$, o sea $k_1 = 2$, $k_2 = 4$ y $t_2 = 5$, entonces $p^k = p^8$ genera la sucesión $a = \underline{01}_4$ de período 5, esta sucesión genera a $\alpha = \underline{a_- b_+} = \underline{01_3 01_5}$ de período 10

Así

$$\alpha_{-\underline{\beta}} = 01_3 01_1 1_3 01_5 0$$

$$\beta_{+\underline{\alpha}} = 1_5 01_4 01_3 01$$

Así tenemos el siguiente gráfico con su respectivo grafo



Del grafo tenemos que la Roma es $R = \{I_1, I_{22}\}$, $a_{1,1} = 2x^{-10}$, $a_{22,22} = x^{-5}$ y el polinomio característico es

$$p(x) = (-1)^{22-1} \cdot x^{22} \cdot \det \begin{pmatrix} 2x^{-10} - 1 & 0 \\ a_{22,1} & x^{-5} - 1 \end{pmatrix} = -x^7 \cdot (2 - x^{10}) \cdot (1 - x^5),$$

y la mayor raíz real es $x = \sqrt[10]{2}$

$$\text{Luego } h_{top}(\underline{\alpha}_-, \beta_+ \underline{\alpha}) = \frac{\log(2)}{Per(\alpha)} = \frac{1}{10} \log(2)$$

Sea $t = 10 = 5 \cdot 2$ o sea $k_1 = 5$, $t_2 = 2$.

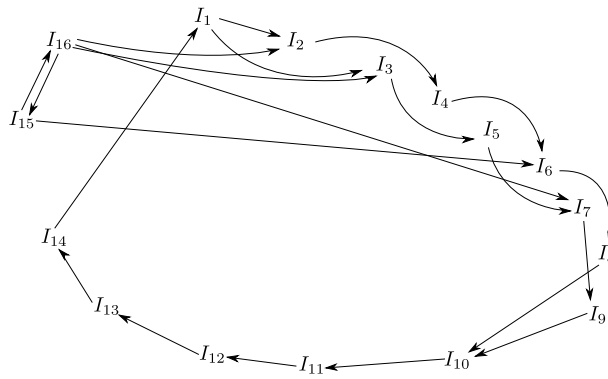
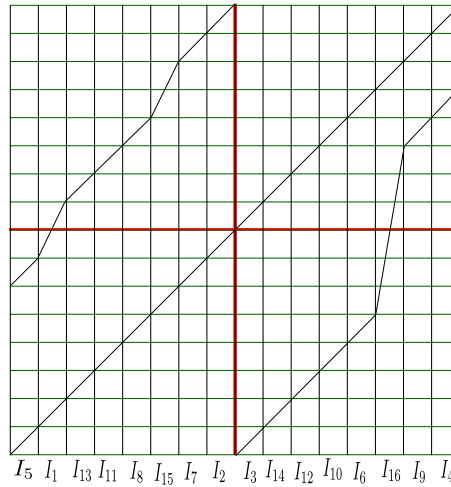
• Si $k = 5 = 5 \cdot 1 = k_1 \cdot k_2$, o sea $k_1 = 5$, $k_2 = 1$ entonces $p^k = p^5$ genera la sucesión $a = \underline{01}$ de período 2, esta sucesión genera a $\alpha_1 = \underline{a_- b_+ a^3} = \underline{0011010101}$ y $\alpha_2 = \underline{a_- b^3 b_+} = \underline{0010101011}$ ambas de período 10 Así

Si $\alpha_1 = \underline{a_- b_+ a^3} = \underline{0011010101}$, entonces

$$\alpha_- \underline{\beta} = 0_2 \underline{1101010_2 1_2 0}$$

$$\beta_+ \underline{\alpha} = 1_2 \underline{01010101001}$$

Así tenemos el siguiente gráfico con su respectivo grafo



Del grafo tenemos que la Roma es $R = \{I_1, I_{16}\}$, $a_{1,1} = 2x^{-10}$, $a_{16,16} = x^{-2}$ y el polinomio característico es

$$p(x) = (-1)^{16-1} \cdot x^{16} \cdot \det \begin{pmatrix} 2x^{-10} - 1 & 0 \\ a_{16,1} & x^{-2} - 1 \end{pmatrix} = -x^4 \cdot (2 - x^{10}) \cdot (1 - x^2),$$

y la mayor raíz real es $x = \sqrt[10]{2}$

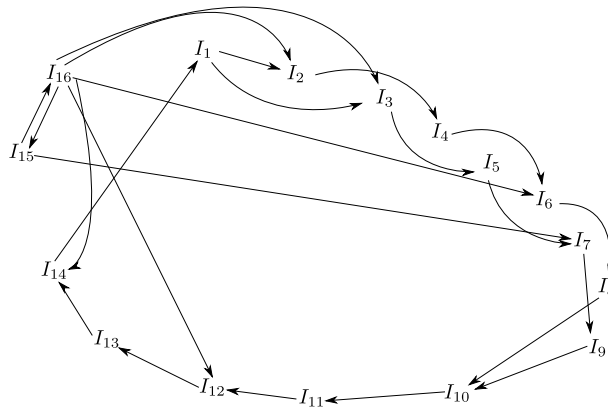
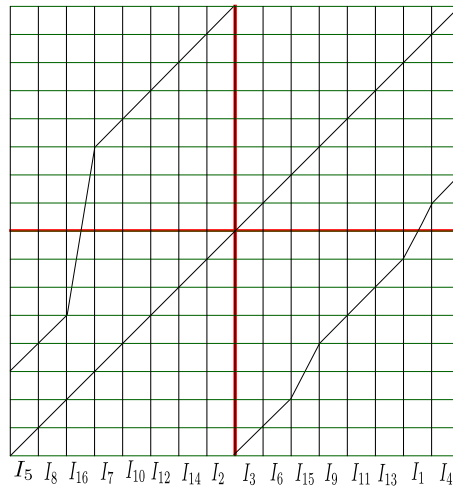
$$\text{Luego } h_{top}(\underline{\alpha}_-, \underline{\beta}_+) = \frac{\log(2)}{Per(\alpha)} = \frac{1}{10} \log(2)$$

Si $\alpha_2 = \underline{a_- b^3 b_+} = \underline{0010101011}$, entonces

$$\underline{\alpha_- \beta} = 0_2 \underline{101010101110}$$

$$\underline{\beta_+ \alpha} = 1_2 \underline{0010101011001}$$

Así tenemos el siguiente gráfico con su respectivo grafo



Del grafo tenemos que la Roma es $R = \{I_1, I_{16}\}$, $a_{1,1} = 2x^{-10}$, $a_{16,16} = x^{-2}$ y el polinomio característico es

$$p(x) = (-1)^{16-1} \cdot x^{16} \cdot \det \begin{pmatrix} 2x^{-10} - 1 & 0 \\ a_{16,1} & x^{-2} - 1 \end{pmatrix} = -x^4 \cdot (2 - x^{10}) \cdot (1 - x^2),$$

y la mayor raíz real es $x = \sqrt[10]{2}$

$$\text{Luego } h_{top}(\alpha_{-\underline{\beta}}, \beta_{+\underline{\alpha}}) = \frac{\log(2)}{Per(\alpha)} = \frac{1}{10} \log(2).$$

Hechos ya una cantidad suficiente de casos particulares que verifican el resultado vamos a probar el caso general. Sea entonces $t = k_1 \cdot t_2$ y $k = k_1 \cdot k_2$, con k_2 y t_2 primos relativos $k_1 \geq 2$.

Suponemos k divide a $t - 2$. En este caso sea $s = \frac{t-2}{k} \in \mathbb{N}$. Tenemos $s \cdot k = t - 2$ o $2 = t - s \cdot k = k_1 \cdot t_2 - s \cdot k_1 \cdot k_2 = k_1(t_2 - s \cdot k_2)$. Como $k_1 \geq 2$ debe ser $k_1 = 2$, $t_2 - s k_2 = 1$, esto es $t_2 = s k_2 + 1$

En este caso $p^k = p^{2k_2}$ genera la sucesión $a = \underline{0_{m+1}1(0_m1)_n}$ de período $m+2+(m+1) \cdot n = (m+1)(n+1) + 1$, con $m+1 = \frac{t-2}{k}$, $n+1 = k_2$, o sea de período $s \cdot k_2 + 1 = t_2$.

La sucesión a genera a la sucesión $\alpha = \underline{a_-b_+}$ de período $2per(a) = 2t_2 = t$

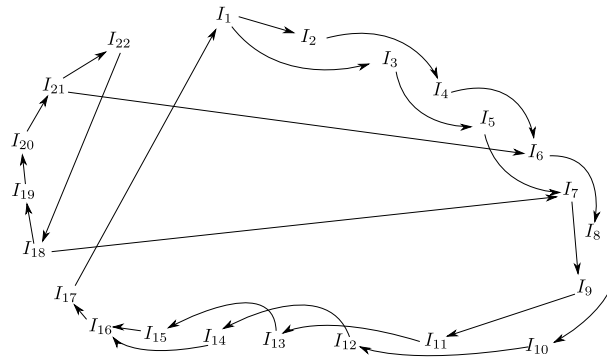
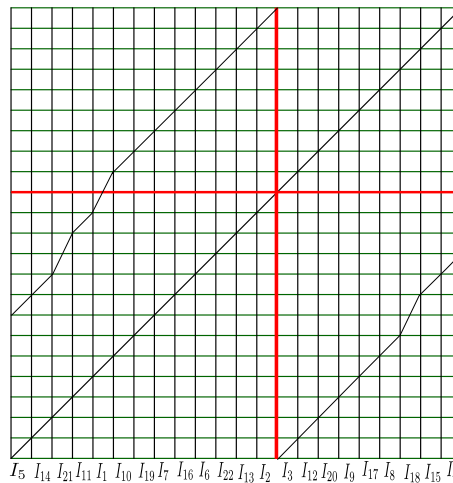
Caso $n = 1$ (y esto es $k_2 = 2$)

• Si $m = 1$, tenemos $a = \underline{00101}$, entonces $\alpha = \underline{0010010101}$

$\alpha_- \underline{\beta} = 0010010100101010$

$\beta_+ \underline{\alpha} = 1010100101001001$

El gráfico asociado con su respectivo grafo es:



Del grafo tenemos que la Roma es $R = \{I_1, I_{22}\}$, $a_{1,1} = 2x^{-10}$, $a_{22,22} = x^{-5}$ y el polinomio característico es

$$p(x) = (-1)^{22-1} \cdot x^{22} \cdot \det \begin{pmatrix} 2x^{-10} - 1 & 0 \\ a_{22,1} & x^{-5} - 1 \end{pmatrix} = -x^7 \cdot (2 - x^{10}) \cdot (1 - x^5),$$

y la mayor raíz real es $x = \sqrt[10]{2}$

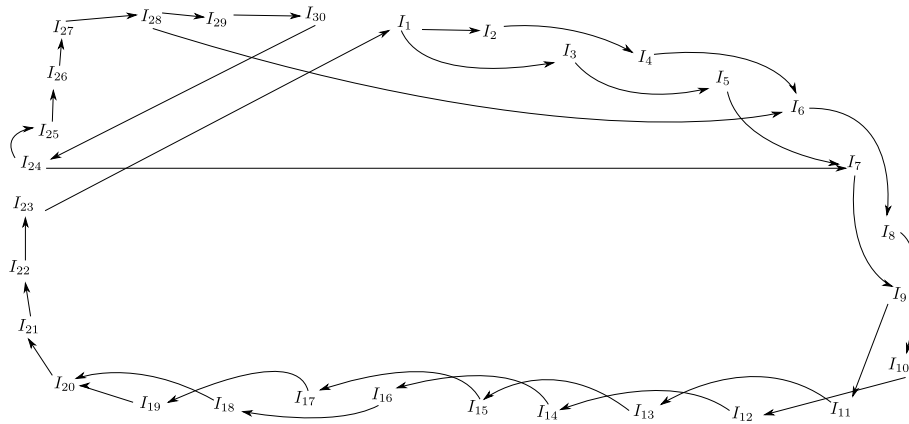
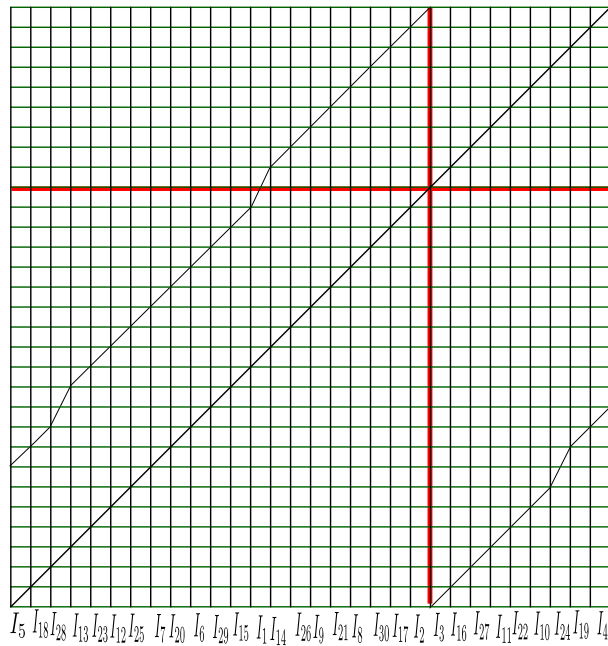
Luego $h_{top}(\underline{\alpha-\beta}, \underline{\beta+\alpha}) = \frac{\log(2)}{Per(\alpha)} = \frac{1}{10} \log(2)$

• $m = 2$. En este caso $a = \underline{0001001}$ y $\alpha = \underline{0_3 10_3 10_2 10_2 1}$ tenemos

$\underline{\alpha-\beta} = 0_3 10_3 \underline{10_2 10_3 10_2 10_2 10}$

$\underline{\beta+\alpha} = 10_2 10_2 \underline{100_2 10_2 10_3 10_3 1}$

El gráfico asociado con su respectivo grafo es:



Del grafo tenemos que la Roma es $R = \{I_1, I_{30}\}$, $a_{1,1} = 2x^{-14}$, $a_{30,30} = x^{-7}$ y el polinomio característico es

$$p(x) = (-1)^{30-1} \cdot x^{30} \cdot \det \begin{pmatrix} 2x^{-14} - 1 & 0 \\ a_{30,1} & x^{-7} - 1 \end{pmatrix} = -x^9 \cdot (2 - x^{14}) \cdot (1 - x^7), \text{ y la mayor}$$

raíz real es $x = \sqrt[14]{2}$

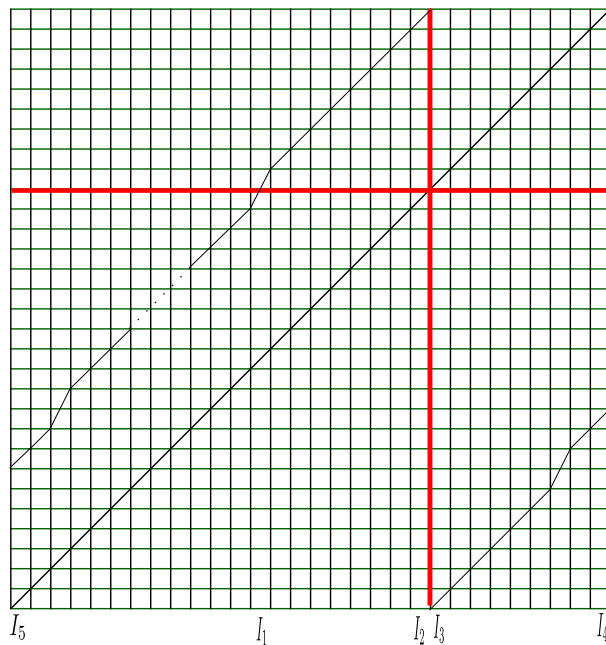
$$\text{Luego } h_{top}(\underline{\alpha-\beta}, \underline{\beta+\alpha}) = \frac{\log(2)}{Per(\alpha)} = \frac{1}{14} \log(2)$$

• En el caso general para m tenemos $a = \underline{0_{m+1}10_m1}$, entonces $\alpha = \underline{a_-b_+}$, $Per(\alpha) = 4m + 6 = t$

$$\underline{\alpha-\beta} = 0_{m+1}10_{m+1}\underline{10_m10_{m+1}10_m10_m10}$$

$$\underline{\beta+\alpha} = 10_m10_m\underline{100_m10_m10_{m+1}10_{m+1}1}$$

El gráfico asociado es:



Del gráfico tenemos que:

I_1 es el intervalo del lado izquierdo de la discontinuidad, más cercano a la discontinuidad que va a dos intervalos $I_1 \rightarrow I_2$ e $I_1 \rightarrow I_3$

I_2 es el intervalo anterior a la discontinuidad, $I_2 \rightarrow I_4$

I_3 es el intervalo posterior a la discontinuidad $I_3 \rightarrow I_5$

I_4 es el último intervalo, $I_4 \rightarrow I_6$

I_5 es el primer intervalo $I_5 \rightarrow I_7$

$I_6 = I_5 + 9$, $I_6 \rightarrow I_8$, $I_8 = I_6 + 8$, $I_8 \rightarrow I_{10}$, $I_{10} = I_8 + 8$

$$I_7 = I_5 + 7, I_7 \rightarrow I_9, I_9 = I_7 + 8, I_9 \rightarrow I_{11}, I_{11} = I_9 + 8$$

Sucesivamente $I_{2m+2} \rightarrow I_{2m+4} = I_{2m+2} + 8, I_{2m+3} \rightarrow I_{2m+5} = I_{2m+3} + 8, I_{2m+4} \rightarrow I_{2m+6} = I_3 + 5$

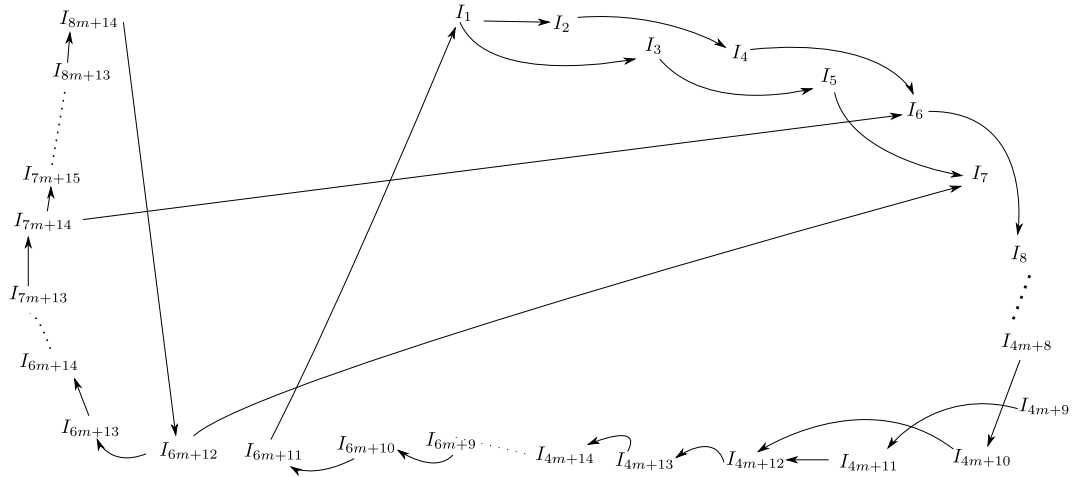
$$I_{2m+5} \rightarrow I_{2m+7} = I_3 + 3, I_{2m+6} \rightarrow I_{2m+8} = I_5 + 5, I_{2m+7} \rightarrow I_{2m+9} = I_5 + 3$$

$I_{2m+8} \rightarrow I_{2m+10} = I_{2m+8} + 8, I_{2m+9} \rightarrow I_{2m+11} = I_{2m+9} + 8, \dots, I_{4m+4} \rightarrow I_{4m+6} = I_{4m+4} + 8, I_{4m+6} \rightarrow I_{4m+8} = I_3 + 1, I_{4m+8} \rightarrow I_{4m+10} = I_5 + 1, I_{4m+10} \rightarrow I_{4m+12} = I_{4m+10} + 7, I_{4m+7} \rightarrow I_{4m+9} = I_{4m+7} + 8, I_{4m+9} \rightarrow I_{4m+11} = I_4 - 1, I_{4m+11} \rightarrow I_{4m+12}, I_{4m+12} \rightarrow I_{4m+13} = I_{4m+12} + 8, \dots I_{6m+11} \rightarrow I_1.$

I_{6m+12} es el intervalo del lado derecho de la discontinuidad que va a dar a dos intervalos $I_{6m+12} \rightarrow I_7$ e $I_{6m+12} \rightarrow I_{6m+13} = I_7 - 1$

$I_{6m+13} \rightarrow I_{6m+14} = I_{6m+13} + 8, \dots I_{7m+11} \rightarrow I_{7m+12} = I_{7m+11} + 8, I_{7m+12} \rightarrow I_{7m+13} = I_3 + 2, I_{7m+13} \rightarrow I_{7m+14} = I_5 + 2, I_{7m+14} \rightarrow I_6$ e $I_{7m+14} \rightarrow I_{7m+15} = I_{7m+14} + 8, I_{7m+15} \rightarrow I_{7m+16} = I_{7m+15} + 8, \dots I_{8m+13} \rightarrow I_{8m+14} = I_{8m+13} + 8, I_{8m+14} \rightarrow I_{6m+12}$

Así tenemos el siguiente grafo



Del grafo tenemos que la Roma es $R = \{I_1, I_{8m+14}\}$, $a_{1,1} = 2x^{-(4m+6)}, a_{8m+14,8m+14} = x^{-(2m+3)}$ y el polinomio característico es

$$\begin{aligned} p(x) &= (-1)^{8m+14-1} \cdot x^{8m+14} \cdot \det \begin{pmatrix} 2x^{-(4m+6)} - 1 & 0 \\ a_{8m+14,1} & x^{-(2m+3)} - 1 \end{pmatrix} \\ &= -x^{2m+5} \cdot (2 - x^{4m+6}) \cdot (1 - x^{2m+3}) \end{aligned}$$

Así la mayor raíz real es $x = \sqrt[4m+6]{2}$

Luego $h_{top}(\alpha_{-\underline{\beta}}, \beta_{+\underline{\alpha}}) = \frac{\log(2)}{Per(\alpha)} = \frac{1}{4n+6} \log(2) = \frac{1}{t} \log(2)$, como queríamos probar.

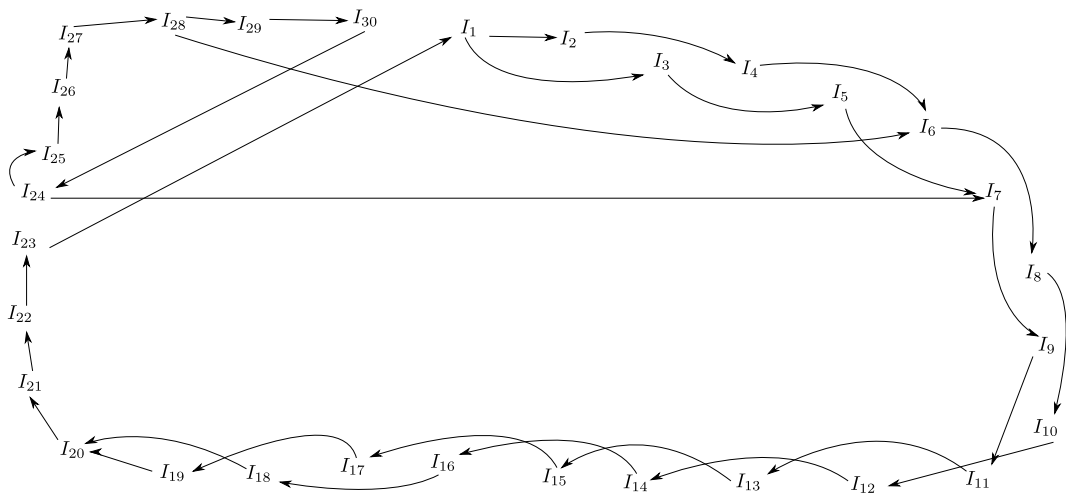
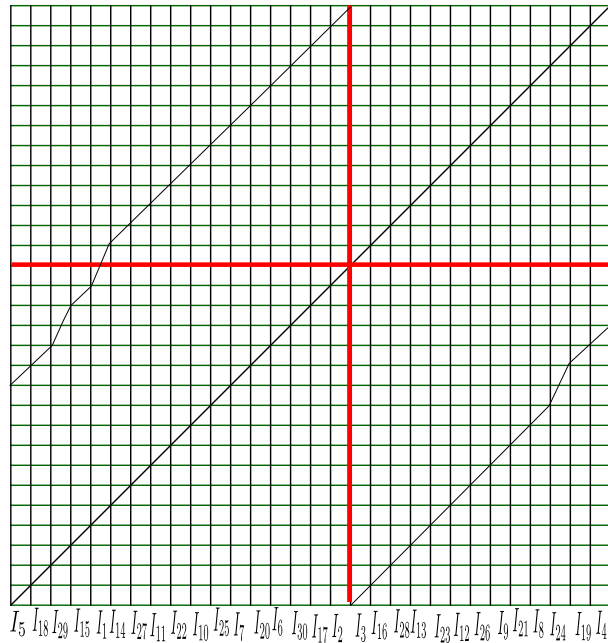
Caso $n = 2$ (así $k_2 = 3$)

• Para $m = 1$ tenemos $a = \underline{0_210101}$, entonces $\alpha = \underline{0_21010_21010101}$

$\alpha_{-\underline{\beta}} = 0_21010_2\underline{101010_210101010}$

$\beta_{+\underline{\alpha}} = 101010100\underline{101010_21010_2}1$

El gráfico asociado con su respectivo grafo es:



Del grafo tenemos que la Roma es $R = \{I_1, I_{30}\}$, $a_{1,1} = 2x^{-14}$, $a_{22,22} = x^{-7}$ y el polinomio

característico es

$$p(x) = (-1)^{30-1} \cdot x^{30} \cdot \det \begin{pmatrix} 2x^{-14} - 1 & 0 \\ a_{30,1} & x^{-7} - 1 \end{pmatrix} = -x^9 \cdot (2 - x^{14}) \cdot (1 - x^7),$$

y la mayor raíz real es $x = \sqrt[14]{2}$

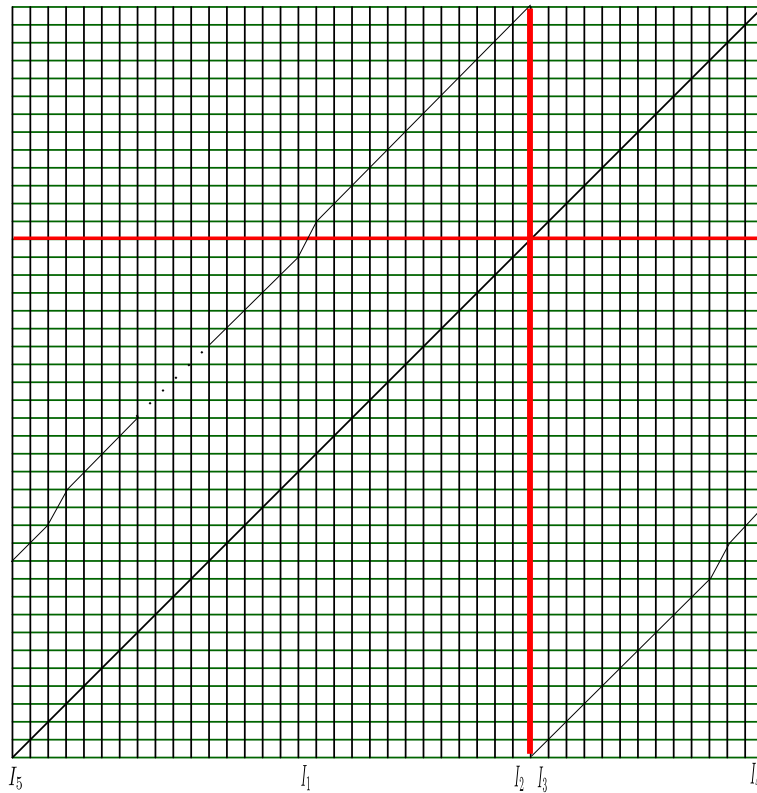
$$\text{Luego } h_{top}(\underline{\alpha}_-, \underline{\beta}_+) = \frac{\log(2)}{Per(\alpha)} = \frac{1}{14} \log(2)$$

• En el caso general para m tenemos $a = \underline{0_{m+1}1(0_m1)_2}$, entonces $\alpha = \underline{a_-b_+}$, $Per(\alpha) = 6m + 8 = t$

$$\underline{\alpha}_- \underline{\beta}_+ = \underline{0_{m+1}10_m10_{m+1}1(0_m1)_20_{m+1}1(0_m1)_30}$$

$$\underline{\beta}_+ \underline{\alpha}_- = \underline{1(0_m1)_30(0_m1)_30_{m+1}10_m10_{m+1}1}$$

El gráfico asociado es:



Del gráfico tenemos que:

I_1 es el intervalo del lado izquierdo de la discontinuidad, más cercano a la discontinuidad que va a dos intervalos $I_1 \rightarrow I_2$ e $I_1 \rightarrow I_3$

I_2 es el intervalo anterior a la discontinuidad, $I_2 \rightarrow I_4$

I_3 es el intervalo posterior a la discontinuidad $I_3 \rightarrow I_5$

I_4 es el último intervalo, $I_4 \rightarrow I_6$

I_5 es el primer intervalo $I_5 \rightarrow I_7$

$I_6 = I_5 + 13$, $I_6 \rightarrow I_8$, $I_8 = I_6 + 12$, $I_7 = I_5 + 11$, $I_7 \rightarrow I_9$, $I_9 = I_7 + 12$

Sucesivamente $I_{2m+2} \rightarrow I_{2m+4} = I_{2m+2} + 12$, $I_{2m+3} \rightarrow I_{2m+5} = I_{2m+3} + 12$, $I_{2m+4} \rightarrow I_{2m+6} = I_4 - 3$

$I_{2m+5} \rightarrow I_{2m+7} = I_3 + 7$, $I_{2m+6} \rightarrow I_{2m+8} = I_5 + 9$, $I_{2m+7} \rightarrow I_{2m+9} = I_5 + 7$

$I_{2m+8} \rightarrow I_{2m+10} = I_{2m+8} + 12$, $I_{2m+9} \rightarrow I_{2m+11} = I_{2m+9} + 12$, \dots , $I_{6m+6} \rightarrow I_{6m+8} = I_{6m+6} + 12$, $I_{6m+8} \rightarrow I_{6m+10} = I_3 + 1$, $I_{6m+10} \rightarrow I_{6m+12} = I_5 + 1$, $I_{6m+12} \rightarrow I_{6m+14} = I_{6m+12} + 11$, $I_{6m+9} \rightarrow I_{6m+11} = I_{6m+9} + 12$, $I_{6m+11} \rightarrow I_{6m+13} = I_4 - 1$, $I_{6m+13} \rightarrow I_{6m+14}$, $I_{6m+14} \rightarrow I_{6m+15} = I_{6m+14} + 12$, \dots $I_{9m+13} \rightarrow I_{9m+14} = I_{9m+13} + 12$, $I_{9m+14} \rightarrow I_1$.

I_{9m+15} es el intervalo del lado derecho de la discontinuidad que va a dar a dos intervalos

$I_{9m+15} \rightarrow I_7$ e $I_{9m+15} \rightarrow I_{9m+16} = I_7 - 1$

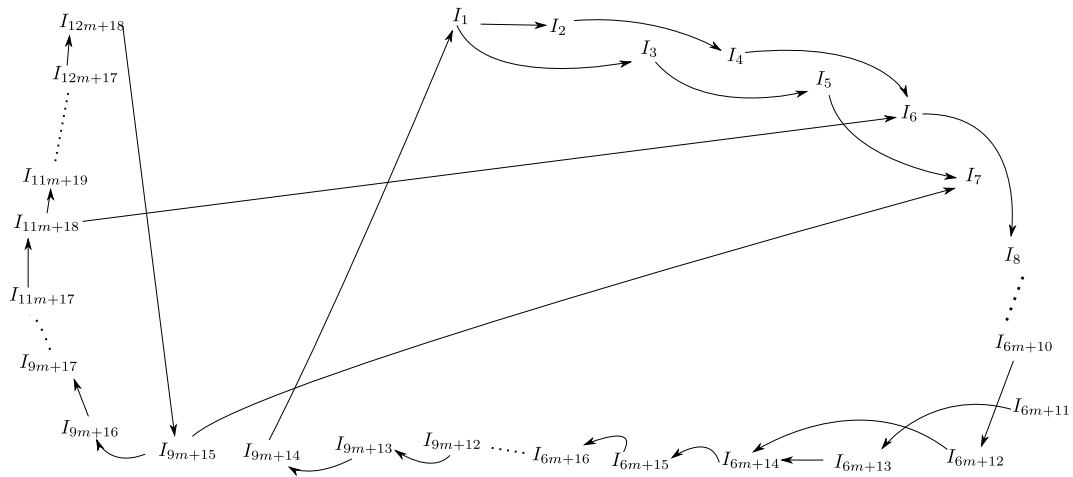
$I_{9m+16} \rightarrow I_{9m+17} = I_{9m+16} + 12$, \dots $I_{10m+14} \rightarrow I_{10m+15} = I_{10m+14} + 12$, $I_{10m+15} \rightarrow$

$I_{10m+16} = I_3 + 6$, $I_{10m+16} \rightarrow I_{10m+17} = I_5 + 6$, $I_{10m+17} \rightarrow I_{10m+18} = I_{10m+17} + 12$, \dots ,

$I_{11m+16} \rightarrow I_{11m+17} = I_3 + 2$, $I_{11m+17} \rightarrow I_{11m+18} = I_5 + 2$, $I_{11m+18} \rightarrow I_6$ e $I_{11m+18} \rightarrow$

$I_{11m+19} = I_{11m+18} + 12$, $I_{11m+19} \rightarrow I_{11m+20} = I_{11m+19} + 12 \dots$ $I_{12m+18} \rightarrow I_{9m+15}$

Así tenemos el siguiente grafo



Del grafo tenemos que la Roma es $R = \{I_1, I_{12m+18}\}$, $a_{1,1} = 2x^{-(6m+8)}$, $a_{12m+18,12m+18} = x^{-(3m+4)}$ y el polinomio característico es

$$\begin{aligned}
p(x) &= (-1)^{12m+18-1} \cdot x^{12m+18} \cdot \det \begin{pmatrix} 2x^{-(6m+8)} - 1 & 0 \\ a_{12m+18,1} & x^{-(3m+4)} - 1 \end{pmatrix} \\
&= -x^{3m+6} \cdot (2 - x^{6m+8}) \cdot (1 - x^{3m+4})
\end{aligned}$$

Así la mayor raíz real es $x = \sqrt[6m+8]{2}$

Luego $h_{top}(\alpha_{-\underline{\beta}}, \beta_{+\underline{\alpha}}) = \frac{\log(2)}{Per(\alpha)} = \frac{1}{6m+8} \log(2) = \frac{1}{t} \log(2)$, como queríamos probar

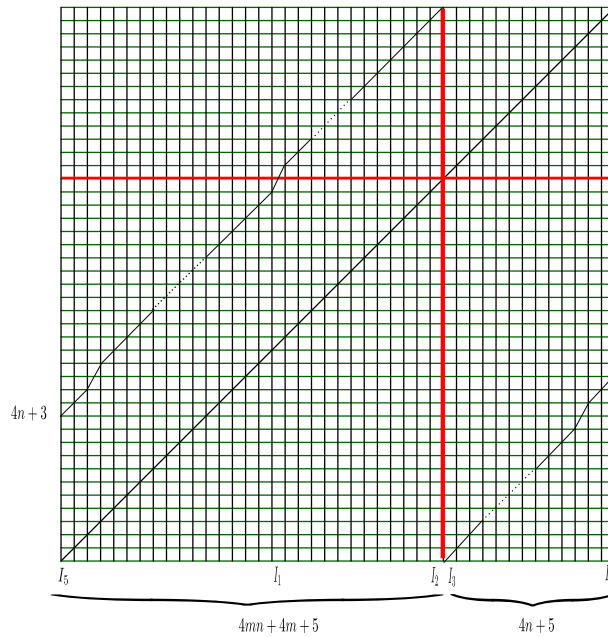
Caso general para n

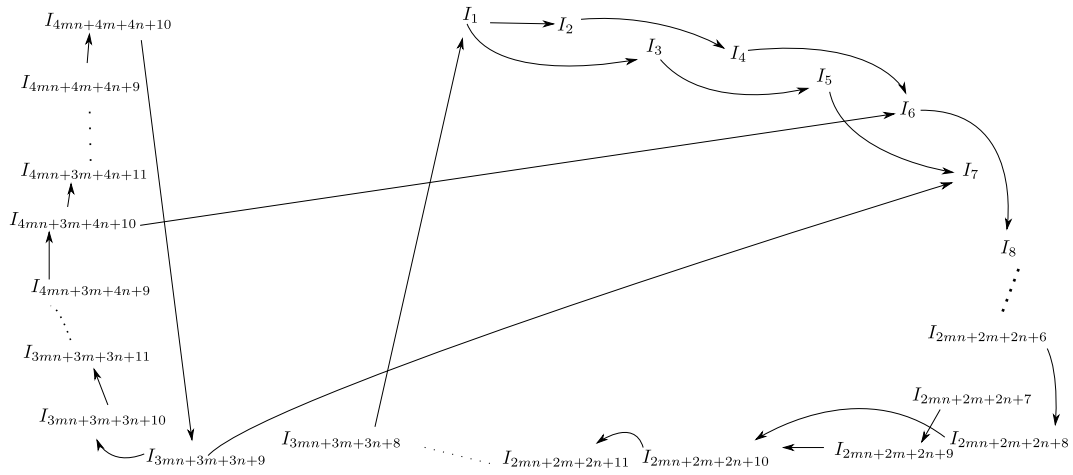
Si $a = \underline{0_{m+1}1(0_m1)_n}$, entonces $\alpha = \underline{a_{-}b_{+}}$, $Per(\alpha) = 2mn + 2m + 2n + 4 = 2 \cdot ((m+1) \cdot (n+1) + 1)$

$$\alpha_{-\underline{\beta}} = 0_{m+1}1(0_m1)_{n-1}0_{m+1}1\underline{(0_m1)_n0_{m+1}1(0_m1)_n0_m10}$$

$$\beta_{+\underline{\alpha}} = 1(0_m1)_n0_m10\underline{(0_m1)_{n+1}0_{m+1}1(0_m1)_{n-1}0_{m+1}1}$$

El gráfico asociado con su respectivo grafo es:





Del grafo tenemos que la Roma es $R = \{I_1, I_{4mn+4m+4n+10}\}$, sea $h = 4mn+4m+4n+10$,

$a_{1,1} = 2x^{-(2mn+2m+2n+4)}$, $a_{h,h} = x^{-(mn+m+n+2)}$ y el polinomio característico es

$$\begin{aligned}
 p(x) &= (-1)^{h-1} \cdot x^h \cdot \det \begin{pmatrix} a_{1,1} - 1 & 0 \\ a_{h,1} & a_{h,h} - 1 \end{pmatrix} \\
 &= -x^{mn+m+n+4} \cdot (2 - x^{2mn+2m+2n+4}) \cdot (1 - x^{mn+m+n+2})
 \end{aligned}$$

Así la mayor raíz real es $x = \sqrt[2mn+2m+2n+4]{2}$

Luego $h_{top}(\underline{\alpha-\beta}, \underline{\beta+\alpha}) = \frac{\log(2)}{Per(\alpha)} = \frac{1}{t} \log(2)$, como queríamos probar.

• Suponemos ahora que k divide a $t - 3$, esto es $s = \frac{t-3}{k} \in \mathbb{N}$. O sea $s \cdot k = t - 3$ y $3 = t - sk = k_1(t_2 - sk_2)$. Como $k_1 \geq 2$ debe ser $k_1 = 3$ y $t_2 - sk_2 = 1$ o $t_2 = sk_2 + 1$.

En este caso $p^k = p^{3k_2}$ genera la sucesión $a = \underline{0_{m+1}1(0_m1)_n}$, de período $(m+1)(n+1)+1$ con $m = \frac{t-3}{k} - 1, n = k_2 - 1$.

La sucesión a genera a las sucesiones $\alpha_1 = \underline{a_b_+a}$ y $\alpha_2 = \underline{a_bb_+}$ de período $3per(a) = 3t_2 = t$

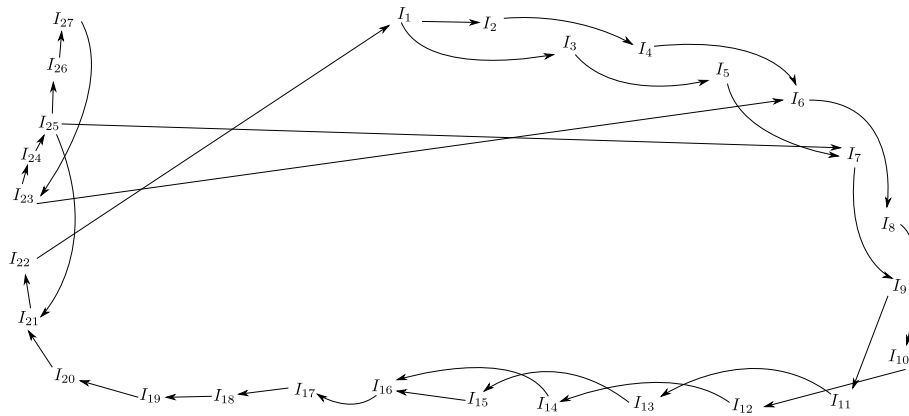
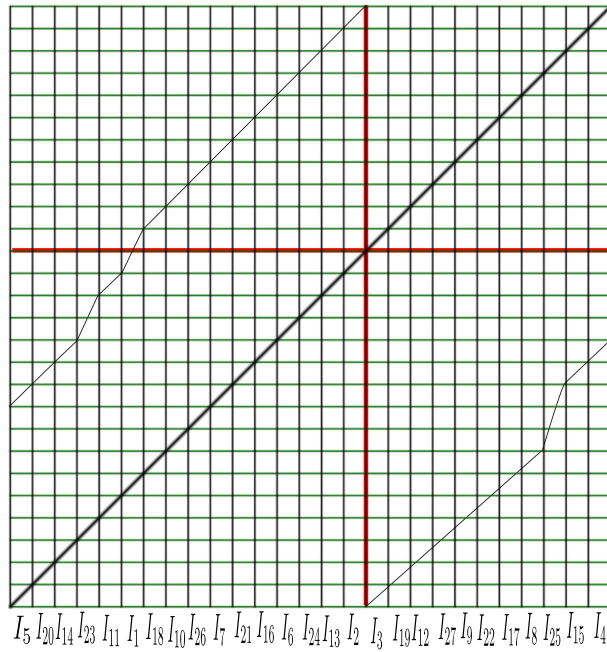
Caso $n = 1$ (y esto es $k_2 = 2$)

En este caso $a = \underline{00101}$ y $\alpha_1 = \underline{001001010100101}$, $Per(\alpha_1) = 15$

$\alpha_-\underline{\beta} = 0010010101001001010$

$\beta_+\underline{\alpha} = 101010010100101001001$

El gráfico asociado con su respectivo grafo es:



Del grafo tenemos que la Roma es $R = \{I_1, I_{27}\}$, $a_{1,1} = 2x^{-15}$, $a_{22,22} = x^{-5}$ y el polinomio característico es

$$p(x) = (-1)^{27-1} \cdot x^{27} \cdot \det \begin{pmatrix} 2x^{-15} - 1 & 0 \\ a_{27,1} & x^{-5} - 1 \end{pmatrix} = x^7 \cdot (2 - x^{15}) \cdot (1 - x^5),$$

y la mayor raíz real es $x = \sqrt[15]{2}$

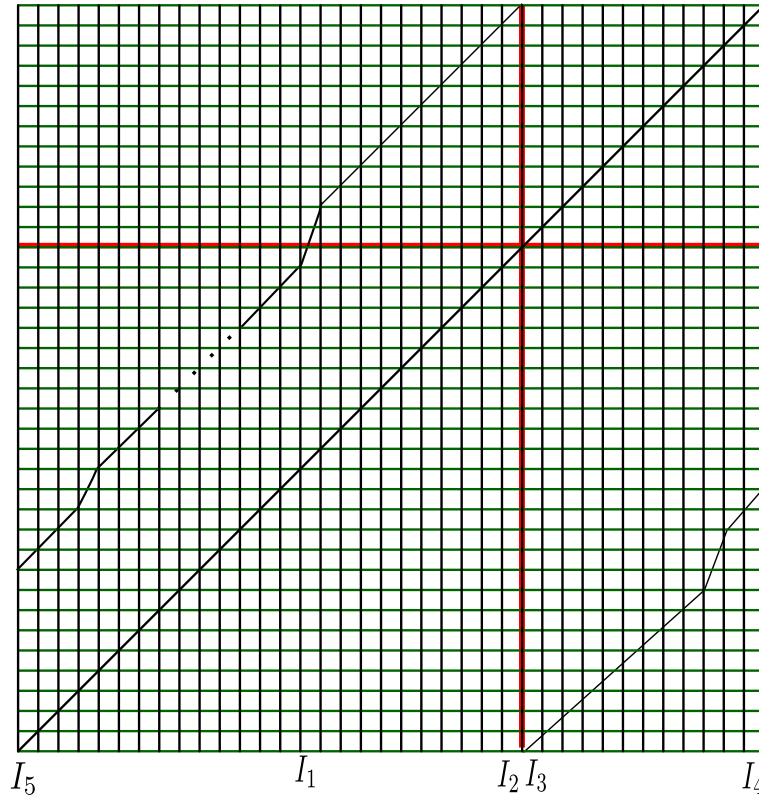
$$\text{Luego } h_{top}(\underline{\alpha}_-, \beta_+ \underline{\alpha}) = \frac{\log(2)}{Per(\underline{\alpha})} = \frac{1}{15} \log(2)$$

• Para el caso general de m , si $a = \underline{0_{m+1}10_m1}$, entonces $\alpha_1 = \underline{a_-b_+a}$, $Per(\alpha_1) = 3(2m + 3) = 6m + 9 = t$

$$\underline{\alpha_- \beta} = \underline{0_{m+1}10_{m+1} \underline{10_m10_m10_{m+1}10_{m+1}10_m10_m10}}$$

$$\beta_{+\underline{\alpha}} = 10_m 10_m 10(0_m 1)_2 0_{m+1} 10_m 1(0_{m+1} 1)_2$$

El gráfico asociado es:



Del gráfico tenemos que:

I_1 es el intervalo del lado izquierdo de la discontinuidad, más cercano a la discontinuidad que va a dos intervalos $I_1 \rightarrow I_2$ e $I_1 \rightarrow I_3$

I_2 es el intervalo anterior a la discontinuidad, $I_2 \rightarrow I_4$

I_3 es el intervalo posterior a la discontinuidad $I_3 \rightarrow I_5$

I_4 es el último intervalo, $I_4 \rightarrow I_6$

I_5 es el primer intervalo $I_5 \rightarrow I_7$

$I_6 = I_5 + 12$, $I_6 \rightarrow I_8$, $I_8 = I_6 + 10$, $I_7 = I_5 + 9$, $I_7 \rightarrow I_9$, $I_9 = I_7 + 10$

Sucesivamente $I_{2m+2} \rightarrow I_{2m+4} = I_{2m+2} + 10$, $I_{2m+3} \rightarrow I_{2m+5} = I_{2m+3} + 10$, $I_{2m+4} \rightarrow I_{2m+6} = I_4 - 3$

$I_{2m+5} \rightarrow I_{2m+7} = I_3 + 4$, $I_{2m+6} \rightarrow I_{2m+8} = I_5 + 7$, $I_{2m+7} \rightarrow I_{2m+9} = I_5 + 4$

$I_{2m+8} \rightarrow I_{2m+10} = I_{2m+8} + 10$, $I_{2m+9} \rightarrow I_{2m+11} = I_{2m+9} + 10$, \dots , $I_{4m+4} \rightarrow I_{4m+6} =$

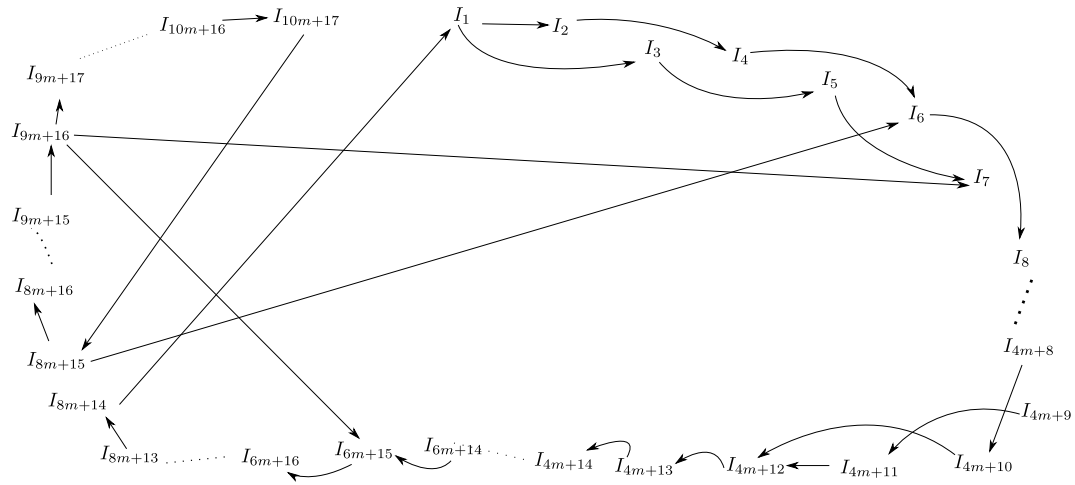
$I_{4m+4} + 10, I_{4m+6} \rightarrow I_{4m+8} = I_3 + 2, I_{4m+8} \rightarrow I_{4m+10} = I_5 + 2, I_{4m+10} \rightarrow I_{4m+12} = I_{4m+10} + 9, I_{4m+7} \rightarrow I_{4m+9} = I_{4m+7} + 10, I_{4m+9} \rightarrow I_{4m+11} = I_4 - 1, I_{4m+11} \rightarrow I_{4m+12}, I_{4m+12} \rightarrow I_{4m+13} = I_{4m+12} + 10, \dots I_{8m+14} \rightarrow I_1.$

I_{8m+15} es el otro intervalo del lado izquierdo de la discontinuidad que va a dar a dos intervalos

$$I_{8m+15} \rightarrow I_6 \text{ e } I_{8m+15} \rightarrow I_{8m+16} = I_{8m+15} + 10$$

$$I_{8m+16} \rightarrow I_{8m+17} = I_{8m+16} + 10, \dots I_{9m+14} \rightarrow I_{9m+15} = I_{9m+14} + 10, I_{9m+15} \rightarrow I_{9m+16} = I_4 - 2, I_{9m+16} \rightarrow I_7, I_{9m+16} \rightarrow I_{6m+15} \text{ e } I_{9m+16} \rightarrow I_{9m+17} = I_5 + 8, I_{9m+17} \rightarrow I_{9m+18} = I_{9m+17} + 10, \dots I_{10m+16} \rightarrow I_{10m+17} = I_{10m+16} + 10, I_{10m+17} \rightarrow I_{8m+15}.$$

Así tenemos el siguiente grafo



Del grafo tenemos que la Roma es $R = \{I_1, I_{10m+17}\}$, $a_{1,1} = 2x^{-(6m+9)}$, $a_{10m+17,10m+17} = x^{-(2m+3)}$ y el polinomio característico es

$$\begin{aligned} p(x) &= (-1)^{10m+17-1} \cdot x^{10m+17} \cdot \det \begin{pmatrix} 2x^{-(6m+9)} - 1 & 0 \\ a_{10m+17,1} & x^{-(2m+3)} - 1 \end{pmatrix} \\ &= x^{2m+5} \cdot (2 - x^{6m+9}) \cdot (1 - x^{2m+3}) \end{aligned}$$

Así la mayor raíz real es $x = \sqrt[6m+9]{2}$

$$\text{Luego } h_{top}(\underline{\alpha}, \underline{\beta}) = \frac{\log(2)}{Per(\underline{\alpha})} = \frac{1}{6m+9} \log(2)$$

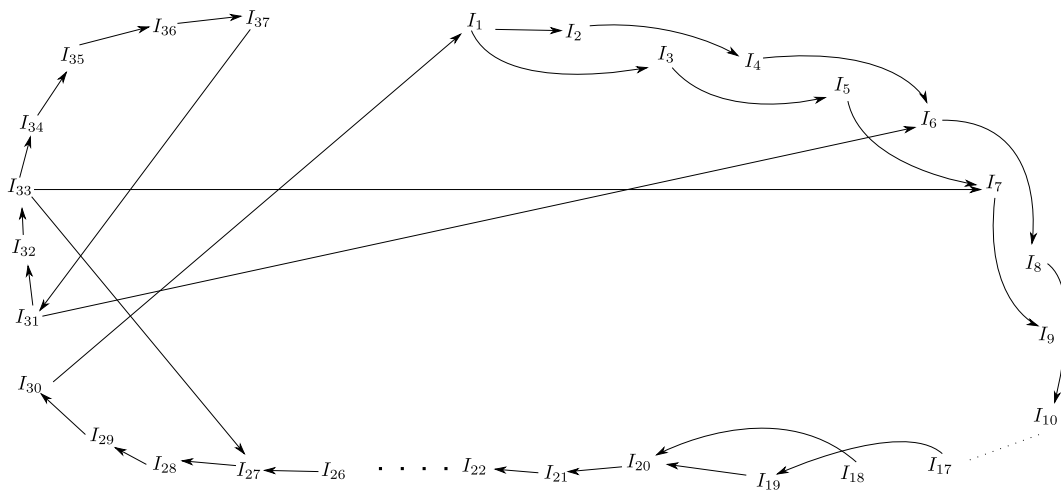
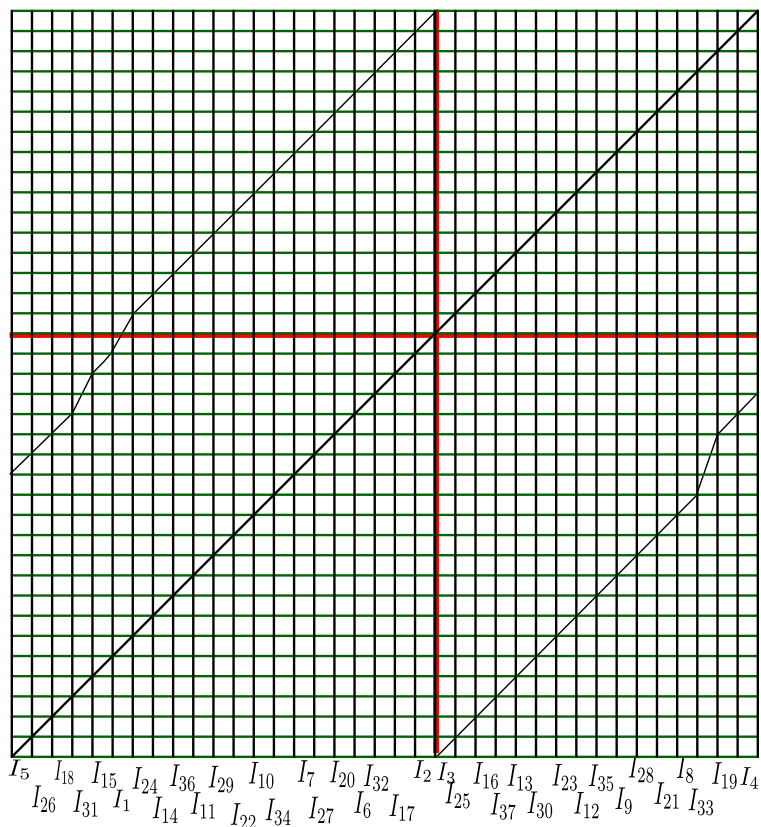
Caso $n = 2$

Para $m = 1$ tenemos $a = \underline{0_210101}$, entonces $\alpha = \underline{0_21010_2101010_210101}$, $Per(\alpha) = 21$

$$\underline{\alpha} - \underline{\beta} = \underline{0_21010_21(01)_30_21010_21(01)_30}$$

$$\beta_+\alpha = 10101010(01)_3 0_2 1(01)_2 0_2 1010_2 1$$

El gráfico asociado con su respectivo grafo es:



Del grafo tenemos que la Roma es $R = \{I_1, I_{37}\}$, $a_{1,1} = 2x^{-21}$, $a_{37,37} = x^{-7}$ y el polinomio característico es

$$p(x) = (-1)^{37-1} \cdot x^{37} \cdot \det \begin{pmatrix} 2x^{-21} - 1 & 0 \\ a_{37,1} & x^{-7} - 1 \end{pmatrix} = x^9 \cdot (2 - x^{21}) \cdot (1 - x^7), \text{ y la mayor}$$

raíz real es $x = \sqrt[3]{2}$

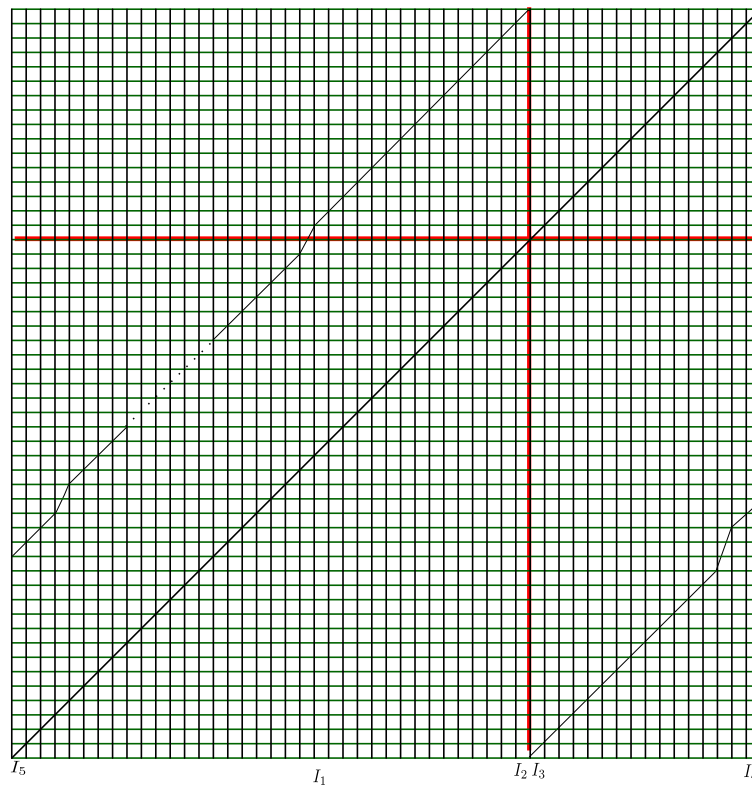
$$\text{Luego } h_{top}(\underline{\alpha-\beta}, \beta_+\underline{\alpha}) = \frac{\log(2)}{Per(\alpha)} = \frac{1}{21} \log(2)$$

• Para el caso general de m tenemos $a = \underline{0_{m+1}1(0_m1)_2}$, entonces $\alpha_1 = \underline{a_-b_+a}$, $Per(\alpha) = 9m + 12 = t$

$$\underline{\alpha-\beta} = 0_{m+1}10_m10_{m+1}1\underline{(0_m1)_3}0_{m+1}10_m10_{m+1}1(0_m1)_30$$

$$\beta_+\underline{\alpha} = 1(0_m1)_30\underline{(0_m1)_3}0_{m+1}1(0_m1)_20_{m+1}10_m10_{m+1}1$$

El gráfico asociado es:



Del gráfico tenemos que:

I_1 es el intervalo del lado izquierdo de la discontinuidad, más cercano a la discontinuidad que va a dos intervalos $I_1 \rightarrow I_2$ e $I_1 \rightarrow I_3$

I_2 es el intervalo anterior a la discontinuidad, $I_2 \rightarrow I_4$

I_3 es el intervalo posterior a la discontinuidad $I_3 \rightarrow I_5$

I_4 es el último intervalo, $I_4 \rightarrow I_6$

I_5 es el primer intervalo $I_5 \rightarrow I_7$

$I_6 = I_5 + 17$, $I_6 \rightarrow I_8$, $I_8 = I_6 + 15$, $I_7 = I_5 + 14$, $I_7 \rightarrow I_9$, $I_9 = I_7 + 15$

Sucesivamente $I_{2m+2} \rightarrow I_{2m+4} = I_{2m+2} + 15$, $I_{2m+3} \rightarrow I_{2m+5} = I_{2m+3} + 15$, $I_{2m+4} \rightarrow I_{2m+6} = I_4 - 3$

$I_{2m+5} \rightarrow I_{2m+7} = I_3 + 9$, $I_{2m+6} \rightarrow I_{2m+8} = I_5 + 12$, $I_{2m+7} \rightarrow I_{2m+9} = I_5 + 9$

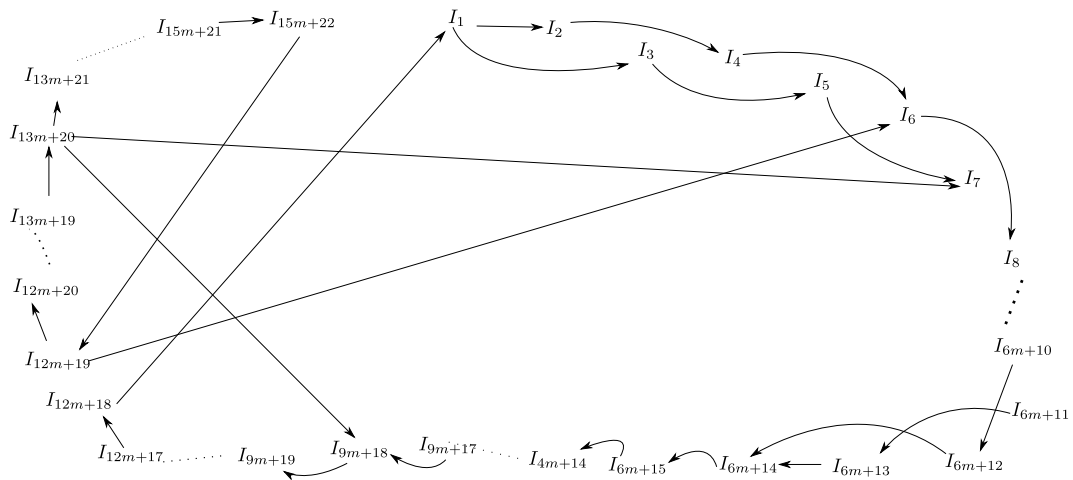
$I_{2m+8} \rightarrow I_{2m+10} = I_{2m+8} + 15$, $I_{2m+9} \rightarrow I_{2m+11} = I_{2m+9} + 15$, \dots , $I_{6m+6} \rightarrow I_{6m+8} = I_{6m+6} + 15$, $I_{6m+7} \rightarrow I_{6m+9} = I_{6m+7} + 15$, $I_{6m+8} \rightarrow I_{6m+10} = I_3 + 2$, $I_{6m+9} \rightarrow I_{6m+11} = I_{6m+9} + 15$, $I_{6m+10} \rightarrow I_{6m+12} = I_5 + 3$, $I_{6m+11} \rightarrow I_{6m+13} = I_4 - 1$, $I_{6m+12} \rightarrow I_{6m+14} = I_{6m+12} + 14$, $I_{6m+13} \rightarrow I_{6m+14}$, $I_{6m+14} \rightarrow I_{6m+15} = I_{6m+14} + 15$, \dots $I_{12m+17} \rightarrow I_{12m+18} = I_{12m+17} + 15$, $I_{12m+18} \rightarrow I_1$.

I_{12m+19} es el otro intervalo del lado izquierdo de la discontinuidad que va a dar a dos intervalos

$I_{12m+19} \rightarrow I_6$ e $I_{12m+19} \rightarrow I_{12m+20} = I_{12m+19} + 15$

$I_{12m+20} \rightarrow I_{12m+21} = I_{12m+20} + 15$, \dots $I_{13m+18} \rightarrow I_{13m+19} = I_{13m+18} + 15$, $I_{13m+19} \rightarrow I_{13m+20} = I_4 - 3$, $I_{13m+20} \rightarrow I_7$, $I_{13m+20} \rightarrow I_{9m+18}$ e $I_{13m+20} \rightarrow I_{13m+21} = I_7 - 1$, $I_{13m+21} \rightarrow I_{13m+22} = I_{13m+21} + 15$ \dots , $I_{15m+20} \rightarrow I_{15m+21} = I_{15m+20} + 15$, $I_{15m+21} \rightarrow I_{15m+22} = I_3 + 3$, $I_{15m+22} \rightarrow I_{12m+19}$

Así tenemos el siguiente grafo



Del grafo tenemos que la Roma es $R = \{I_1, I_{15m+22}\}$, $a_{1,1} = 2x^{-(9m+12)}$, $a_{15m+22,15m+22} =$

$x^{-(3m+4)}$ y el polinomio característico es

$$p(x) = (-1)^{15m+22-1} \cdot x^{15m+22} \cdot \det \begin{pmatrix} 2x^{-(9m+12)} - 1 & 0 \\ a_{15m+22,1} & x^{-(3m+4)} - 1 \end{pmatrix}$$

$$= (-1)^{15m+21} x^{3m+6} \cdot (2 - x^{9m+12}) \cdot (1 - x^{3m+4})$$

Así la mayor raíz real es $x = \sqrt[9m+12]{2}$

$$\text{Luego } h_{top}(\underline{\alpha-\beta}, \underline{\beta+\alpha}) = \frac{\log(2)}{Per(\alpha)} = \frac{1}{9m+12} \log(2)$$

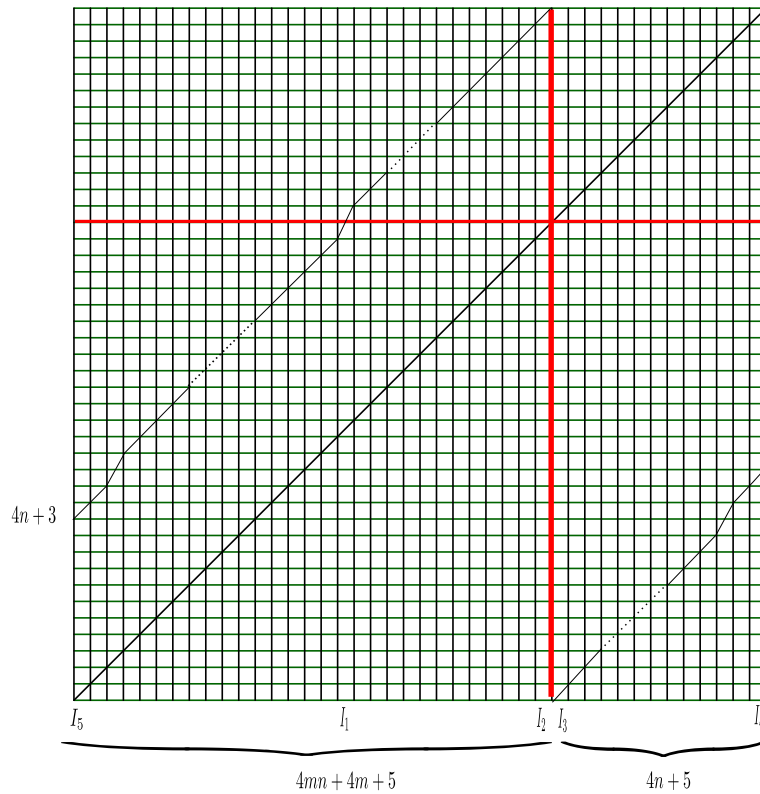
Caso general para n

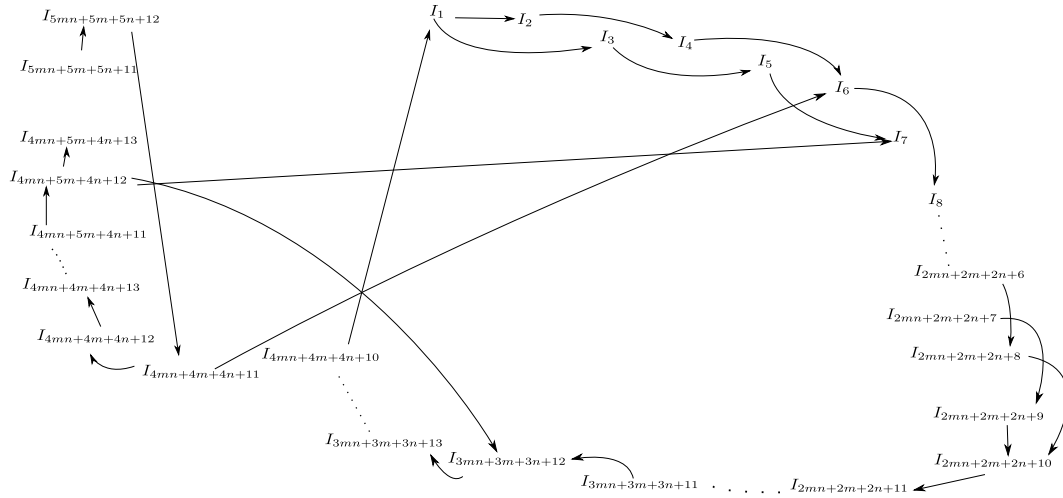
Si $a = \underline{0_{m+1}1(0_m1)_n}$, entonces $\alpha_1 = \underline{a-b+a}$, $Per(\alpha) = 3mn + 3m + 3n + 6 = 3((m+1)(n+1) + 1)$

$$\underline{\alpha-\beta} = \underline{0_{m+1}1(0_m1)_{n-1}0_{m+1}1(0_m1)_{n+1}0_{m+1}1(0_m1)_{n-1}0_{m+1}1(0_m1)_{n+1}0}$$

$$\underline{\beta+\alpha} = \underline{1(0_m1)_{n+1}0(0_m1)_{n+1}0_{m+1}1(0_m1)_n0_{m+1}1(0_m1)_{n-1}0_{m+1}1}$$

El gráfico asociado con su respectivo grafo es:





Del grafo tenemos que la Roma es $R = \{I_1, I_{5mn+5m+5n+12}\}$, sea $h = 5mn + 5m + 5n + 12$,

$a_{1,1} = 2x^{-(3mn+3m+3n+6)}$, $a_{h,h} = x^{-(mn+m+n+2)}$ y el polinomio característico es

$$\begin{aligned}
 p(x) &= (-1)^{h-1} \cdot x^h \cdot \det \begin{pmatrix} a_{1,1} - 1 & 0 \\ a_{h,1} & a_{h,h} - 1 \end{pmatrix} \\
 &= (-1)^{h-1} x^{mn+m+n+4} \cdot (2 - x^{3mn+3m+3n+6}) \cdot (1 - x^{mn+m+n+2})
 \end{aligned}$$

Así la mayor raíz real es $x = \sqrt[3mn+3m+3n+6]{2}$

$$\text{Luego } h_{top}(\underline{\alpha}, \underline{\beta}, \underline{\alpha}) = \frac{\log(2)}{Per(\alpha)} = \frac{1}{3(m+1)(n+1)+1} \log(2)$$

Análogamente se prueba para $\alpha_2 = \underline{a} \underline{b} \underline{b}_+$, en todos los casos.

• Suponemos ahora que k divide a $t - 4$ entonces, $k_1 = 4$ o $k_1 = 2$

Si $k_1 = 4$ entonces p^k genera a $a = \underline{0_{m+1}1(0_m1)_n}$, donde $m = \frac{t-4}{k} - 1$ y $n = k_2 - 1$. a genera a $\alpha_1 = \underline{a} \underline{b}_+ \underline{a}^2$ y $\alpha_2 = \underline{a} \underline{b}^2 \underline{b}_+$ con $Per(\alpha_1) = Per(\alpha_2) = t$

Caso $n = 1$

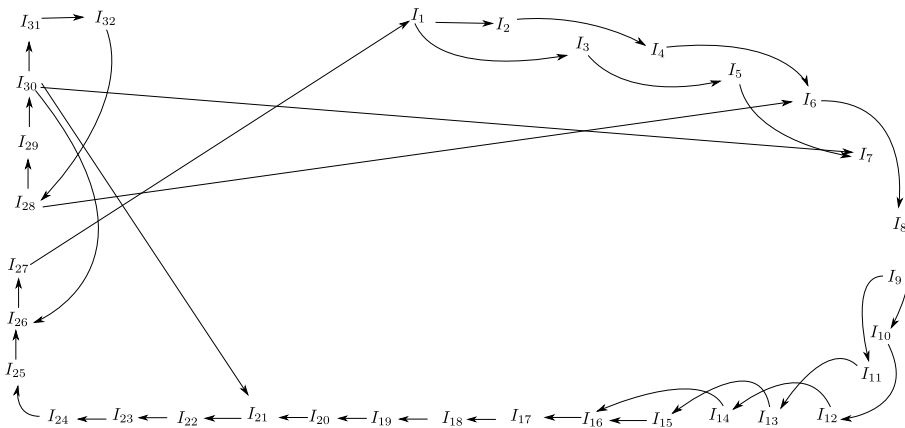
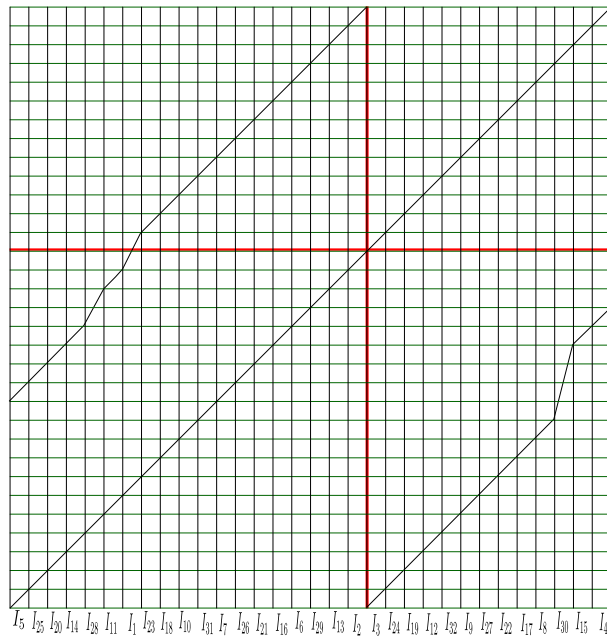
Si $m = 1$, tenemos $a = \underline{00101}$, entonces $\alpha = \underline{a} \underline{b}_+ \underline{a}^2 = \underline{00100101010010100101}$,

$$Per(\alpha) = 20$$

$$\underline{\alpha} \underline{\beta} = \underline{00100101010010100100101010}$$

$$\underline{\beta}_+ \underline{\alpha} = \underline{10101001010010100101001001}$$

El gráfico asociado con su respectivo grafo es:



Del grafo tenemos que la Roma es $R = \{I_1, I_{32}\}$, $a_{1,1} = 2x^{-20}$, $a_{32,32} = x^{-5}$ y el polinomio característico es

$$p(x) = (-1)^{32-1} \cdot x^{32} \cdot \det \begin{pmatrix} 2x^{-20} - 1 & 0 \\ a_{32,1} & x^{-5} - 1 \end{pmatrix} = -x^7 \cdot (2 - x^{20}) \cdot (1 - x^5),$$

y la mayor raíz real es $x = \sqrt[20]{2}$

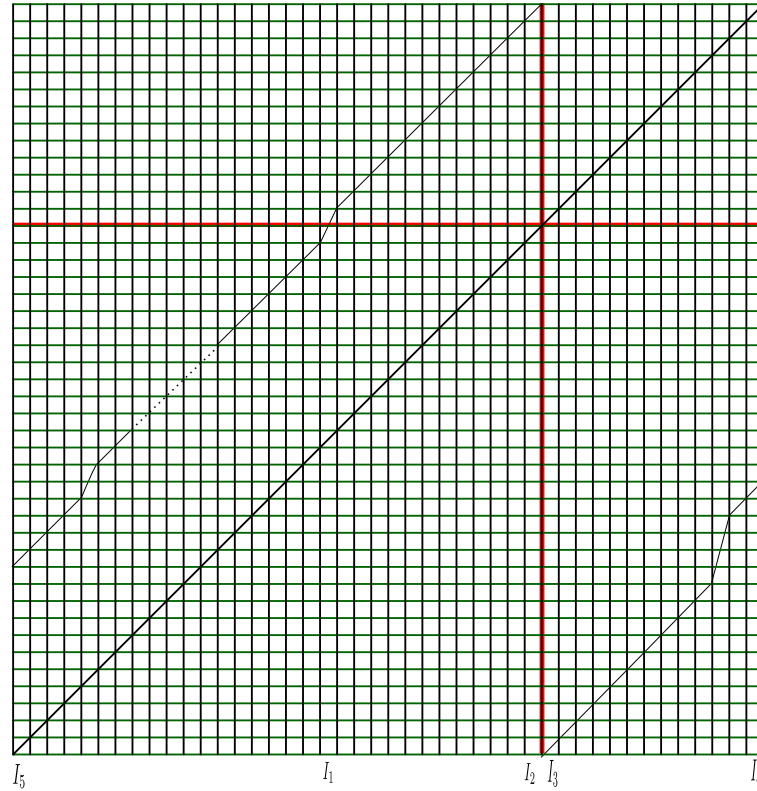
$$\text{Luego } h_{top}(\underline{\alpha}, \underline{\beta}) = \frac{\log(2)}{Per(\alpha)} = \frac{1}{20} \log(2)$$

• Caso general para m , tenemos $a = \underline{0_{m+1}10_m1}$, entonces $\alpha = \underline{a_b+a^2}$, $Per(\alpha) = 8m + 12 = t$

$$\underline{\alpha-\beta} = \underline{0_{m+1}10_{m+1}1(0_m1)_20_{m+1}10_m1(0_{m+1}1)_2(0_m1)_20}$$

$$\beta_{+\underline{\alpha}} = 10_m 10_m 10(0_m 1)_2 0_{m+1} 10_m 10_{m+1} 10_m 1(0_{m+1} 1)_2$$

El gráfico asociado es:



Del gráfico tenemos que:

I_1 es el intervalo del lado izquierdo de la discontinuidad, más cercano a la discontinuidad que va a dos intervalos $I_1 \rightarrow I_2$ e $I_1 \rightarrow I_3$

I_2 es el intervalo anterior a la discontinuidad, $I_2 \rightarrow I_4$

I_3 es el intervalo posterior a la discontinuidad $I_3 \rightarrow I_5$

I_4 es el último intervalo, $I_4 \rightarrow I_6$

I_5 es el primer intervalo $I_5 \rightarrow I_7$

$I_6 = I_5 + 15$, $I_6 \rightarrow I_8$, $I_8 = I_6 + 12$, $I_7 = I_5 + 11$, $I_7 \rightarrow I_9$, $I_9 = I_7 + 12$

Sucesivamente $I_{2m+2} \rightarrow I_{2m+4} = I_{2m+2} + 12$, $I_{2m+3} \rightarrow I_{2m+5} = I_{2m+3} + 12$, $I_{2m+4} \rightarrow I_{2m+6} = I_4 - 3$

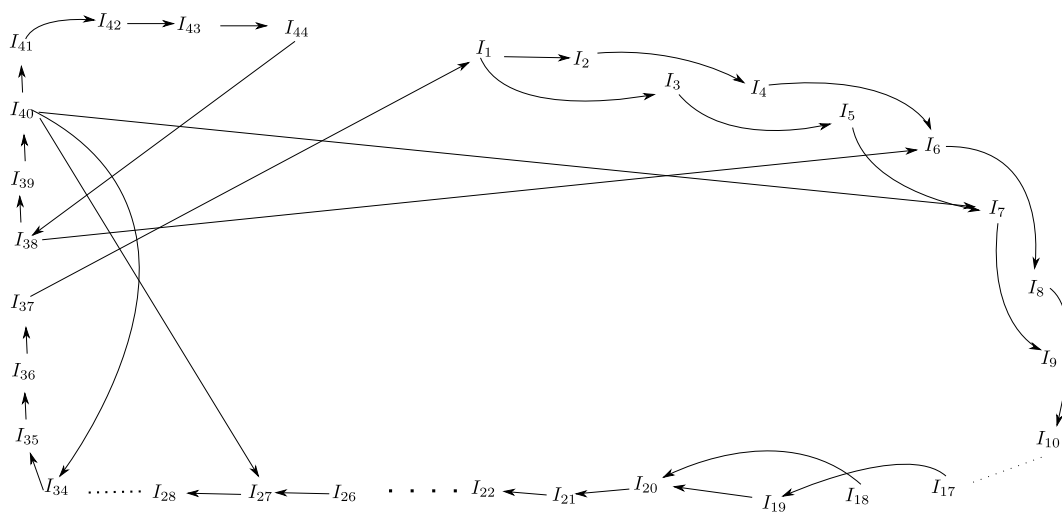
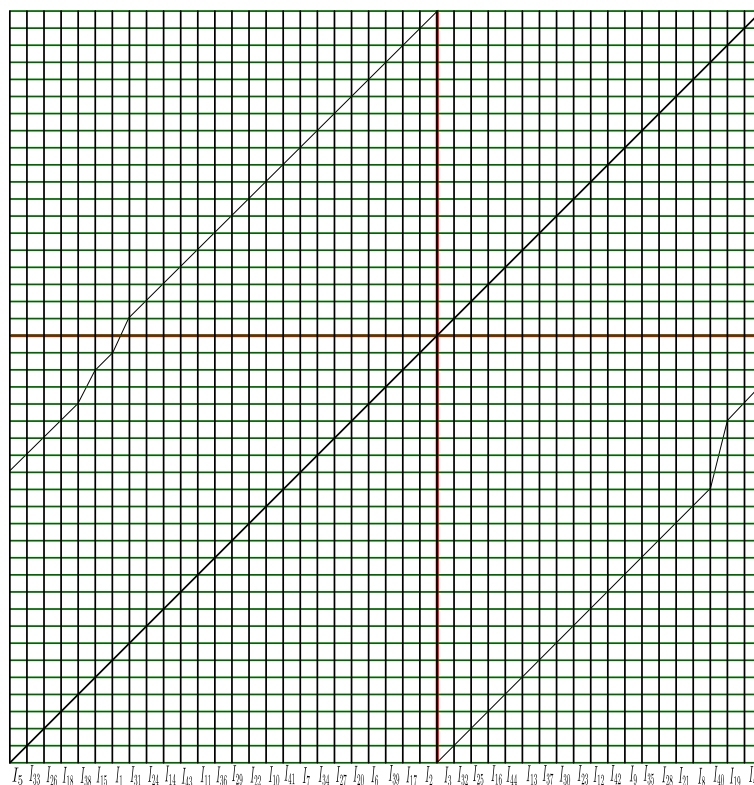
$I_{2m+5} \rightarrow I_{2m+7} = I_3 + 5$, $I_{2m+6} \rightarrow I_{2m+8} = I_5 + 9$, $I_{2m+7} \rightarrow I_{2m+9} = I_5 + 5$

$I_{2m+8} \rightarrow I_{2m+10} = I_{2m+8} + 12$, $I_{2m+9} \rightarrow I_{2m+11} = I_{2m+9} + 12$, \dots , $I_{4m+4} \rightarrow I_{4m+6} =$

$$\alpha_{-\beta} = 0_2 1010_2 1(01)_3 0_2 1(01)_2 0_2 1010_2 1(01)_3 0$$

$$\beta_{+\alpha} = 10101010(01)_3 0_2 1(01)_2 0_2 1(01)_2 0_2 1010_2 1$$

El gráfico asociado con su respectivo grafo es:



Del grafo tenemos que la Roma es $R = \{I_1, I_{44}\}$, $a_{1,1} = 2x^{-28}$, $a_{44,44} = x^{-7}$ y el polinomio característico es

$$p(x) = (-1)^{44-1} \cdot x^{44} \cdot \det \begin{pmatrix} 2x^{-28} - 1 & 0 \\ a_{40,1} & x^{-7} - 1 \end{pmatrix} = -x^9 \cdot (2 - x^{28}) \cdot (1 - x^7), \text{ y la mayor}$$

raíz real es $x = \sqrt[28]{2}$

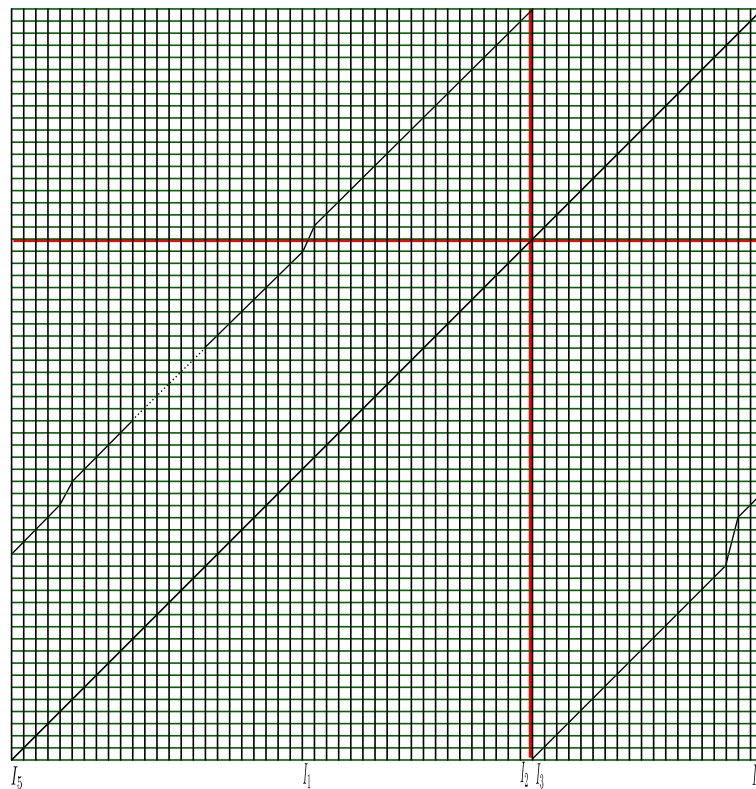
$$\text{Luego } h_{top}(\underline{\alpha-\beta}, \underline{\beta+\alpha}) = \frac{\log(2)}{Per(\alpha)} = \frac{1}{28} \log(2)$$

• Caso general para m , tenemos $a = \underline{0_{m+1}1(0_m1)_2}$, entonces $\alpha = \underline{a_-b_+a^2}$, $Per(\alpha) = 12m + 16 = t$

$$\underline{\alpha-\beta} = 0_{m+1}10_m10_{m+1}1\underline{(0_m1)_3}0_{m+1}1(0_m1)_20_{m+1}10_m10_{m+1}1(0_m1)_30$$

$$\underline{\beta+\alpha} = 1(0_m1)_30\underline{(0_m1)_3}0_{m+1}1(0_m1)_20_{m+1}1(0_m1)_20_{m+1}10_m10_{m+1}1$$

El gráfico asociado es:



Del gráfico tenemos que:

I_1 es el intervalo del lado izquierdo de la discontinuidad, más cercano a la discontinuidad que va a dos intervalos $I_1 \rightarrow I_2$ e $I_1 \rightarrow I_3$

I_2 es el intervalo anterior a la discontinuidad, $I_2 \rightarrow I_4$

I_3 es el intervalo posterior a la discontinuidad $I_3 \rightarrow I_5$

I_4 es el último intervalo, $I_4 \rightarrow I_6$

I_5 es el primer intervalo $I_5 \rightarrow I_7$

$I_6 = I_5 + 21$, $I_6 \rightarrow I_8$, $I_8 = I_6 + 18$, $I_7 = I_5 + 17$, $I_7 \rightarrow I_9$, $I_9 = I_7 + 18$

Sucesivamente $I_{2m+2} \rightarrow I_{2m+4} = I_{2m+2} + 18$, $I_{2m+3} \rightarrow I_{2m+5} = I_{2m+3} + 18$, $I_{2m+4} \rightarrow I_{2m+6} = I_4 - 3$

$I_{2m+5} \rightarrow I_{2m+7} = I_3 + 11$, $I_{2m+6} \rightarrow I_{2m+8} = I_5 + 15$, $I_{2m+7} \rightarrow I_{2m+9} = I_5 + 11$

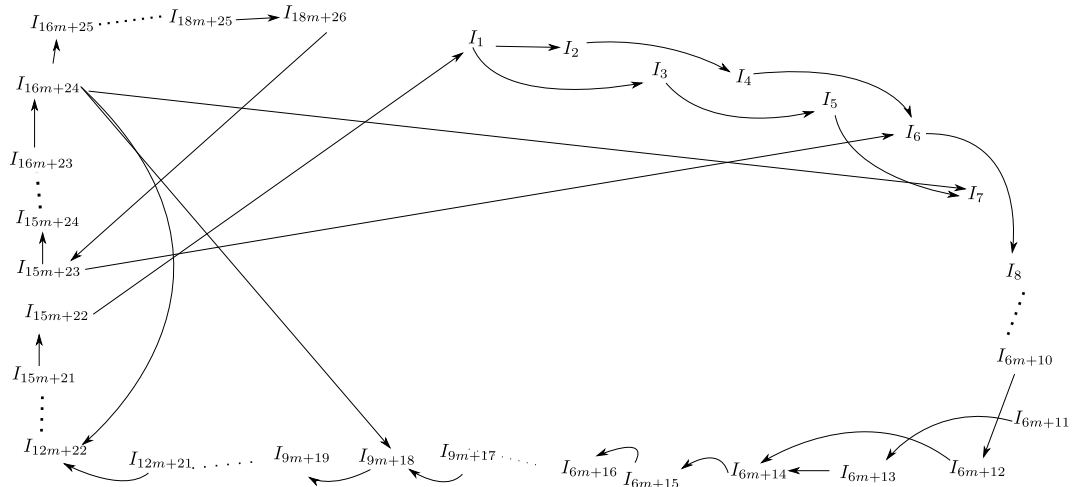
$I_{2m+8} \rightarrow I_{2m+10} = I_{2m+8} + 18$, $I_{2m+9} \rightarrow I_{2m+11} = I_{2m+9} + 18$, \dots , $I_{6m+6} \rightarrow I_{6m+8} = I_{6m+6} + 18$, $I_{6m+8} \rightarrow I_{6m+10} = I_3 + 3$, $I_{6m+9} \rightarrow I_{6m+11} = I_{6m+9} + 18$, $I_{6m+10} \rightarrow I_{6m+12} = I_5 + 3$, $I_{6m+11} \rightarrow I_{6m+13} = I_4 - 1$, $I_{6m+12} \rightarrow I_{6m+14} = I_{6m+12} + 17$, $I_{6m+13} \rightarrow I_{6m+14}$, $I_{6m+14} \rightarrow I_{6m+15} = I_{6m+14} + 18$, \dots , $I_{15m+21} \rightarrow I_{15m+22} = I_3 + 6$, $I_{15m+22} \rightarrow I_1$.

I_{15m+23} es el otro intervalo del lado izquierdo de la discontinuidad que va a dar a dos intervalos

$I_{15m+23} \rightarrow I_6$ e $I_{15m+23} \rightarrow I_{15m+24} = I_{15m+23} + 18$

$I_{15m+24} \rightarrow I_{15m+25} = I_{15m+24} + 18$, \dots , $I_{16m+22} \rightarrow I_{16m+23} = I_{16m+22} + 18$, $I_{16m+23} \rightarrow I_{16m+24} = I_4 - 2$, $I_{16m+24} \rightarrow I_{9m+18}$, $I_{16m+24} \rightarrow I_{12m+22}$, $I_{16m+24} \rightarrow I_7$ e $I_{16m+24} \rightarrow I_{16m+25} = I_7 - 1$, $I_{16m+25} \rightarrow I_{16m+26} = I_{16m+25} + 18$, \dots , $I_{18m+24} \rightarrow I_{18m+25} = I_{18m+24} + 18$, $I_{18m+25} \rightarrow I_{18m+26} = I_3 + 4$, $I_{18m+26} \rightarrow I_{15m+23}$

Así tenemos el siguiente grafo



Del grafo tenemos que la Roma es $R = \{I_1, I_{18m+26}\}$, $a_{1,1} = 2x^{-(12m+16)}$, $a_{18m+26,18m+26} =$

$x^{-(3m+4)}$ y el polinomio característico es

$$p(x) = (-1)^{18m+26-1} \cdot x^{18m+26} \cdot \det \begin{pmatrix} 2x^{-(12m+16)} - 1 & 0 \\ a_{18m+26,1} & x^{-(3m+4)} - 1 \end{pmatrix}$$

$$= -x^{3m+6} \cdot (2 - x^{12m+16}) \cdot (1 - x^{3m+4})$$

Así la mayor raíz real es $x = \sqrt[12m+16]{2}$

$$\text{Luego } h_{top}(\underline{\alpha-\beta}, \underline{\beta+\alpha}) = \frac{\log(2)}{Per(\alpha)} = \frac{1}{12m+16} \log(2)$$

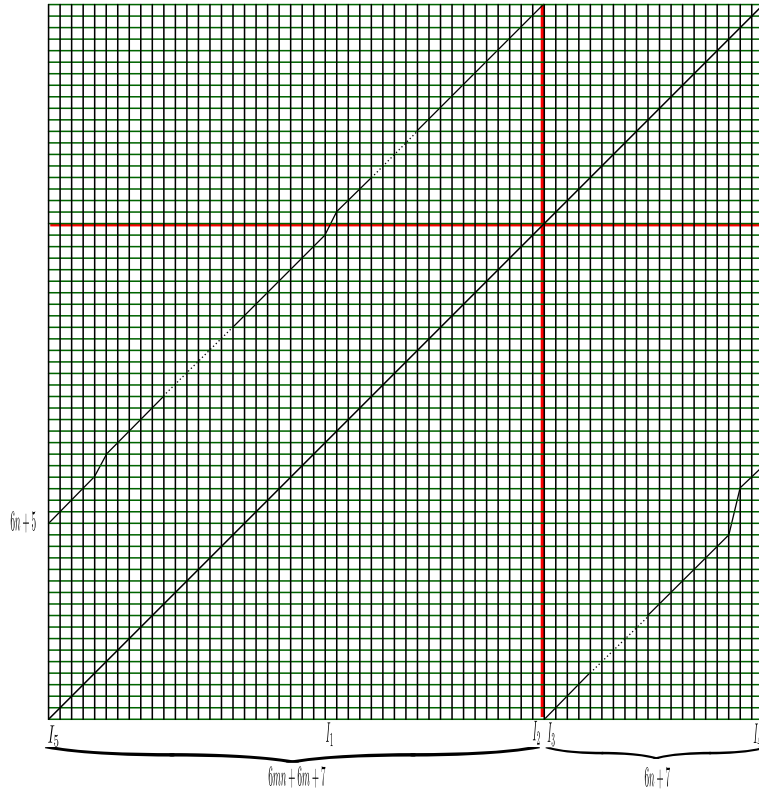
Caso general n

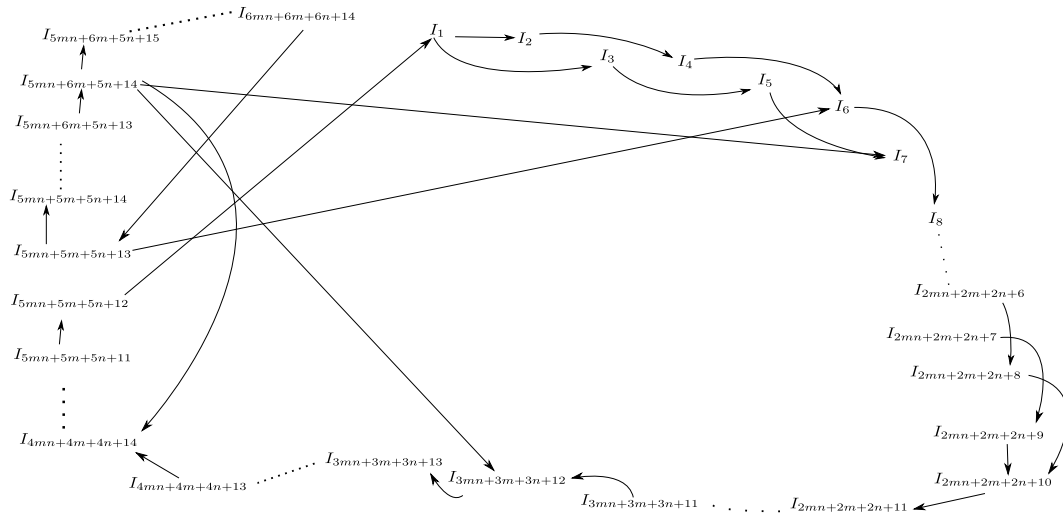
• Si $a = \underline{0_{m+1}1(0_m1)_n}$, entonces $\alpha = \underline{a-b+a^2}$, $Per(\alpha) = 4mn + 4m + 4n + 8$

$$\underline{\alpha-\beta} = \underline{0_{m+1}1(0_m1)_{n-1}0_{m+1}1(0_m1)_{n+1}0_{m+1}1(0_m1)_n0_{m+1}1(0_m1)_{n-1}0_{m+1}1(0_m1)_{n+1}0}$$

$$\underline{\beta+\alpha} = \underline{1(0_m1)_{n+1}0(0_m1)_{n+1}0_{m+1}1(0_m1)_n0_{m+1}1(0_m1)_n0_{m+1}1(0_m1)_{n-1}0_{m+1}1}$$

El gráfico asociado con su respectivo grafo es:





Del grafo tenemos que la Roma es $R = \{I_1, I_{6mn+6m+6n+14}\}$, sea $h = 6mn+6m+6n+14$,

$a_{1,1} = 2x^{-(4mn+4m+4n+8)}$, $a_{h,h} = x^{-(mn+m+n+2)}$ y el polinomio característico es

$$\begin{aligned}
 p(x) &= (-1)^{h-1} \cdot x^h \cdot \det \begin{pmatrix} a_{1,1} - 1 & 0 \\ a_{h,1} & a_{h,h} - 1 \end{pmatrix} \\
 &= -x^{mn+m+n+4} \cdot (2 - x^{4mn+4m+4n+8}) \cdot (1 - x^{mn+m+n+2})
 \end{aligned}$$

Así la mayor raíz real es $x = 4mn+4m+4n+8\sqrt[8]{2}$

$$\text{Luego } h_{top}(\underline{\alpha}, \underline{\beta}, \underline{\alpha}) = \frac{\log(2)}{Per(\alpha)} = \frac{1}{4mn+4m+4n+8} \log(2)$$

Análogamente se prueba para $\alpha_2 = \underline{a_-b^2b_+}$.

- Si $k_1 = 2$ entonces p^k genera a $a = \underline{0_{m+1}1(0_m1)_n0_{m+1}1(0_m1)_{n+1}}$, $m = \frac{t-4}{k} - 1$ y $n = \frac{k_2-1}{2} - 1$. a genera a $\alpha = \underline{a_-b_+}$ y $Per(\alpha) = t$

Caso $n = 1$

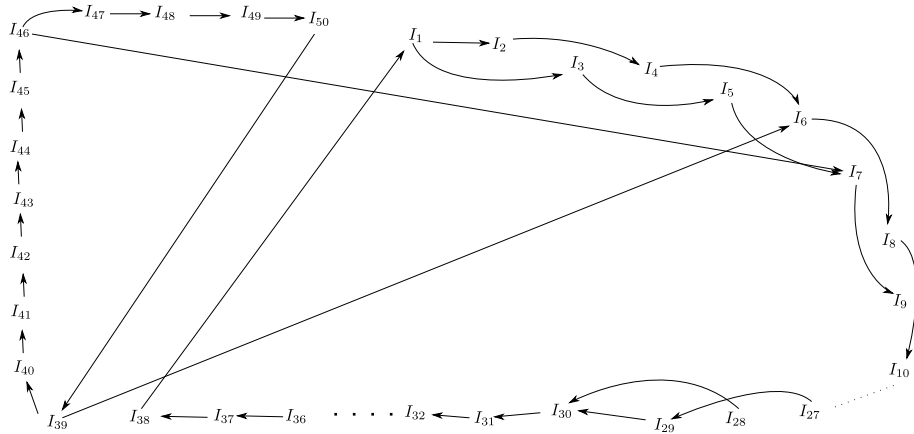
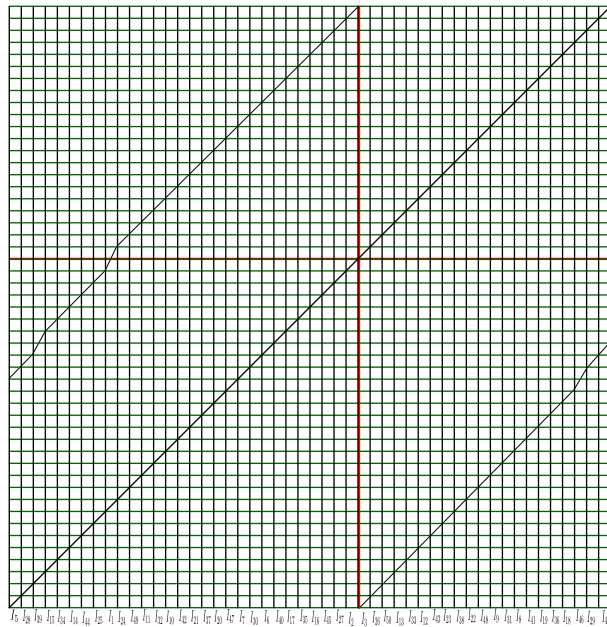
- Si $m = 1$, tenemos $a = \underline{0_21010_21(01)_2}$, entonces

$$\alpha = \underline{a_-b_+} = \underline{0_21010_21010_21(01)_20_21(01)_2}, Per(\alpha) = 24$$

$$\alpha_- \underline{\beta} = 0_21010_21010_2\underline{101010_21010_2101010_2101010}$$

$$\beta_+ \underline{\alpha} = 101010_21010100\underline{101010_2101010_21010_21010_21}$$

El gráfico asociado con su respectivo grafo es:



Del grafo tenemos que la Roma es $R = \{I_1, I_{50}\}$, $a_{1,1} = 2x^{-24}$, $a_{50,50} = x^{-12}$ y el polinomio característico es

$$p(x) = (-1)^{50-1} \cdot x^{50} \cdot \det \begin{pmatrix} 2x^{-24} - 1 & 0 \\ a_{50,1} & x^{-12} - 1 \end{pmatrix} = -x^{14} \cdot (2 - x^{24}) \cdot (1 - x^{12}),$$

y la mayor raíz real es $x = \sqrt[24]{2}$

$$\text{Luego } h_{top}(\underline{\alpha}_-, \beta_+ \underline{\alpha}) = \frac{\log(2)}{\text{Per}(\alpha)} = \frac{1}{24} \log(2)$$

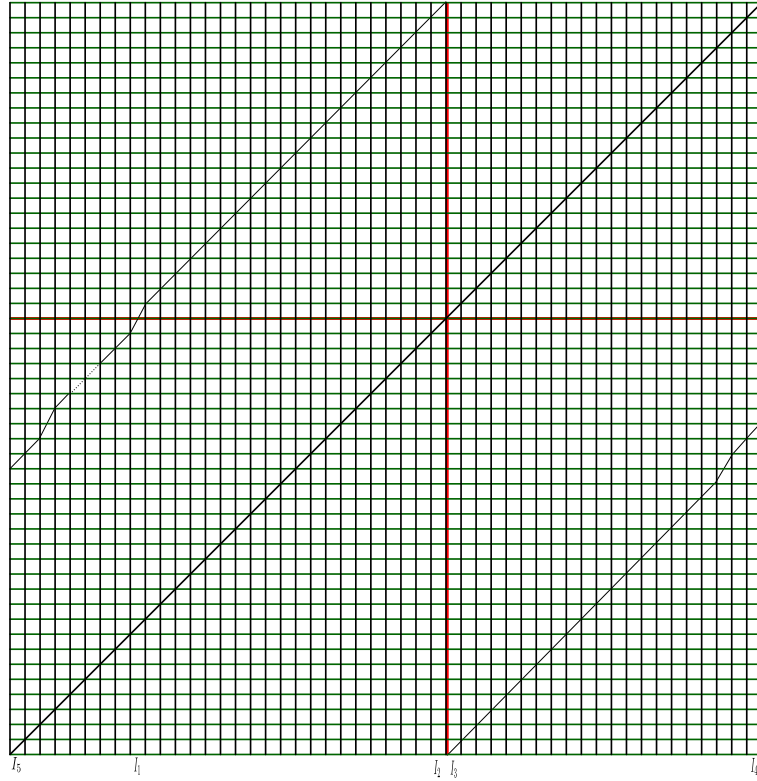
• Caso general para m , tenemos $a = \underline{0_{m+1}10_m10_{m+1}1(0_m1)_2}$, entonces $\alpha = \underline{a_-b_+}$,

$$\text{Per}(\alpha) = 10m + 14 = t$$

$$\alpha_- \underline{\beta} = \underline{0_{m+1}10_m10_{m+1}10_m10_{m+1}1(0_m1)_20_{m+1}10_m10_{m+1}1(0_m1)_20_{m+1}1(0_m1)_20}$$

$$\beta_{+\underline{\alpha}} = 1(0_m 1 =_2 0_{m+1} 1(0_m 1)_2 0(0_m 1)_2 0_{m+1} 1(0_m 1)_2 0_{m+1} 10_m 10_{m+1} 10_m 10_{m+1} 1$$

El gráfico asociado es:



Del gráfico tenemos que:

I_1 es el intervalo del lado izquierdo de la discontinuidad, más cercano a la discontinuidad que va a dos intervalos $I_1 \rightarrow I_2$ e $I_1 \rightarrow I_3$

I_2 es el intervalo anterior a la discontinuidad, $I_2 \rightarrow I_4$

I_3 es el intervalo posterior a la discontinuidad $I_3 \rightarrow I_5$

I_4 es el último intervalo, $I_4 \rightarrow I_6$

I_5 es el primer intervalo $I_5 \rightarrow I_7$

$I_6 = I_5 + 21$, $I_6 \rightarrow I_8$, $I_8 = I_6 + 20$, $I_7 = I_5 + 19$, $I_7 \rightarrow I_9$, $I_9 = I_7 + 20$

Sucesivamente $I_{10m+14} \rightarrow I_{10m+16} = I_{10m+14} + 20$, $I_{10m+15} \rightarrow I_{10m+17} = I_2 - 1$, $I_{10m+16} \rightarrow I_{10m+18} = I_5 + 1$, $I_{10m+17} \rightarrow I_{10m+19} = I_4 - 1$, $I_{10m+18} \rightarrow I_{10m+20} = I_6 - 1$, $I_{10m+19} \rightarrow I_{10m+20}$, $I_{10m+20} \rightarrow I_{10m+21} = I_{10m+20} + 20$, \dots , $I_{15m+23} \rightarrow I_1$.

I_{15m+24} es el otro intervalo del lado izquierdo de la discontinuidad que va a dar a dos

intervalos

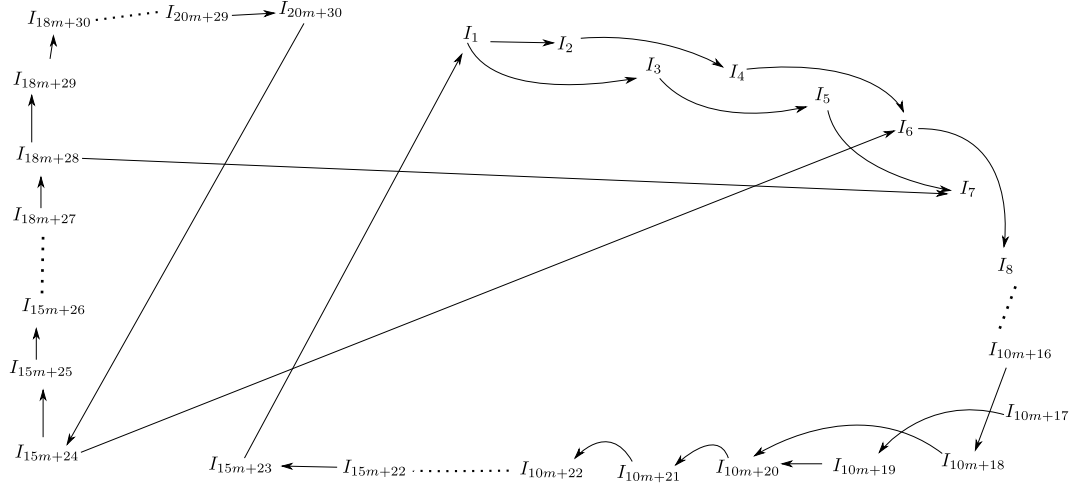
$$I_{15m+24} \rightarrow I_6 \text{ e } I_{15m+24} \rightarrow I_{15m+25} = I_{15m+24} + 20, \dots, I_{18m+25} \rightarrow I_{18m+26} = I_{18m+25} + 20,$$

$$I_{18m+26} \rightarrow I_{18m+27} = I_2 - 2, I_{18m+27} \rightarrow I_{18m+28} = I_4 - 2, I_{18m+28} \rightarrow I_7 \text{ e } I_{18m+28} \rightarrow$$

$$I_{18m+29} = I_7 - 1, \dots I_{20m+28} \rightarrow I_{20m+29} = I_{20m+28} + 20, I_{20m+29} \rightarrow I_{20m+30} = I_3 + 2,$$

$$I_{20m+30} \rightarrow I_{15m+24}.$$

Así tenemos el siguiente grafo



Del grafo tenemos que la Roma es $R = \{I_1, I_{20m+30}\}$, $a_{1,1} = 2x^{-(10m+14)}$, $a_{20m+30,20m+30} = x^{-(5m+7)}$ y el polinomio característico es

$$p(x) = (-1)^{20m+30-1} \cdot x^{20m+30} \cdot \det \begin{pmatrix} 2x^{-(10m+14)} - 1 & 0 \\ a_{20m+30,1} & x^{-(5m+7)} - 1 \end{pmatrix}$$

$$= -x^{5m+9} \cdot (2 - x^{10m+14}) \cdot (1 - x^{5m+7})$$

Así la mayor raíz real es $x = \sqrt[10m+14]{2}$

$$\text{Luego } h_{top}(\underline{\alpha}, \underline{\beta}) = \frac{\log(2)}{Per(\underline{\alpha})} = \frac{1}{10m+14} \log(2)$$

Caso $n = 2$

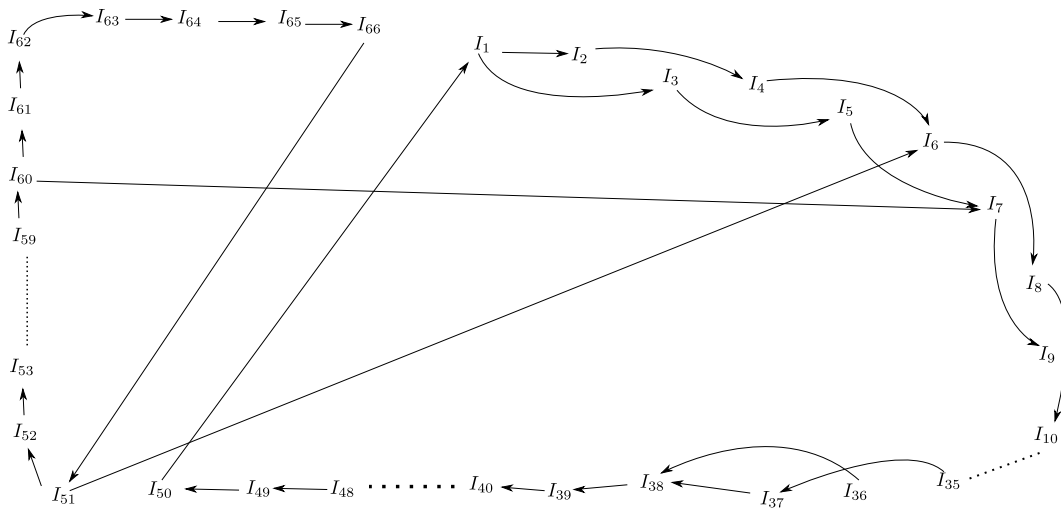
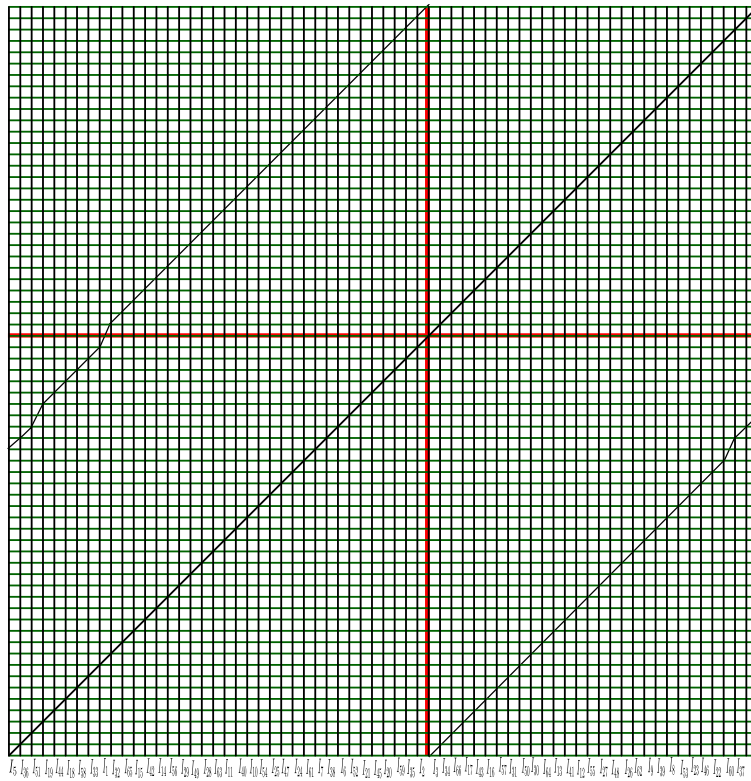
• Si $m = 1$, tenemos $a = \underline{0_2 1(01)_2 0_2 1(01)_3}$, entonces

$$\underline{\alpha} = \underline{a_- b_+} = \underline{0_2 1(01)_2 0_2 1(01)_2 0_2 1(01)_3 0_2 1(01)_3}, Per(\underline{\alpha}) = 32$$

$$\underline{\alpha_- \underline{\beta}} = \underline{0_2 1(01)_2 0_2 1(01)_2 0_2 1(01)_3 0_2 1(01)_2 0_2 1(01)_3 0_2 1(01)_3 0}$$

$$\underline{\beta_+ \underline{\alpha}} = \underline{1(01)_3 0_2 1(01)_3 0(01)_3 0_2 1(01)_3 0_2 1(01)_2 0_2 1(01)_2 0_2 1}$$

El gráfico asociado con su respectivo grafo es:



Del grafo tenemos que la Roma es $R = \{I_1, I_{66}\}$, $a_{1,1} = 2x^{-32}$, $a_{66,66} = x^{-16}$ y el polinomio característico es

$$p(x) = (-1)^{66-1} \cdot x^{66} \cdot \det \begin{pmatrix} 2x^{-32} - 1 & 0 \\ a_{66,1} & x^{-16} - 1 \end{pmatrix} = -x^{18} \cdot (2 - x^{32}) \cdot (1 - x^{16}),$$

y la mayor raíz real es $x = \sqrt[32]{2}$

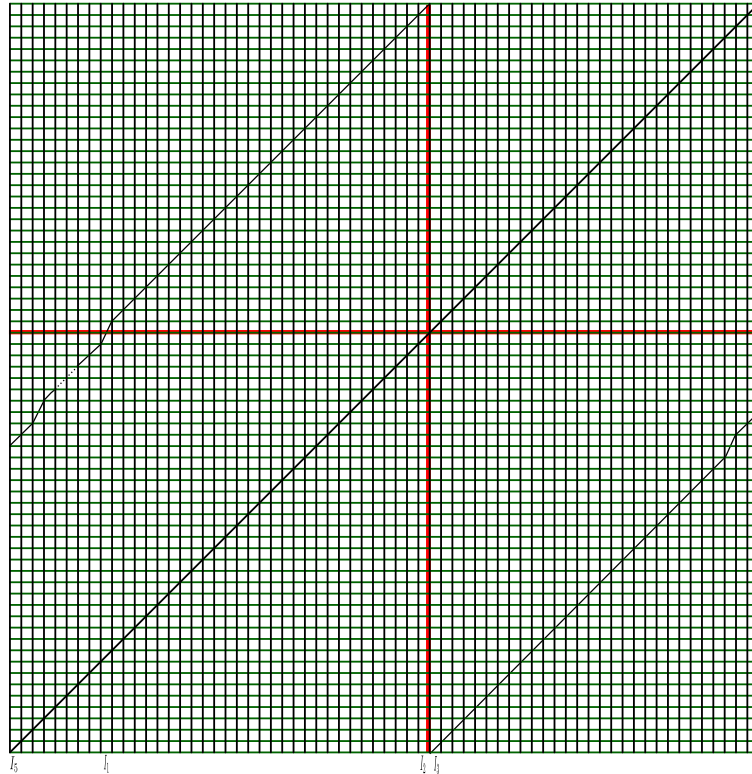
Luego $h_{top}(\underline{\alpha-\beta}, \underline{\beta+\alpha}) = \frac{\log(2)}{Per(\alpha)} = \frac{1}{32} \log(2)$

• Caso general para m , $a = \underline{0_{m+1}1(0_m1)_20_{m+1}1(0_m1)_3}$, entonces $\alpha = \underline{a-b_+}$, $Per(\alpha) = 14m + 18 = t$

$$\underline{\alpha-\beta} = 0_{m+1}1(0_m1)_20_{m+1}1(0_m1)_20_{m+1}1(0_m1)_30_{m+1}1(0_m1)_20_{m+1}1(0_m1)_30_{m+1}1(0_m1)_30$$

$$\underline{\beta+\alpha} = 1(0_m1)_30_{m+1}1(0_m1)_30(0_m1)_30_{m+1}1(0_m1)_30_{m+1}1(0_m1)_20_{m+1}1(0_m1)_20_{m+1}1$$

El gráfico asociado es:



Del gráfico tenemos que:

I_1 es el intervalo del lado izquierdo de la discontinuidad, más cercano a la discontinuidad que va a dos intervalos $I_1 \rightarrow I_2$ e $I_1 \rightarrow I_3$

I_2 es el intervalo anterior a la discontinuidad, $I_2 \rightarrow I_4$

I_3 es el intervalo posterior a la discontinuidad $I_3 \rightarrow I_5$

I_4 es el último intervalo, $I_4 \rightarrow I_6$

I_5 es el primer intervalo $I_5 \rightarrow I_7$

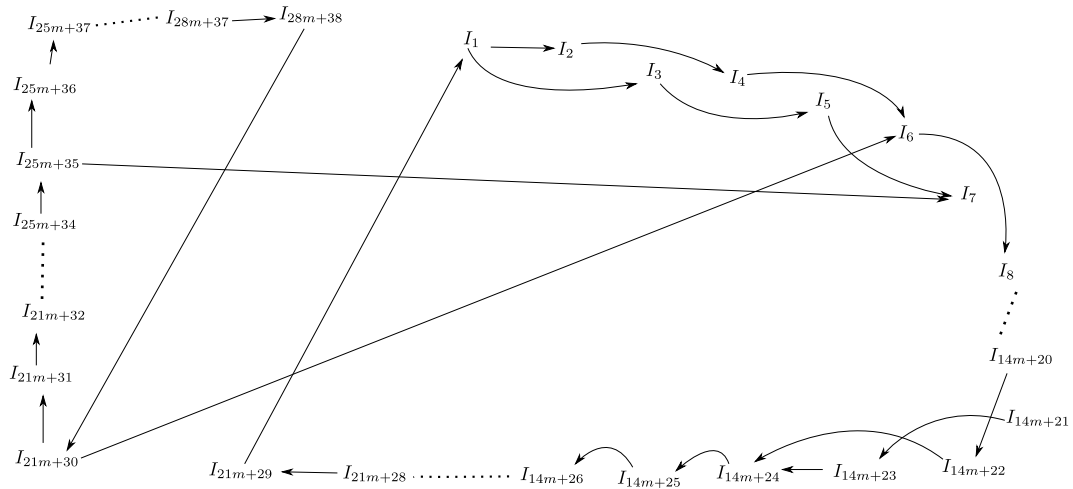
$I_6 = I_5 + 29$, $I_6 \rightarrow I_8$, $I_8 = I_6 + 28$, $I_7 = I_5 + 27$, $I_7 \rightarrow I_9$, $I_9 = I_7 + 28$

Sucesivamente $I_{14m+18} \rightarrow I_{14m+20} = I_{14m+18} + 28$, $I_{14m+19} \rightarrow I_{14m+21} = I_2 - 1$, $I_{14m+20} \rightarrow I_{14m+22} = I_5 + 1$, $I_{14m+21} \rightarrow I_{14m+23} = I_4 - 1$, $I_{14m+22} \rightarrow I_{14m+24} = I_6 - 1$, $I_{14m+23} \rightarrow I_{14m+24}$, $I_{14m+24} \rightarrow I_{14m+25} = I_{14m+24} + 28$, \dots , $I_{21m+29} \rightarrow I_1$.

I_{21m+30} es el otro intervalo del lado izquierdo de la discontinuidad que va a dar a dos intervalos

$I_{21m+30} \rightarrow I_6$ e $I_{21m+30} \rightarrow I_{21m+31} = I_{21m+30} + 28$, \dots , $I_{25m+33} \rightarrow I_{25m+34} = I_2 - 2$, $I_{25m+34} \rightarrow I_{25m+35} = I_4 - 2$, $I_{25m+35} \rightarrow I_7$, $I_{25m+35} \rightarrow I_{25m+36} = I_7 - 1$, $I_{25m+36} \rightarrow I_{25m+37} = I_{25m+36} + 28$, \dots , $I_{28m+38} \rightarrow I_{21m+30}$

Así tenemos el siguiente grafo



Del grafo tenemos que la Roma es $R = \{I_1, I_{28m+38}\}$, $a_{1,1} = 2x^{-(14m+18)}$, $a_{28m+38,28m+38} = x^{-(7m+9)}$ y el polinomio característico es

$$\begin{aligned}
 p(x) &= (-1)^{28m+38-1} \cdot x^{28m+38} \cdot \det \begin{pmatrix} 2x^{-(14m+18)} - 1 & 0 \\ a_{28m+38,1} & x^{-(7m+9)} - 1 \end{pmatrix} \\
 &= -x^{7m+11} \cdot (2 - x^{14m+18}) \cdot (1 - x^{7m+9})
 \end{aligned}$$

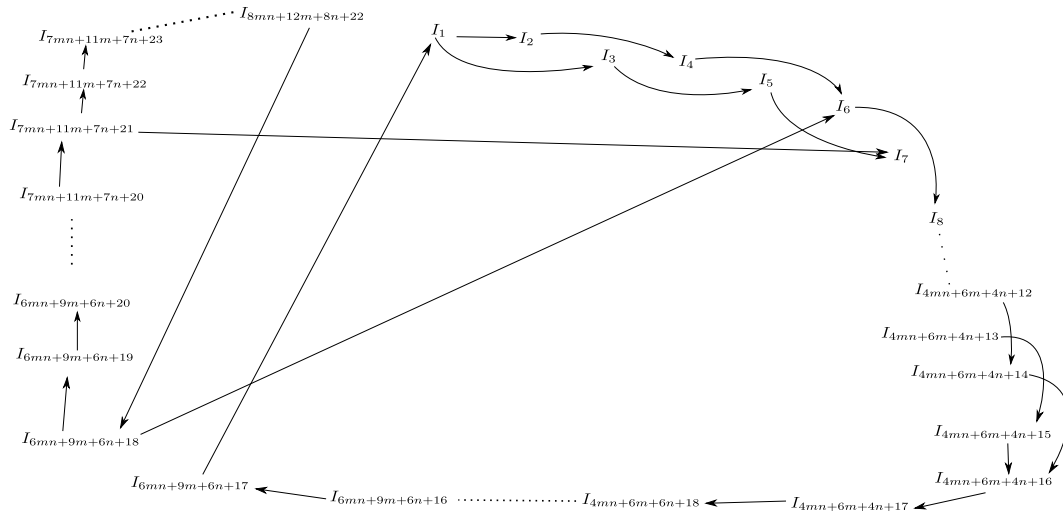
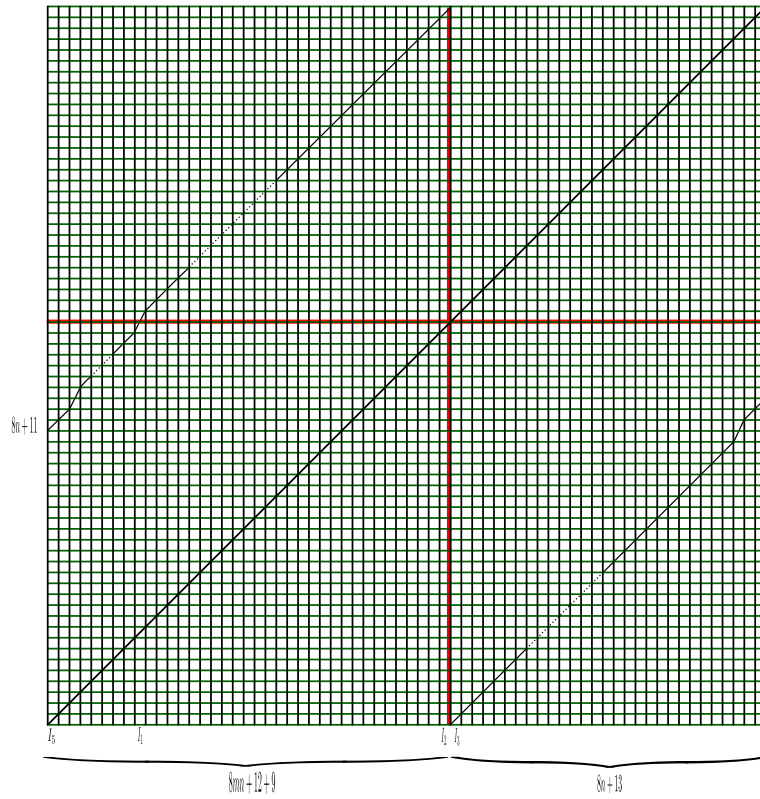
Así la mayor raíz real es $x = \sqrt[14m+18]{2}$

$$\text{Luego } h_{top}(\alpha_{-\underline{\beta}}, \beta_{+\underline{\alpha}}) = \frac{\log(2)}{\text{Per}(\alpha)} = \frac{1}{14m+18} \log(2)$$

Caso general n

- Si $a = \underline{0_{m+1}1(0_m1)_n0_{m+1}1(0_m1)_{n+1}}$, entonces $\alpha = \underline{a_-b_+}$, $\text{Per}(\alpha) = 4mn + 6m + 4n + 10$
 $\alpha_{-\underline{\beta}} = \underline{0_{m+1}1(0_m1)_n0_{m+1}1(0_m1)_n0_{m+1}1(0_m1)_{n+1}0_{m+1}1(0_m1)_n0_{m+1}1(0_m1)_{n+1}0_{m+1}1(0_m1)_{n+1}0}$
 $\beta_{+\underline{\alpha}} = \underline{1(0_m1)_{n+1}0_{m+1}1(0_m1)_{n+1}0(0_m1)_{n+1}0_{m+1}1(0_m1)_{n+1}0_{m+1}1(0_m1)_n0_{m+1}1(0_m1)_n0_{m+1}1}$

El gráfico asociado con su respectivo grafo es:



Del grafo tenemos que la Roma es $R = \{I_1, I_{8mn+12m+8n+22}\}$, sea $h = 8mn + 12m + 8n + 22$, $a_{1,1} = 2x^{-(4mn+6m+4n+10)}$, $a_{h,h} = x^{-(2mn+3m+2n+5)}$ y el polinomio característico es

$$\begin{aligned}
p(x) &= (-1)^{h-1} \cdot x^h \cdot \det \begin{pmatrix} a_{1,1} - 1 & 0 \\ a_{h,1} & a_{h,h} - 1 \end{pmatrix} \\
&= -x^{2mn+3m+2n+7} \cdot (2 - x^{4mn+6m+4n+10}) \cdot (1 - x^{2mn+3m+2n+5})
\end{aligned}$$

Así la mayor raíz real es $x = \sqrt[4mn+6m+4n+10]{2}$

$$\text{Luego } h_{top}(\alpha_{-\underline{\beta}}, \beta_{+\underline{\alpha}}) = \frac{\log(2)}{Per(\alpha)} = \frac{1}{4mn + 6m + 4n + 10} \log(2).$$

•Sucesivamente

Si k divide a $t - k + 2$ entonces p^k genera a la sucesión $a = (0_{m+1}1)_n 0_m 1$, donde $m = \frac{t - k + 2}{k} - 1$ y $n = k_2 - 1$. La sucesión a genera a $\alpha = \underline{a_{-}b_{+}}$ y $Per(\alpha) = t$

Caso $n = 1$

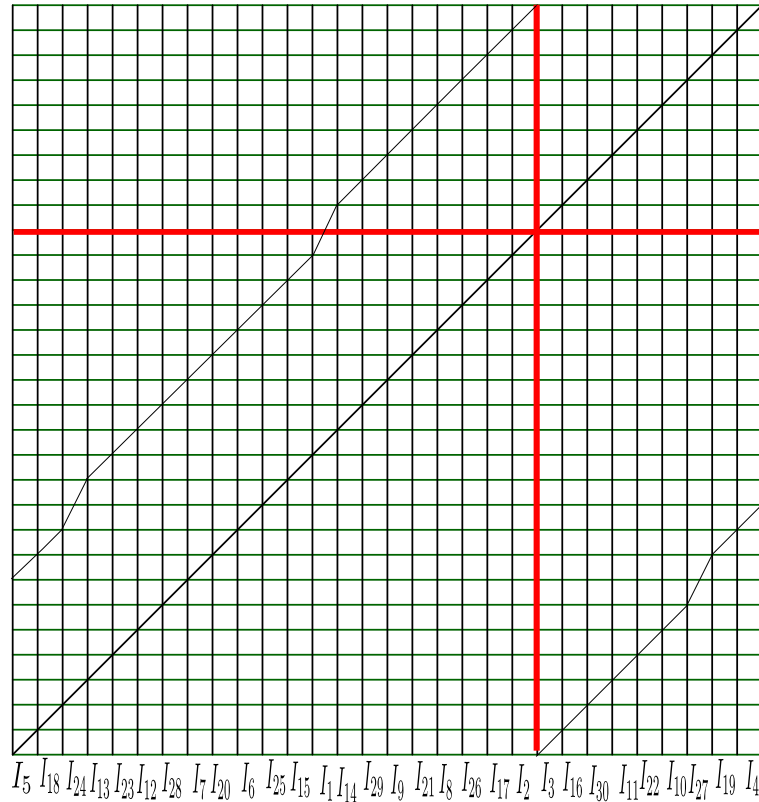
El caso $m = 1$, $a = \underline{00101}$ y $\alpha = \underline{0010010101}$, este caso ya fue tratado

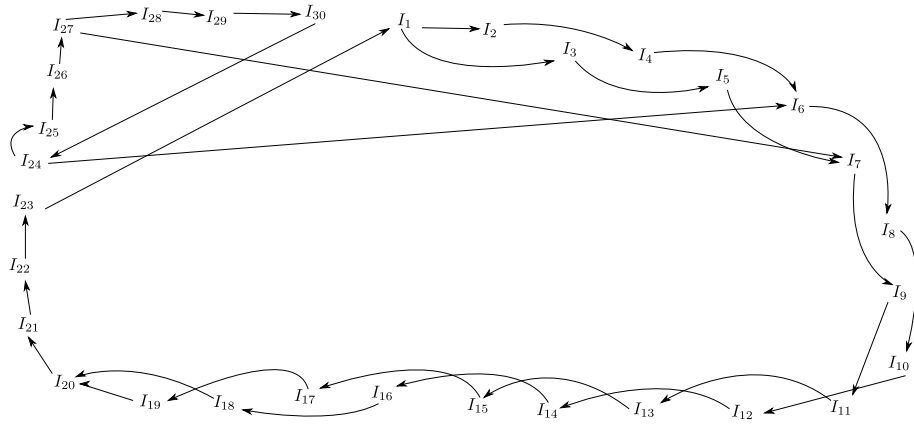
• Caso $m = 2$. En este caso $a = \underline{0001001}$, entonces $\alpha = \underline{0_3 10_3 10_2 10_2 1}$

$$\underline{\alpha_{-\beta}} = 0_3 10_3 \underline{10_2 10_3 10_2 10_2 10}$$

$$\underline{\beta_{+\alpha}} = 10_2 10_2 \underline{100_2 10_2 10_3 10_3 1}$$

El gráfico asociado con su respectivo grafo es:





Del grafo tenemos que la Roma es $R = \{I_1, I_{30}\}$, $a_{1,1} = 2x^{-14}$, $a_{22,22} = x^{-7}$ y el polinomio característico es

$$p(x) = (-1)^{30-1} \cdot x^{30} \cdot \det \begin{pmatrix} 2x^{-14} - 1 & 0 \\ a_{30,1} & x^{-7} - 1 \end{pmatrix} = -x^9 \cdot (2 - x^{14}) \cdot (1 - x^7),$$

y la mayor raíz real es $x = \sqrt[14]{2}$

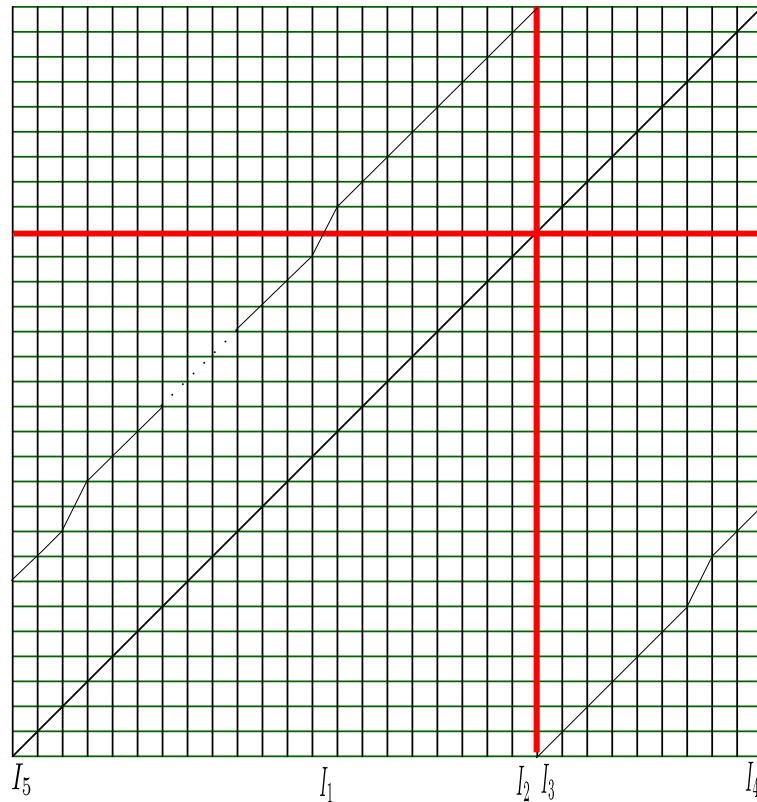
$$\text{Luego } h_{top}(\alpha_{-\underline{\beta}}, \beta_{+\underline{\alpha}}) = \frac{\log(2)}{Per(\alpha)} = \frac{1}{14} \log(2)$$

• Caso general para m Si $a = \underline{0_{m+1}10_m1}$, entonces $\alpha = \underline{a_-b_+}$, $Per(\alpha) = 4m + 6 = t$

$$\alpha_{-\underline{\beta}} = \underline{0_{m+1}10_{m+1}10_m10_{m+1}10_m10_m10}$$

$$\beta_{+\underline{\alpha}} = \underline{10_m10_m100_m10_m10_{m+1}10_{m+1}1}$$

El gráfico asociado es:



Del gráfico tenemos que:

I_1 es el intervalo del lado izquierdo de la discontinuidad, más cercano a la discontinuidad que va a dos intervalos $I_1 \rightarrow I_2$ e $I_1 \rightarrow I_3$

I_2 es el intervalo anterior a la discontinuidad, $I_2 \rightarrow I_4$

I_3 es el intervalo posterior a la discontinuidad $I_3 \rightarrow I_5$

I_4 es el último intervalo, $I_4 \rightarrow I_6$

I_5 es el primer intervalo $I_5 \rightarrow I_7$

$I_6 = I_5 + 9$, $I_6 \rightarrow I_8$, $I_8 = I_6 + 8$, $I_8 \rightarrow I_{10}$, $I_{10} = I_8 + 8$

$I_7 = I_5 + 7$, $I_7 \rightarrow I_9$, $I_9 = I_7 + 8$, $I_9 \rightarrow I_{11}$, $I_{11} = I_9 + 8$

Sucesivamente $I_{2m+2} \rightarrow I_{2m+4} = I_{2m+2} + 8$, $I_{2m+3} \rightarrow I_{2m+5} = I_{2m+3} + 8$, $I_{2m+4} \rightarrow$

$I_{2m+6} = I_3 + 5$

$I_{2m+5} \rightarrow I_{2m+7} = I_3 + 3$, $I_{2m+6} \rightarrow I_{2m+8} = I_5 + 5$, $I_{2m+7} \rightarrow I_{2m+9} = I_5 + 3$

$I_{2m+8} \rightarrow I_{2m+10} = I_{2m+8} + 8$, $I_{2m+9} \rightarrow I_{2m+11} = I_{2m+9} + 8$, \dots , $I_{4m+4} \rightarrow I_{4m+6} =$

$I_{4m+4} + 8$, $I_{4m+6} \rightarrow I_{4m+8} = I_3 + 1$, $I_{4m+8} \rightarrow I_{4m+10} = I_5 + 1$, $I_{4m+10} \rightarrow I_{4m+12} =$

$I_{4m+10} + 7$, $I_{4m+7} \rightarrow I_{4m+9} = I_{4m+7} + 8$, $I_{4m+9} \rightarrow I_{4m+11} = I_4 - 1$, $I_{4m+11} \rightarrow I_{4m+12}$,

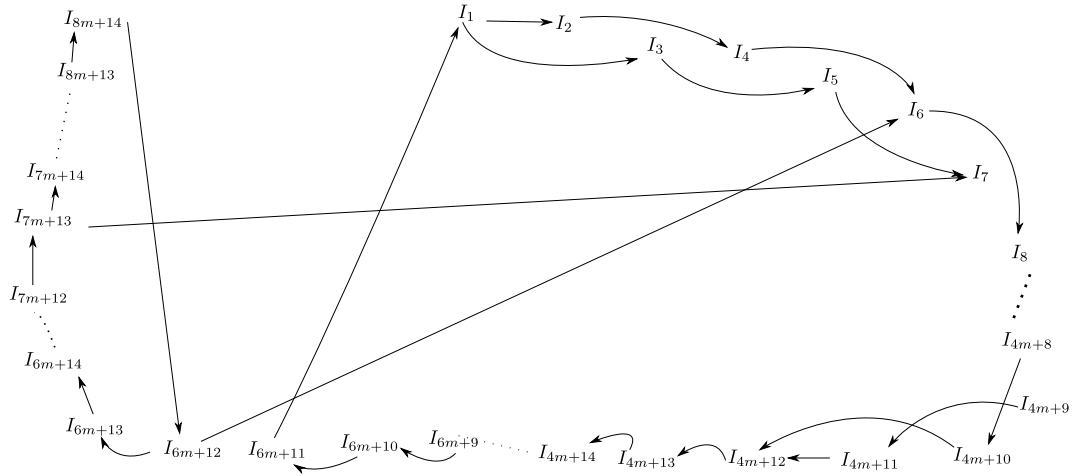
$$I_{4m+12} \rightarrow I_{4m+13} = I_{4m+12} + 8, \dots I_{6m+11} \rightarrow I_1.$$

I_{6m+12} es el otro intervalo del lado izquierdo de la discontinuidad que va a dar a dos intervalos

$$I_{6m+12} \rightarrow I_6 \text{ e } I_{6m+12} \rightarrow I_{6m+13} = I_6 + 1$$

$$I_{6m+13} \rightarrow I_{6m+14} = I_{6m+13} + 8, \dots I_{7m+11} \rightarrow I_{7m+12} = I_{7m+11} + 8, I_{7m+12} \rightarrow I_{7m+13} = I_4 - 2, I_{7m+13} \rightarrow I_{7m+14} = I_7 - 1 \text{ e } I_{7m+13} \rightarrow I_7, I_{7m+14} \rightarrow I_{7m+15} = I_{7m+14} + 8, I_{7m+15} \rightarrow I_{7m+16} = I_{7m+15} + 8, \dots I_{8m+12} \rightarrow I_{8m+13} = I_{8m+12} + 8, I_{8m+13} \rightarrow I_{8m+14} = I_3 + 2, I_{8m+14} \rightarrow I_{6m+12}$$

Así tenemos el siguiente grafo



Del grafo tenemos que la Roma es $R = \{I_1, I_{8m+14}\}$, $a_{1,1} = 2x^{-(4m+6)}$, $a_{8m+14,8m+14} = x^{-(2m+3)}$ y el polinomio característico es

$$p(x) = (-1)^{8m+14-1} \cdot x^{8m+14} \cdot \det \begin{pmatrix} 2x^{-(4m+6)} - 1 & 0 \\ a_{8m+14,1} & x^{-(2m+3)} - 1 \end{pmatrix}$$

$$= -x^{2m+5} \cdot (2 - x^{4m+6}) \cdot (1 - x^{2m+3})$$

Así la mayor raíz real es $x = \sqrt[4m+6]{2}$

$$\text{Luego } h_{top}(\underline{\alpha}_-, \underline{\beta}_+) = \frac{\log(2)}{\text{Per}(\underline{\alpha})} = \frac{1}{4m+6} \log(2)$$

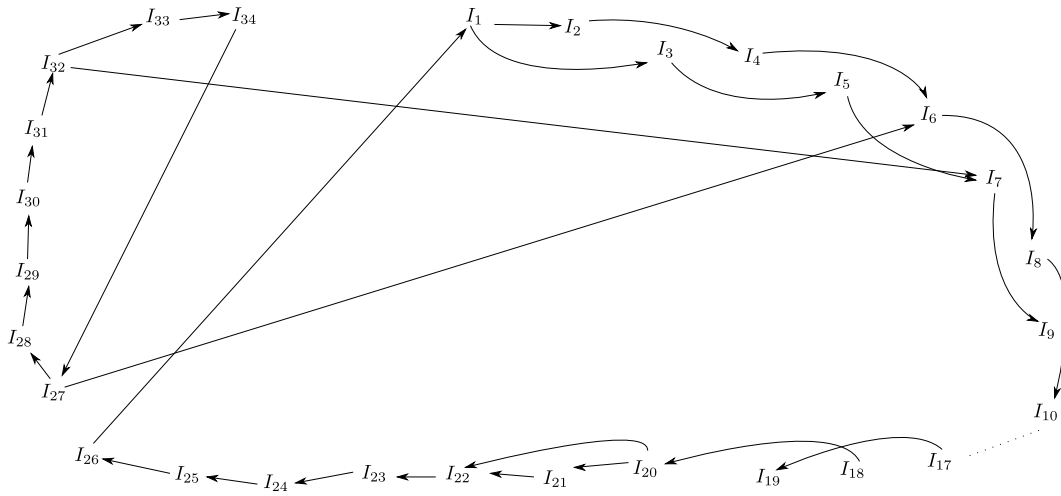
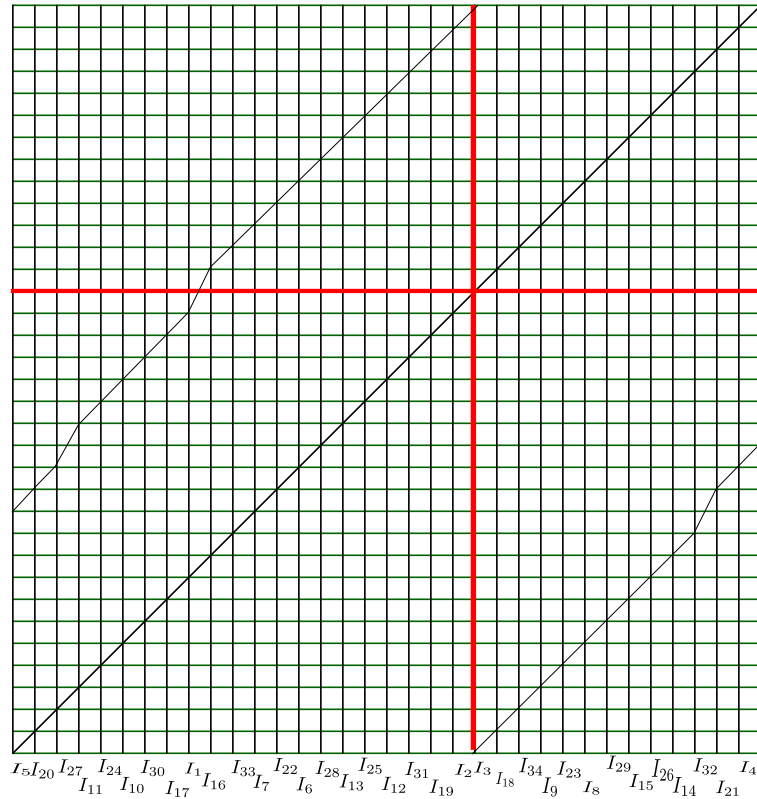
Caso $n = 2$

Para $m = 1$ tenemos $a = \underline{(0_2 1)_2 0 1}$, entonces $\alpha = \underline{(0_2 1)_3 0 1 0_2 1 0 1}$

$$\underline{\alpha}_- \underline{\beta} = (0_2 1)_3 \underline{0 1 (0_2 1)_2 0 1 0_2 1 0 1 0}$$

$$\underline{\beta}_+ \underline{\alpha} = 1 0 1 0_2 1 0 1 0 0 1 0_2 1 0 1 (0_2 1)_3$$

El gráfico asociado con su respectivo grafo es:



Del grafo tenemos que la Roma es $R = \{I_1, I_{34}\}$, $a_{1,1} = 2x^{-16}$, $a_{22,22} = x^{-8}$ y el polinomio característico es

$$p(x) = (-1)^{34-1} \cdot x^{34} \cdot \det \begin{pmatrix} 2x^{-16} - 1 & 0 \\ a_{34,1} & x^{-8} - 1 \end{pmatrix} = -x^{10} \cdot (2 - x^{16}) \cdot (1 - x^8), \text{ y la mayor}$$

raíz real es $x = \sqrt[16]{2}$

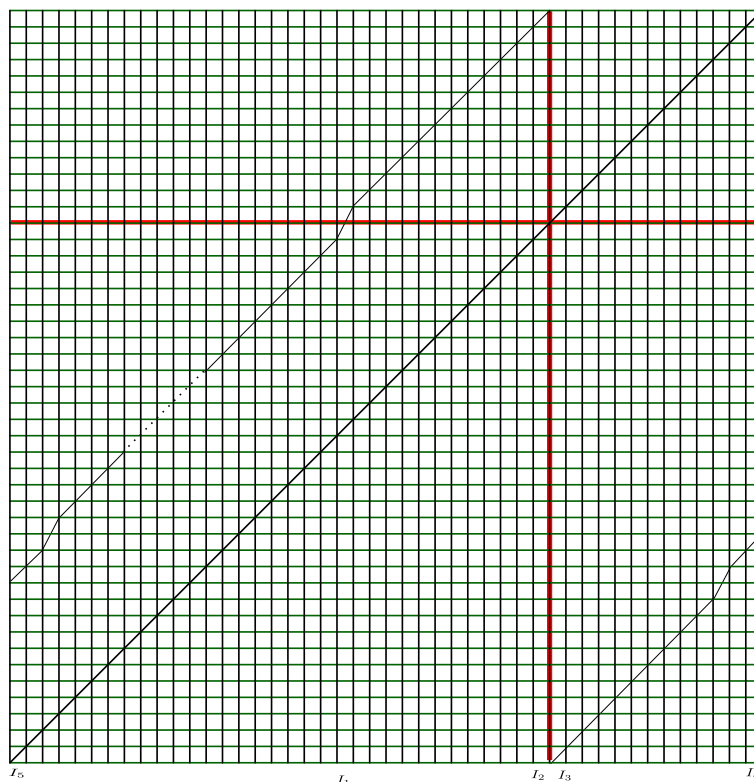
Luego $h_{top}(\underline{\alpha}, \underline{\beta}, \beta_+, \underline{\alpha}) = \frac{\log(2)}{Per(\alpha)} = \frac{1}{16} \log(2)$

• En el caso general para m tenemos $a = \underline{(0_{m+1}1)_2 0_m 1}$, entonces $\alpha = \underline{a_- b_+}$, $Per(\alpha) = 6m + 10 = t$

$\alpha_- \underline{\beta} = (0_{m+1}1)_3 \underline{0_m 1 (0_{m+1}1)_2 0_m 1 0_{m+1} 1 0_m 1 0}$

$\beta_+ \underline{\alpha} = 10_m 10_{m+1} 10_m 100_m 10_{m+1} 10_m 1 (0_{m+1}1)_3$

El gráfico asociado es:



Del gráfico tenemos que:

I_1 es el intervalo del lado izquierdo de la discontinuidad, más cercano a la discontinuidad que va a dos intervalos $I_1 \rightarrow I_2$ e $I_1 \rightarrow I_3$

I_2 es el intervalo anterior a la discontinuidad, $I_2 \rightarrow I_4$

I_3 es el intervalo posterior a la discontinuidad $I_3 \rightarrow I_5$

I_4 es el último intervalo, $I_4 \rightarrow I_6$

I_5 es el primer intervalo $I_5 \rightarrow I_7$

$$I_6 = I_5 + 13, I_6 \rightarrow I_8, I_8 = I_6 + 12, I_7 = I_5 + 11, I_7 \rightarrow I_9, I_9 = I_7 + 12$$

Sucesivamente $I_{2m+2} \rightarrow I_{2m+4} = I_{2m+2} + 12, I_{2m+3} \rightarrow I_{2m+5} = I_{2m+3} + 12, I_{2m+4} \rightarrow I_{2m+6} = I_3 + 5$

$$I_{2m+5} \rightarrow I_{2m+7} = I_3 + 3, I_{2m+6} \rightarrow I_{2m+8} = I_5 + 5, I_{2m+7} \rightarrow I_{2m+9} = I_5 + 3$$

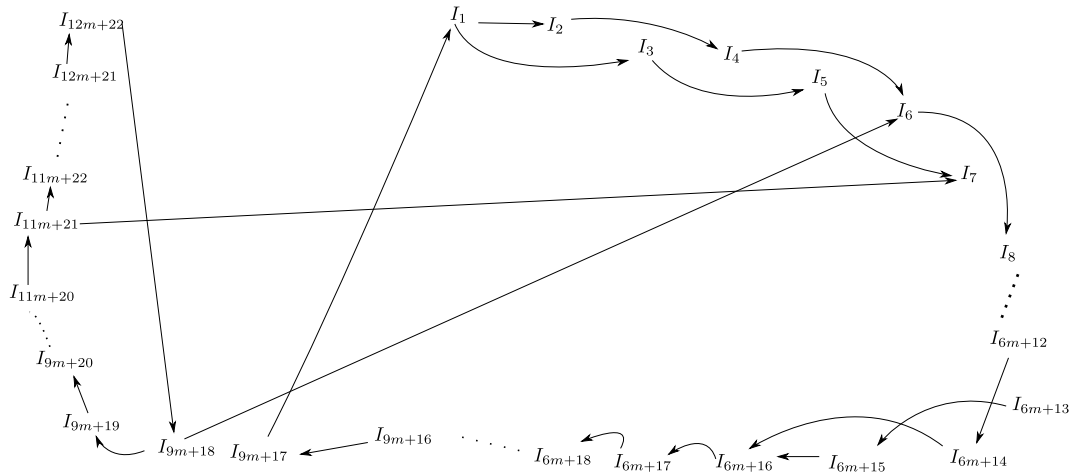
$I_{2m+8} \rightarrow I_{2m+10} = I_{2m+8} + 12, I_{2m+9} \rightarrow I_{2m+11} = I_{2m+9} + 12, \dots, I_{6m+8} \rightarrow I_{6m+10} = I_{6m+8} + 12, I_{6m+10} \rightarrow I_{6m+12} = I_3 + 1, I_{6m+11} \rightarrow I_{6m+13} = I_{6m+11} + 12, I_{6m+12} \rightarrow I_{6m+14} = I_5 + 1, I_{6m+13} \rightarrow I_{6m+15} = I_4 - 1, I_{6m+14} \rightarrow I_{6m+16} = I_{6m+14} + 11, I_{6m+15} \rightarrow I_{6m+16}, I_{6m+16} \rightarrow I_{6m+17} = I_{6m+16} + 12, \dots, I_{9m+17} \rightarrow I_1.$

I_{9m+18} es el otro intervalo del lado izquierdo de la discontinuidad que va a dar a dos intervalos

$$I_{9m+18} \rightarrow I_6 \text{ e } I_{9m+18} \rightarrow I_{9m+19} = I_{9m+18} + 12$$

$I_{9m+19} \rightarrow I_{9m+20} = I_{9m+19} + 12, \dots, I_{11m+20} \rightarrow I_{11m+21} = I_4 - 2, I_{11m+21} \rightarrow I_7 \text{ e } I_{11m+21} \rightarrow I_{11m+22} = I_7 - 1, I_{11m+22} \rightarrow I_{11m+23} = I_{11m+22} + 12, \dots, I_{12m+20} \rightarrow I_{12m+21} = I_{12m+20} + 12, I_{12m+21} \rightarrow I_{12m+22} = I_3 + 2, I_{12m+22} \rightarrow I_{9m+18}$

Así tenemos el siguiente grafo



Del grafo tenemos que la Roma es $R = \{I_1, I_{12m+22}\}$, $a_{1,1} = 2x^{-(6m+10)}$, $a_{12m+22,12m+22} = x^{-(3m+5)}$ y el polinomio característico es

$$\begin{aligned} p(x) &= (-1)^{12m+22-1} \cdot x^{12m+22} \cdot \det \begin{pmatrix} 2x^{-(6m+10)} - 1 & 0 \\ a_{12m+22,1} & x^{-(3m+5)} - 1 \end{pmatrix} \\ &= -x^{3m+7} \cdot (2 - x^{6m+10}) \cdot (1 - x^{3m+5}) \end{aligned}$$

Así la mayor raíz real es $x = \sqrt[6m+10]{2}$

$$\text{Luego } h_{top}(\underline{\alpha-\beta}, \underline{\beta+\underline{\alpha}}) = \frac{\log(2)}{\text{Per}(\alpha)} = \frac{1}{6m+10} \log(2)$$

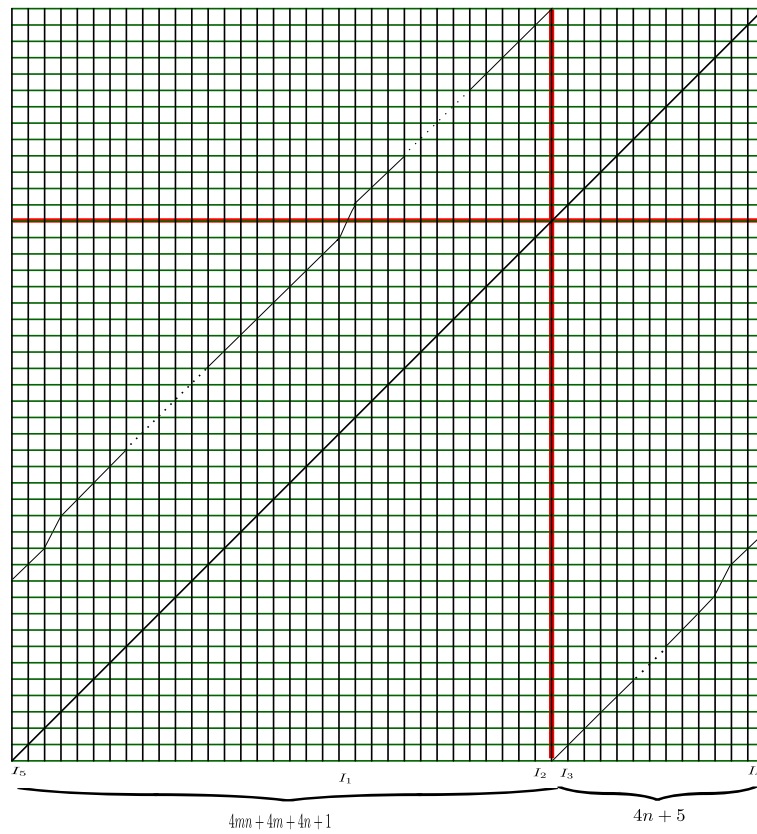
Caso general para n

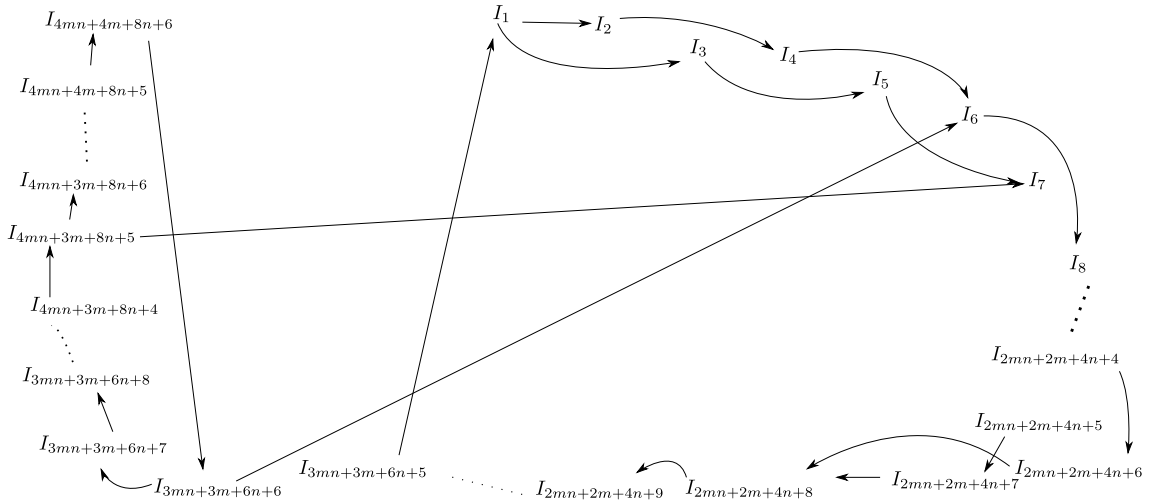
Si $a = \underline{(0_{m+1}1)_n 0_m 1}$, entonces $\alpha = \underline{a_- b_+}$, $\text{Per}(\alpha) = 2mn + 4n + 2m + 2 = t$

$$\underline{\alpha-\beta} = \underline{(0_{m+1}1)_{n+1} 0_m 1 (0_{m+1}1)_n 0_m 1 (0_{m+1}1)_{n-1} 0_m 1 0}$$

$$\underline{\beta+\underline{\alpha}} = \underline{1 0_m 1 (0_{m+1}1)_{n-1} 0_m 1 0 0_m 1 (0_{m+1}1)_{n-1} 0_m 1 (0_{m+1}1)_{n+1}}$$

El gráfico asociado con su respectivo grafo es:





Del grafo tenemos que la Roma es $R = \{I_1, I_{4mn+4m+8n+6}\}$, sea $h = 4mn + 4m + 8n + 6$,

$a_{1,1} = 2x^{-(2mn+2m+4n+2)}$, $a_{h,h} = x^{-(mn+m+2n+1)}$ y el polinomio característico es

$$\begin{aligned}
 p(x) &= (-1)^{h-1} \cdot x^h \cdot \det \begin{pmatrix} a_{1,1} - 1 & 0 \\ a_{h,1} & a_{h,h} - 1 \end{pmatrix} \\
 &= -x^{mn+m+2n+3} \cdot (2 - x^{2mn+2m+4n+2}) \cdot (1 - x^{mn+m+2n+1})
 \end{aligned}$$

Así la mayor raíz real es $x = \sqrt[2]{2}^{2mn+2m+4n+2}$

$$\text{Luego } h_{top}(\alpha_{-\underline{\beta}}, \beta_{+\underline{\alpha}}) = \frac{\log(2)}{Per(\alpha)} = \frac{1}{2mn + 2m + 4n + 2} \log(2).$$

- Ahora si $k > \frac{t}{2}$, entonces $k = l \cdot (t - k) + i$

Como visto en el teorema 3.1.8 si $i = 0$ la permutación genera a la sucesión $a = \underline{01}_l$ para la cual vale el resultado, como se verá mas adelante. Como se vio en el mismo teorema $i = 1$ no puede ocurrir.

- Si $i = 2$ entonces p^k genera a la sucesión $a = \underline{(01)_n 01}_{l+1}$, donde $n = \frac{t-k}{2} - 1$, y a genera a la sucesión $\alpha = \underline{a_- b_+}$ talque $Per(\alpha) = 2ln + 2n + 2l + 2 = t$.

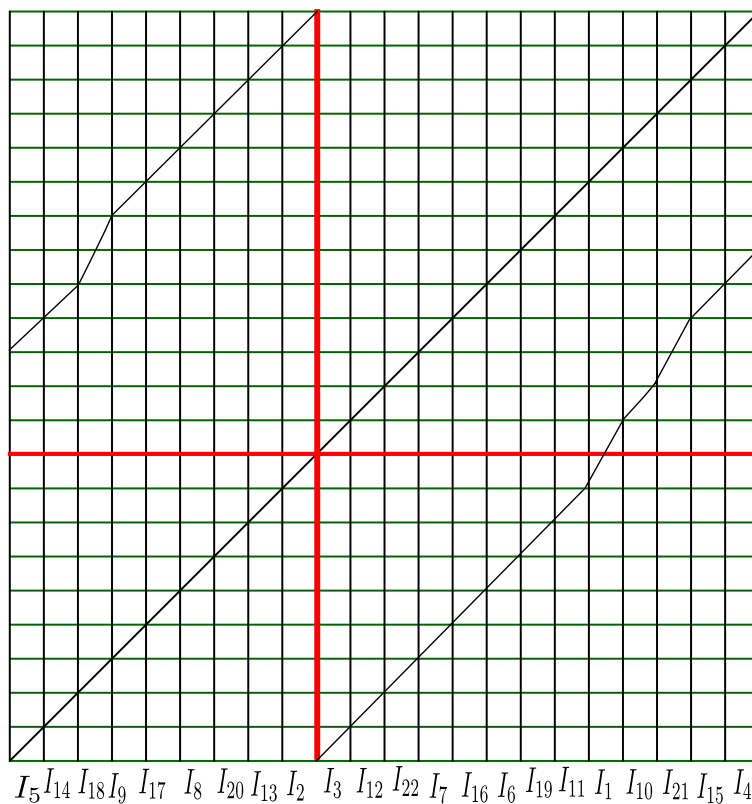
Caso n=1

- Si $l = 1$ tenemos $a = \underline{01011}$, entonces $\alpha = \underline{a_- b_+} = \underline{0101011011}$, $Per(\alpha) = 10$

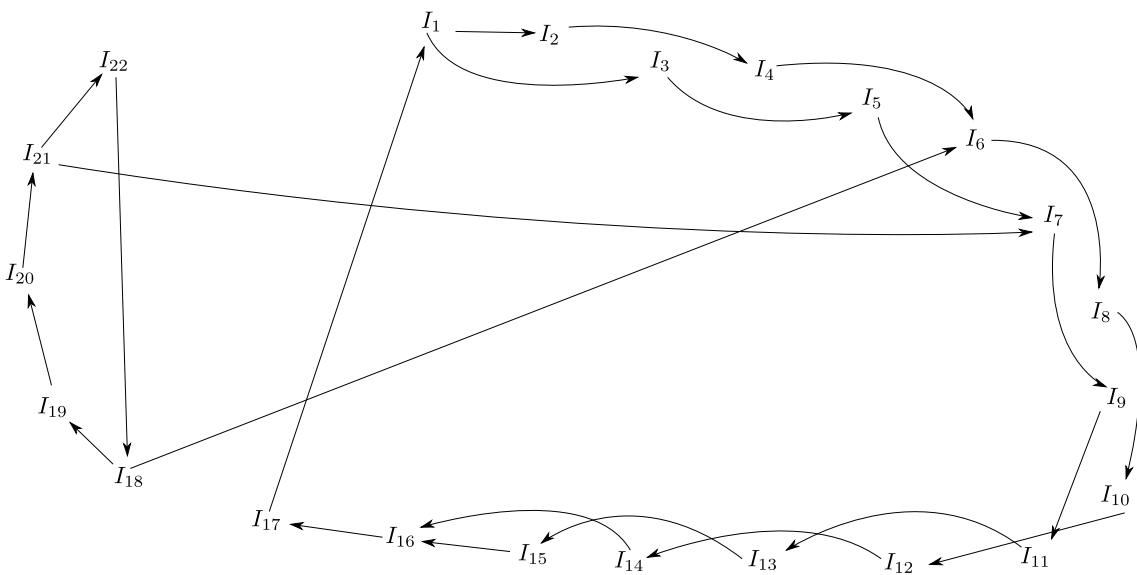
$$\alpha_{-\underline{\beta}} = (01)_3 \underline{1010110110}$$

$$\beta_{+\underline{\alpha}} = (110)_2 \underline{1011(01)_3}$$

El grafico asociado con su respectivo grafo es:



$I_5 I_{14} I_{18} I_9 I_{17} I_8 I_{20} I_{13} I_2 I_3 I_{12} I_{22} I_7 I_{16} I_6 I_{19} I_{11} I_1 I_{10} I_{21} I_{15} I_4$



Del grafo tenemos que la Roma es $R = \{I_1, I_{22}\}$, $a_{1,1} = 2x^{-10}$, $a_{22,22} = x^{-5}$ y el polinomio característico es

$$\begin{aligned}
 p(x) &= (-1)^{22-1} \cdot x^{22} \cdot \det \begin{pmatrix} 2x^{-10} - 1 & 0 \\ a_{22,1} & x^{-5} - 1 \end{pmatrix} \\
 &= -x^7 \cdot (2 - x^{10}) \cdot (1 - x^5)
 \end{aligned}$$

Así la mayor raíz real es $x = \sqrt[10]{2}$.

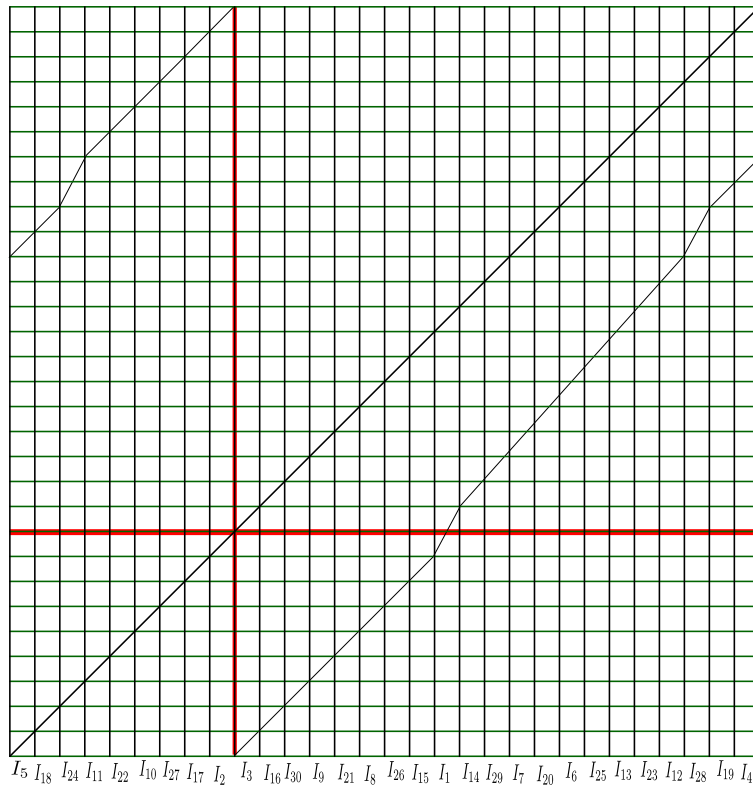
$$\text{Luego } h_{top}(\alpha_{-\underline{\beta}}, \beta_{+\underline{\alpha}}) = \frac{\log(2)}{Per(\alpha)} = \frac{1}{10} \log(2)$$

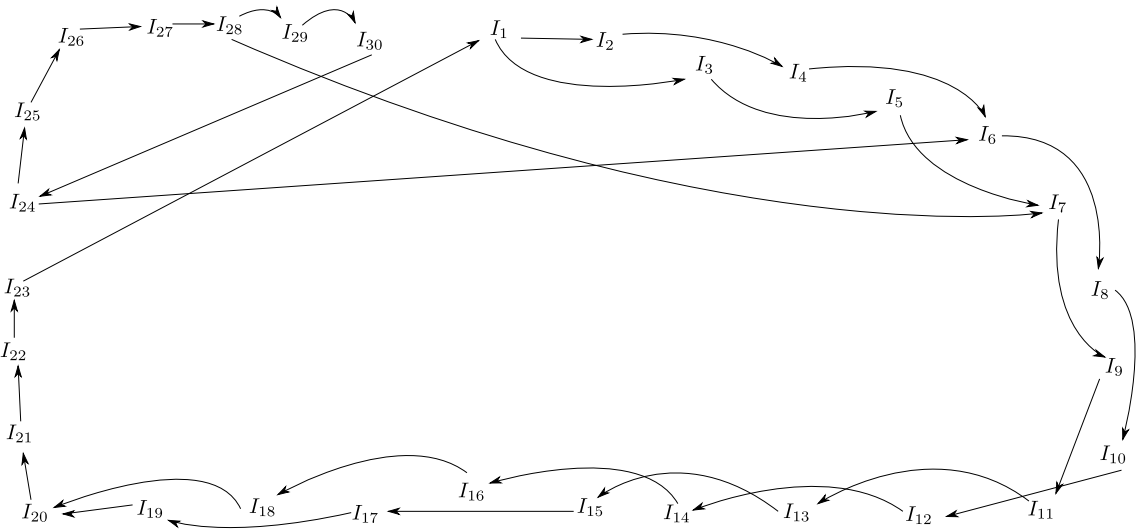
• Si $l = 2$ tenemos $a = \underline{0110111}$, entonces $\alpha = \underline{a_{-}b_{+}} = \underline{01_201_201_301_3}$, $Per(\alpha) = 14$

$$\alpha_{-\underline{\beta}} = (01_2)_2 011_2 01_2 01_3 01_3 0$$

$$\beta_{+\underline{\alpha}} = (1_3 0)_2 \underline{1_2 01_3 01_2 01_2 01}$$

El gráfico asociado con su respectivo grafo es:





Del grafo tenemos que la Roma es $R = \{I_1, I_{30}\}$, $a_{1,1} = 2x^{-14}$, $a_{22,22} = x^{-7}$ y el polinomio característico es

$$\begin{aligned}
 p(x) &= (-1)^{30-1} \cdot x^{30} \cdot \det \begin{pmatrix} 2x^{-14} - 1 & 0 \\ a_{30,1} & x^{-7} - 1 \end{pmatrix} \\
 &= -x^9 \cdot (2 - x^{14}) \cdot (1 - x^7)
 \end{aligned}$$

Así la mayor raíz real es $x = \sqrt[14]{2}$

$$\text{Luego } h_{top}(\underline{\alpha}_-, \underline{\beta}_+) = \frac{\log(2)}{Per(\underline{\alpha})} = \frac{1}{14} \log(2).$$

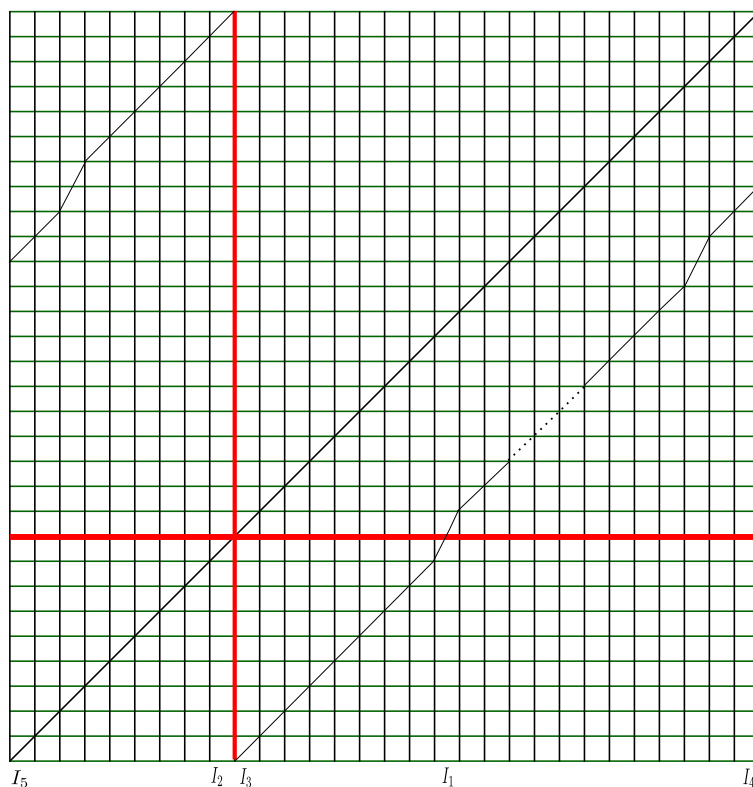
• Caso general para l , tenemos $a = \underline{01_l 01_{l+1}}$, entonces $\alpha = \underline{a_- b_+} = \underline{(01_l)_2 01_{l+1} 01_{l+1}}$,

$$Per(\alpha) = 4l + 6 = t$$

$$\underline{\alpha_- \beta_+} = (01_l)_2 \underline{011_l 01_l 01_{l+1} 01_{l+1} 0}$$

$$\underline{\beta_+ \alpha_-} = 1_{l+1} \underline{01_{l+1} 01_l 01_{l+1} (01_l)_2 01}$$

El gráfico asociado es:



Del gráfico tenemos que:

I_1 es el intervalo del lado derecho de la discontinuidad, más cercano a la discontinuidad que va a dos intervalos $I_1 \rightarrow I_2$ e $I_1 \rightarrow I_3$

I_2 es el intervalo anterior a la discontinuidad, $I_2 \rightarrow I_4$

I_3 es el intervalo posterior a la discontinuidad $I_3 \rightarrow I_5$

I_4 es el último intervalo, $I_4 \rightarrow I_6$

I_5 es el primer intervalo $I_5 \rightarrow I_7$

$I_6 = I_4 - 7$, $I_6 \rightarrow I_8$, $I_8 = I_6 - 8$, $I_7 = I_4 - 9$, $I_7 \rightarrow I_9$, $I_9 = I_7 - 8$

Sucesivamente $I_{2l+2} \rightarrow I_{2l+4} = I_{2l+2} - 8$, $I_{2l+3} \rightarrow I_{2l+5} = I_{2l+3} - 8$, $I_{2l+4} \rightarrow I_{2l+6} = I_2 - 3$

$I_{2l+5} \rightarrow I_{2l+7} = I_2 - 5$, $I_{2l+6} \rightarrow I_{2l+8} = I_4 - 3$, $I_{2l+7} \rightarrow I_{2l+9} = I_4 - 5$

$I_{2l+8} \rightarrow I_{2l+10} = I_{2l+8} - 8$, $I_{2l+9} \rightarrow I_{2l+11} = I_{2l+9} - 8$, \dots , $I_{4l+6} \rightarrow I_{4l+8} = I_{4l+6} - 8$,

$I_{4l+8} \rightarrow I_{4l+10} = I_5 + 1$, $I_{4l+10} \rightarrow I_{4l+12} = I_4 - 8$, $I_{4l+5} \rightarrow I_{4l+7} = I_{4l+5} - 8$, $I_{4l+7} \rightarrow$

$I_{4l+9} = I_2 - 1$, $I_{4l+9} \rightarrow I_{4l+11} = I_4 - 1$, $I_{4l+11} \rightarrow I_{4l+12}$, $I_{4l+12} \rightarrow I_{4l+13} = I_{4l+12} - 8$, \dots

$I_{6l+11} \rightarrow I_1$.

I_{6l+12} es el intervalo del lado izquierdo de la discontinuidad que va a dar a dos intervalos

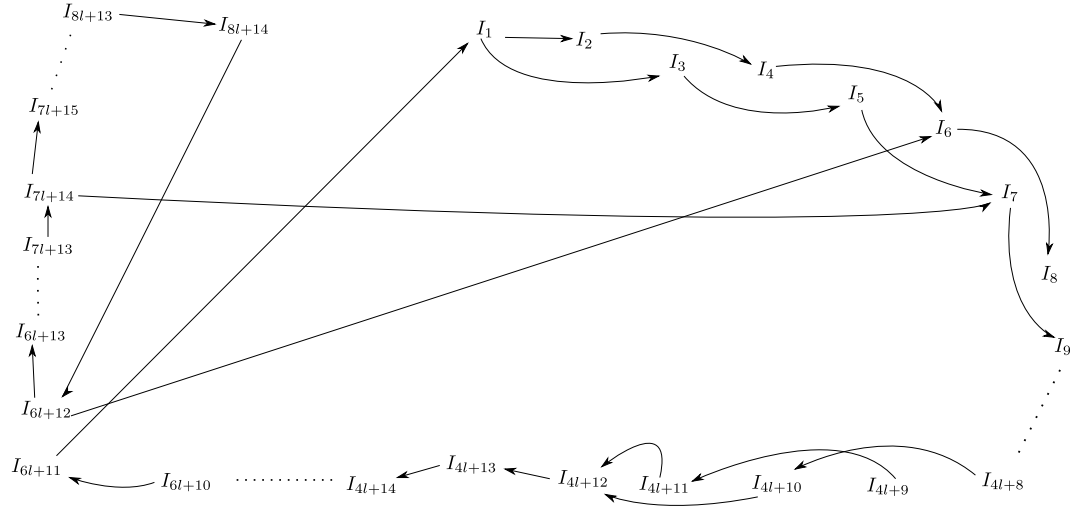
$$I_{6l+12} \rightarrow I_6 \text{ e } I_{6l+12} \rightarrow I_{6l+13} = I_4 - 6$$

$$I_{6l+13} \rightarrow I_{6l+14} = I_{6l+13} - 8, \dots, I_{7l+11} \rightarrow I_{7l+12} = I_{7l+11} - 8, I_{7l+12} \rightarrow I_{7l+13} = I_2 - 2,$$

$$I_{7l+13} \rightarrow I_{7l+14} = I_4 - 2, I_{7l+14} \rightarrow I_7, \text{ e } I_{7l+14} \rightarrow I_{7l+15} = I_{7l+14} - 8, \dots, I_{8l+13} \rightarrow I_{8l+14} =$$

$$I_{8l+13} - 8, I_{8l+14} \rightarrow I_{6l+12}$$

Así tenemos el siguiente grafo



Del grafo tenemos que la Roma es $R = \{I_1, I_{8l+14}\}$, $a_{1,1} = 2x^{-(4l+6)}$, $a_{8l+14,8l+14} = x^{-(2l+3)}$ y el polinomio característico es

$$\begin{aligned} p(x) &= (-1)^{8l+14-1} \cdot x^{8l+14} \cdot \det \begin{pmatrix} 2x^{-(4l+6)} - 1 & 0 \\ a_{8l+14,1} & x^{-(2l+3)} - 1 \end{pmatrix} \\ &= -x^{2l+5} \cdot (2 - x^{4l+6}) \cdot (1 - x^{2l+3}) \end{aligned}$$

Así la mayor raíz real es $x = \sqrt[4l+6]{2}$

$$\text{Luego } h_{top}(\underline{\alpha}_-, \underline{\beta}_+) = \frac{\log(2)}{Per(\alpha)} = \frac{1}{4l+6} \log(2).$$

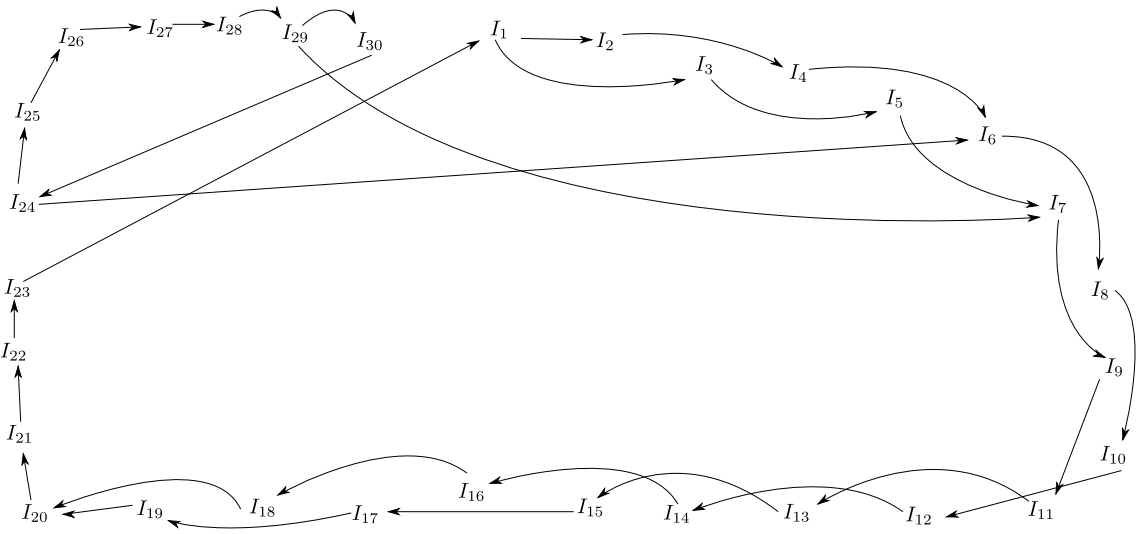
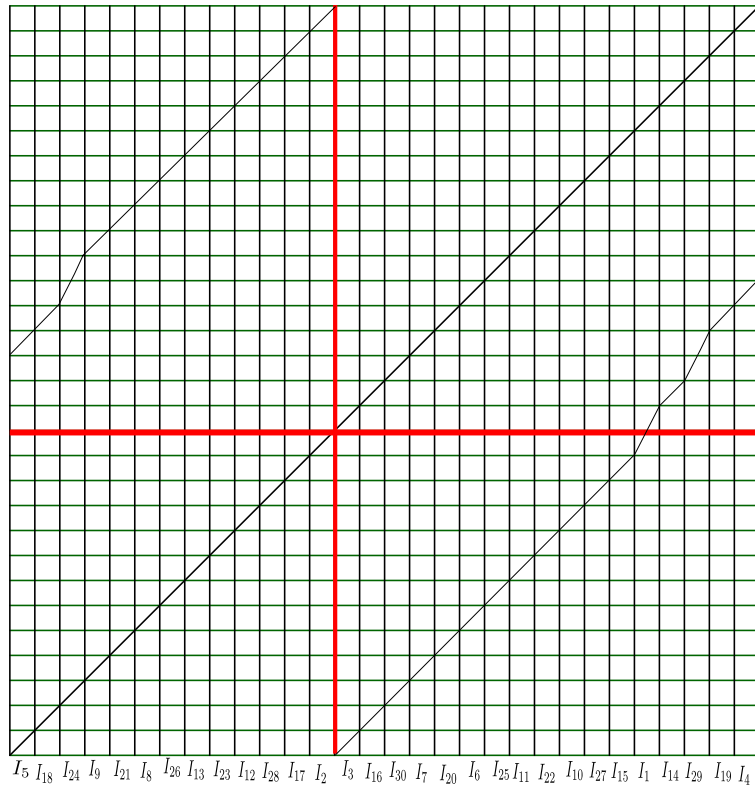
Caso $n = 2$

Si $l = 1$ tenemos $a = \underline{(01)_2 011}$, entonces $\alpha = \underline{a_- b_+} = \underline{(01)_3 01101011}$, $Per(\alpha) = 14$

$$\underline{\alpha_- \beta} = (01)_4 1 \underline{(01)_2 011010110}$$

$$\underline{\beta_+ \alpha} = 11010110101011 \underline{(01)_4}$$

El gráfico asociado con su respectivo grafo es:



Del grafo tenemos que la Roma es $R = \{I_1, I_{30}\}$, $a_{1,1} = 2x^{-14}$, $a_{30,30} = x^{-7}$ y el polinomio característico es

$$\begin{aligned}
 p(x) &= (-1)^{30-1} \cdot x^{30} \cdot \det \begin{pmatrix} 2x^{-14} - 1 & 0 \\ a_{30,1} & x^{-7} - 1 \end{pmatrix} \\
 &= -x^9 \cdot (2 - x^{14}) \cdot (1 - x^7)
 \end{aligned}$$

Así la mayor raíz real es $x = \sqrt[14]{2}$

$$\text{Luego } h_{top}(\alpha_{-\underline{\beta}}, \beta_{+\underline{\alpha}}) = \frac{\log(2)}{\text{Per}(\alpha)} = \frac{1}{14} \log(2).$$

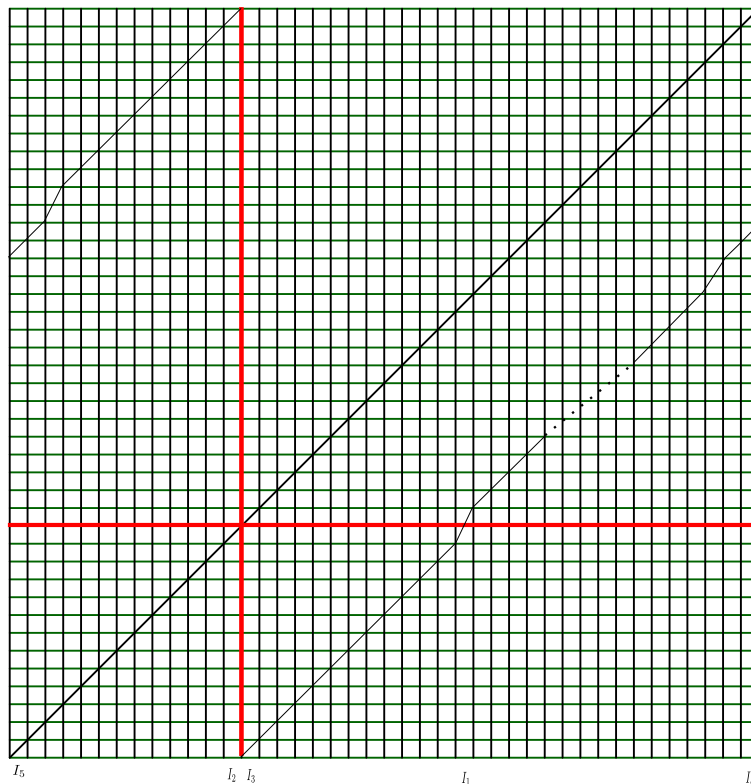
• Caso general para l , $a = \underline{(01_l)_2 01_{l+1}}$, entonces $\alpha = \underline{a_{-} b_{+}} = \underline{(01_l)_3 01_{l+1} 01_l 01_{l+1}}$,

$$\text{Per}(\alpha) = 6l + 8 = t$$

$$\alpha_{-\underline{\beta}} = (01_l)_3 01_l \underline{(01_l)_2 01_{l+1} 01_l 01_{l+1}} 0$$

$$\beta_{+\underline{\alpha}} = 1_{l+1} 01_l 01_{l+1} \underline{01_l 01_l 01_{l+1} (01_l)_3} 01$$

El gráfico asociado es:



Del gráfico tenemos que:

I_1 es el intervalo del lado derecho de la discontinuidad, más cercano a la discontinuidad que va a dos intervalos $I_1 \rightarrow I_2$ e $I_1 \rightarrow I_3$

I_2 es el intervalo anterior a la discontinuidad, $I_2 \rightarrow I_4$

I_3 es el intervalo posterior a la discontinuidad $I_3 \rightarrow I_5$

I_4 es el último intervalo, $I_4 \rightarrow I_6$

I_5 es el primer intervalo $I_5 \rightarrow I_7$

$$I_6 = I_4 - 11, I_6 \rightarrow I_8, I_8 = I_6 - 12, I_7 = I_4 - 13, I_7 \rightarrow I_9, I_9 = I_7 - 12$$

Sucesivamente $I_{2l+2} \rightarrow I_{2l+4} = I_{2l+2} - 12, I_{2l+3} \rightarrow I_{2l+5} = I_{2l+3} - 12, I_{2l+4} \rightarrow I_{2l+6} = I_2 - 7$

$$I_{2l+5} \rightarrow I_{2l+7} = I_2 - 9, I_{2l+6} \rightarrow I_{2l+8} = I_4 - 7, I_{2l+7} \rightarrow I_{2l+9} = I_4 - 9$$

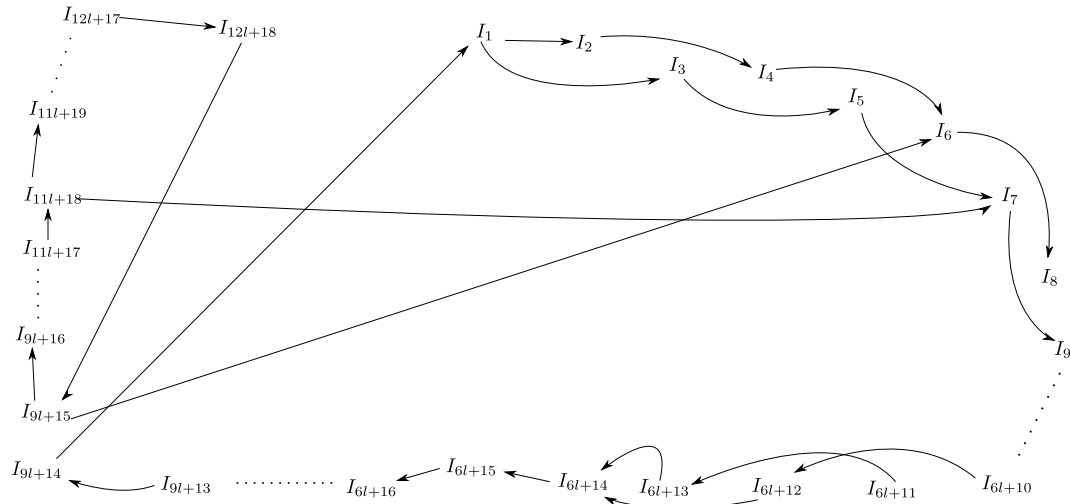
$I_{2l+8} \rightarrow I_{2l+10} = I_{2l+8} - 12, I_{2l+9} \rightarrow I_{2l+11} = I_{2l+9} - 12, \dots, I_{6l+8} \rightarrow I_{6l+10} = I_{6l+8} - 12,$
 $I_{6l+10} \rightarrow I_{6l+12} = I_5 + 1, I_{6l+12} \rightarrow I_{6l+14} = I_4 - 12, I_{6l+7} \rightarrow I_{6l+9} = I_{6l+7} - 12, I_{6l+9} \rightarrow$
 $I_{6l+11} = I_2 - 1, I_{6l+11} \rightarrow I_{6l+13} = I_4 - 1, I_{6l+13} \rightarrow I_{6l+14}, I_{6l+14} \rightarrow I_{6l+15} = I_{6l+14} - 12,$
 $\dots I_{9l+14} \rightarrow I_1.$

I_{9l+15} es el intervalo del lado izquierdo de la discontinuidad que va a dar a dos intervalos

$$I_{9l+15} \rightarrow I_6 \text{ e } I_{9l+15} \rightarrow I_{9l+16} = I_4 - 10$$

$I_{9l+16} \rightarrow I_{9l+17} = I_{9l+16} - 12, \dots, I_{11l+15} \rightarrow I_{11l+16} = I_{11l+15} - 12, I_{11l+16} \rightarrow I_{11l+17} =$
 $I_2 - 2, I_{11l+17} \rightarrow I_{11l+18} = I_4 - 2, I_{11l+18} \rightarrow I_7, \text{ e } I_{11l+18} \rightarrow I_{11l+19} = I_{11l+18} - 12, \dots,$
 $I_{12l+17} \rightarrow I_{12l+18} = I_{12l+17} - 12, I_{12l+18} \rightarrow I_{9l+15}$

Así tenemos el siguiente grafo



Del grafo tenemos que la Roma es $R = \{I_1, I_{12l+18}\}$, $a_{1,1} = 2x^{-(6l+8)}, a_{12l+18,12l+18} = x^{-(3l+4)}$ y el polinomio característico es

$$p(x) = (-1)^{12l+18-1} \cdot x^{12l+18} \cdot \det \begin{pmatrix} 2x^{-(6l+8)} - 1 & 0 \\ a_{12l+18,1} & x^{-(3l+4)} - 1 \end{pmatrix}$$

$$= -x^{3l+6} \cdot (2 - x^{6l+8}) \cdot (1 - x^{3l+4})$$

Así la mayor raíz real es $x = \sqrt[6l+8]{2}$

$$\text{Luego } h_{top}(\underline{\alpha}, \underline{\beta}) = \frac{\log(2)}{\text{Per}(\alpha)} = \frac{1}{6l+8} \log(2).$$

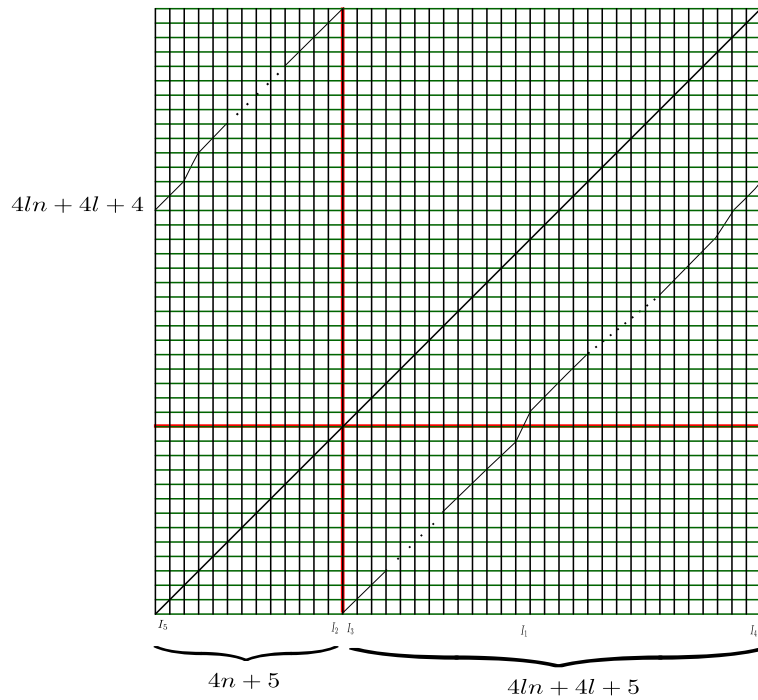
Caso general para n

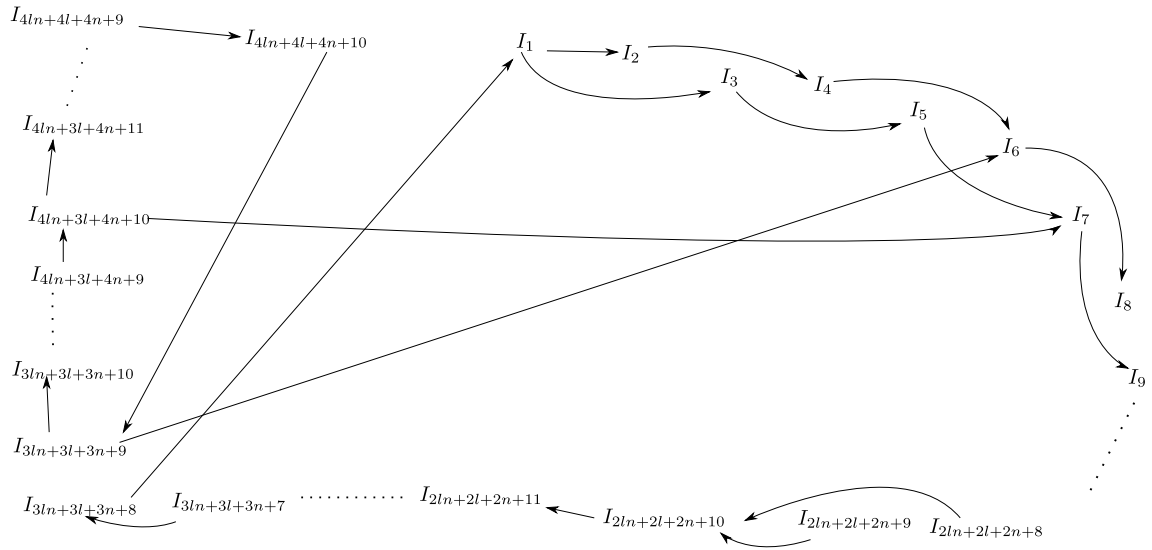
Si $a = \underline{(01_l)_n 01_{l+1}}$, entonces $\alpha = \underline{a_- b_+} = \underline{(01_l)_{n+1} 01_{l+1} (01_l)_{n-1} 01_{l+1}}$, $\text{Per}(\alpha) = 2ln + 2l + 2n + 4 = t$

$$\underline{\alpha_- \beta} = (01_l)_{n+1} 01_{l+1} \underline{1_l (01_l)_n 01_{l+1} (01_l)_{n-1} 01_{l+1} 0}$$

$$\underline{\beta_+ \alpha} = 1_{l+1} (01_l)_{n-1} 01_{l+1} \underline{01_l (01_l)_{n-1} 01_{l+1} (01_l)_{n+1} 01}$$

El gráfico asociado con su respectivo grafo es:





Del grafo tenemos que la Roma es $R = \{I_1, I_{4ln+4l+4n+10}\}$, sea $h = 4ln + 4l + 4n + 10$, $a_{1,1} = 2x^{-(2ln+2l+2n+4)}$, $a_{h,h} = x^{-(ln+l+n+2)}$ y el polinomio característico es

$$\begin{aligned}
 p(x) &= (-1)^{h-1} \cdot x^h \cdot \det \begin{pmatrix} a_{1,1} - 1 & 0 \\ a_{h,1} & a_{h,h} - 1 \end{pmatrix} \\
 &= -x^{ln+l+n+4} \cdot (2 - x^{2ln+2l+2n+4}) \cdot (1 - x^{ln+l+n+2})
 \end{aligned}$$

Así la mayor raíz real es $x = \sqrt[2ln+2l+2n+4]{2}$

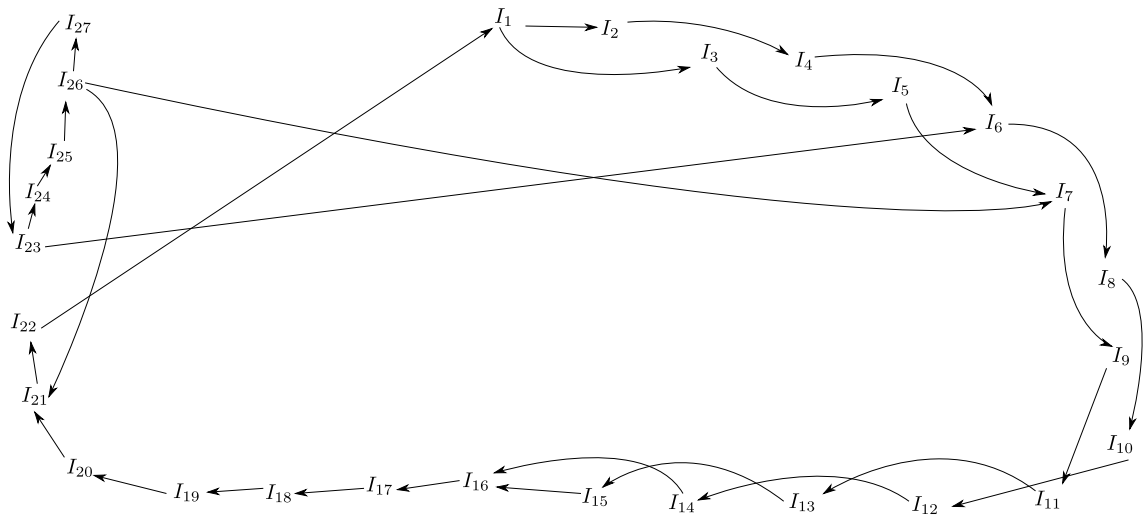
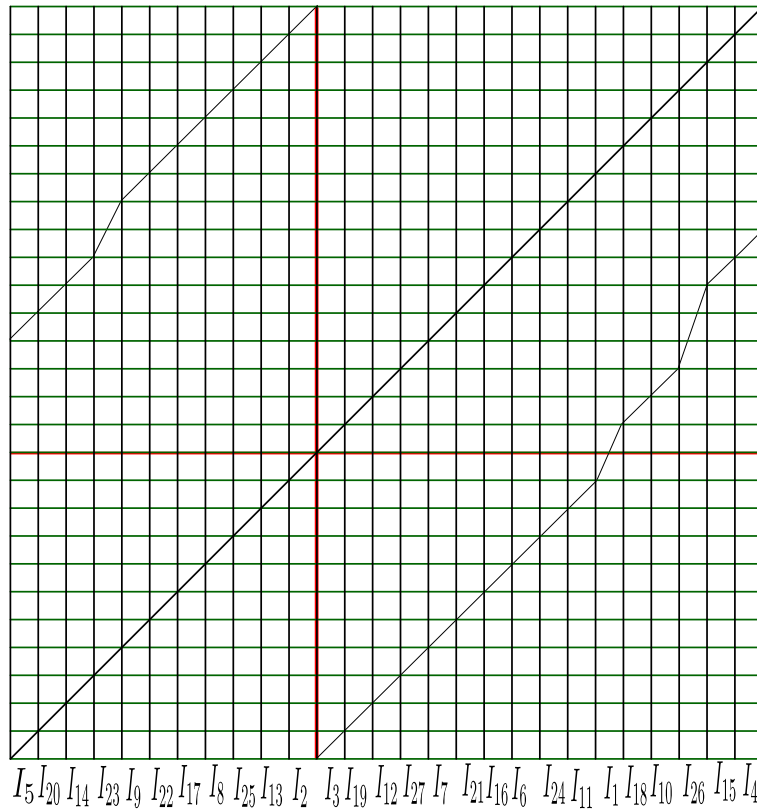
$$\text{Luego } h_{top}(\alpha_{-\underline{\beta}}, \beta_{+\underline{\alpha}}) = \frac{\log(2)}{\text{Per}(\alpha)} = \frac{1}{2ln + 2l + 2n + 4} \log(2).$$

- Si $i = 3$ entonces p^k genera a la sucesión $a = \underline{(01_l)_n 01_{l+1}}$, donde $n = \frac{t-k}{3} - 1$, y a genera a las sucesiones $\alpha_1 = \underline{a_b_+a}$ y $\alpha_2 = \underline{a_bb_+}$ tales que $\text{Per}(\alpha_1) = \text{Per}(\alpha_2) = 3ln + 3n + 3l + 6 = t$.

Caso $n = 1$

- Si $l = 1$, tenemos $a = \underline{01011}$, entonces $\alpha = \underline{a_b_+a} = \underline{010101_2 01_2 0101_2}$, $\text{Per}(\alpha) = 15$
 $\alpha_{-\underline{\beta}} = (01)_3 \underline{101_2 0101_2 01_2 0}$
 $\beta_{+\underline{\alpha}} = (110)_2 \underline{101_2 0101_2 (01)_3}$

El gráfico asociado con su respectivo grafo es:



Del grafo tenemos que la Roma es $R = \{I_1, I_{27}\}$, $a_{1,1} = 2x^{-15}$, $a_{27,27} = x^{-5}$ y el polinomio característico es

$$\begin{aligned}
 p(x) &= (-1)^{27-1} \cdot x^{27} \cdot \det \begin{pmatrix} 2x^{-15} - 1 & 0 \\ a_{27,1} & x^{-5} - 1 \end{pmatrix} \\
 &= x^7 \cdot (2 - x^{15}) \cdot (1 - x^5)
 \end{aligned}$$

Así la mayor raíz real es $x = \sqrt[15]{2}$

$$\text{Luego } h_{top}(\alpha_{-\underline{\beta}}, \beta_{+\underline{\alpha}}) = \frac{\log(2)}{\text{Per}(\alpha)} = \frac{1}{15} \log(2)$$

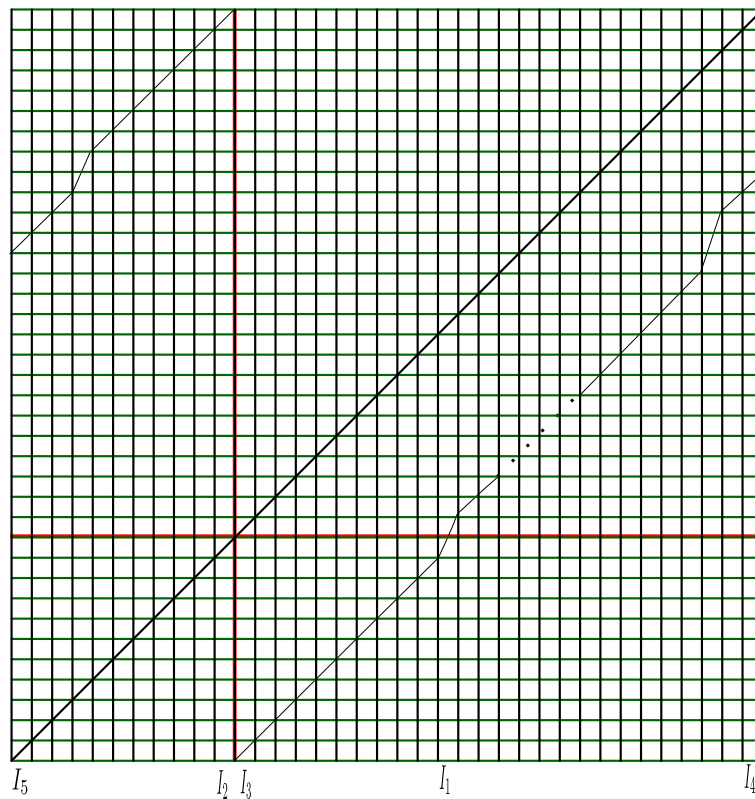
• Caso general para l , $a = \underline{01_l 01_{l+1}}$, entonces

$$\alpha = \underline{a_{-} b_{+} a} = \underline{(01_l)_2 (01_{l+1})_2 01_l 01_{l+1}}, \text{Per}(\alpha) = 6l + 9 = t$$

$$\alpha_{-\underline{\beta}} = (01_l)_2 01_l 01_{l+1} (01_l)_2 (01_{l+1})_2 0$$

$$\beta_{+\underline{\alpha}} = 1_{l+1} 01_{l+1} \underline{01_l 01_{l+1} 01_l 01_{l+1} (01_l)_2 01}$$

El gráfico asociado es:



Del gráfico tenemos que:

I_1 es el intervalo del lado derecho de la discontinuidad que va a dos intervalos $I_1 \rightarrow I_2$ e $I_1 \rightarrow I_3$

I_2 es el intervalo anterior a la discontinuidad, $I_2 \rightarrow I_4$

I_3 es el intervalo posterior a la discontinuidad $I_3 \rightarrow I_5$

I_4 es el último intervalo, $I_4 \rightarrow I_6$

I_5 es el primer intervalo $I_5 \rightarrow I_7$

$$I_6 = I_4 - 8, I_6 \rightarrow I_8, I_8 = I_6 - 10, I_7 = I_4 - 11, I_7 \rightarrow I_9, I_9 = I_7 - 10$$

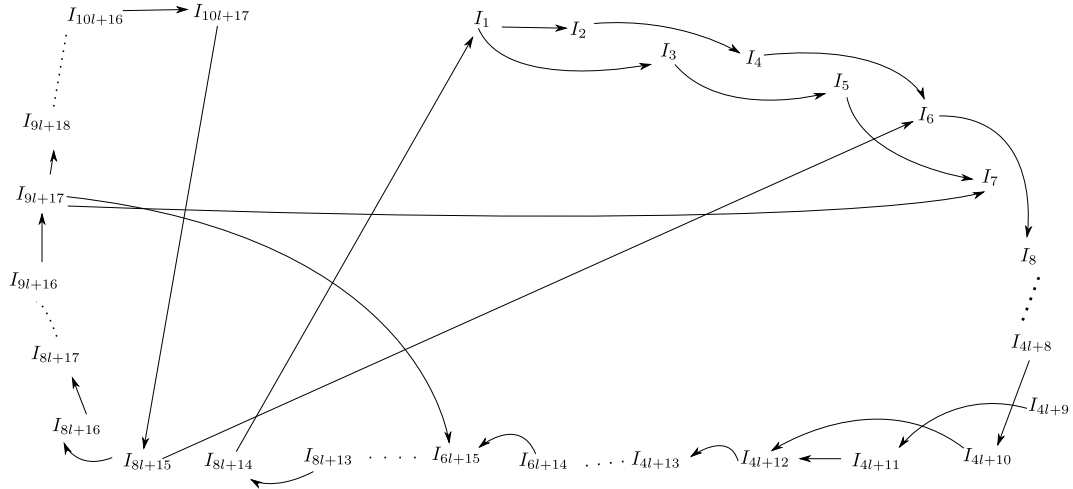
Sucesivamente $I_{4l+6} \rightarrow I_{4l+8} = I_{4l+6} - 10, I_{4l+5} \rightarrow I_{4l+7} = I_{4l+5} - 10, I_{4l+8} \rightarrow I_{4l+10} = I_5 + 2$

$I_{4l+7} \rightarrow I_{4l+9} = I_2 - 1, I_{4l+10} \rightarrow I_{4l+12} = I_4 - 9, I_{4l+9} \rightarrow I_{4l+11} = I_4 - 1, I_{4l+11} \rightarrow I_{4l+12},$
 $I_{4l+12} \rightarrow I_{4l+13} = I_{4l+12} - 10, \dots, I_{8l+14} \rightarrow I_1$

I_{8l+15} es el intervalo del lado izquierdo de la discontinuidad que va a dar a dos intervalos
 $I_{8l+15} \rightarrow I_6$ e $I_{8l+15} \rightarrow I_{8l+16} = I_4 - 7$

$I_{8l+16} \rightarrow I_{8l+17} = I_{8l+16} - 10, \dots, I_{9l+14} \rightarrow I_{9l+15} = I_{9l+14} - 10, I_{9l+15} \rightarrow I_{9l+16} = I_2 - 3,$
 $I_{9l+16} \rightarrow I_{9l+17} = I_4 - 2, I_{9l+17} \rightarrow I_{6l+15}, I_{9l+17} \rightarrow I_7,$ e $I_{9l+17} \rightarrow I_{9l+18} = I_{9l+17} - 10,$
 $\dots, I_{10l+17} \rightarrow I_{8l+15}$

Así tenemos el siguiente grafo



Del grafo tenemos que la Roma es $R = \{I_1, I_{10l+17}\}$, $a_{1,1} = 2x^{-(6l+9)}, a_{10l+17,10l+17} = x^{-(2l+3)}$ y el polinomio característico es

$$p(x) = (-1)^{10l+17-1} \cdot x^{10l+17} \cdot \det \begin{pmatrix} 2x^{-(6l+9)} - 1 & 0 \\ a_{10l+17,1} & x^{-(2l+3)} - 1 \end{pmatrix}$$

$$= x^{2l+5} \cdot (2 - x^{6l+9}) \cdot (1 - x^{2l+3})$$

Así la mayor raíz real es $x = \sqrt[6l+9]{2}$

$$\text{Luego } h_{top}(\underline{\alpha}_-, \underline{\beta}_+ \underline{\alpha}) = \frac{\log(2)}{Per(\underline{\alpha})}$$

Caso $n = 2$

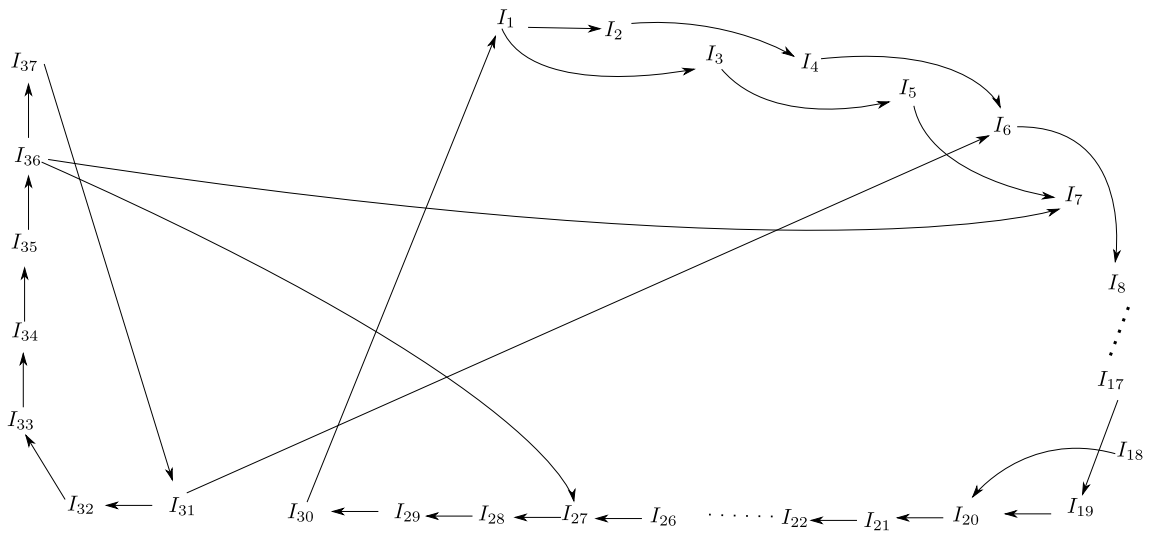
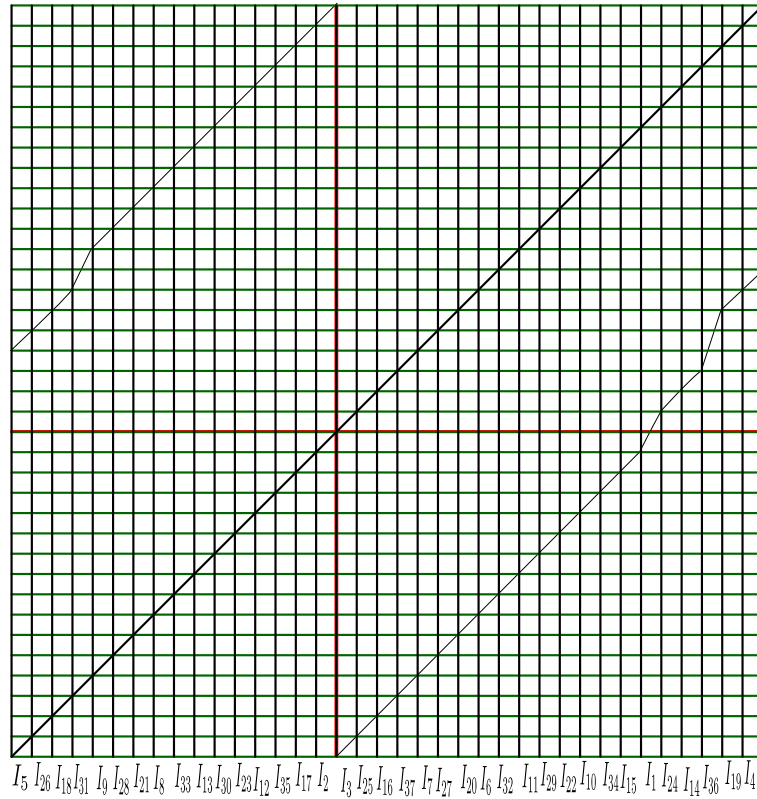
- Si $l = 1$, tenemos $a = \underline{(01)_2 011}$, entonces $\alpha = \underline{a_- b_+ a} = \underline{(01)_3 01_2 0101_2 (01)_2 01_2}$,

$$Per(\alpha) = 21$$

$$\alpha_{-\beta} = (01)_4 \underline{101011(01)_3 011010110}$$

$$\beta_{+\alpha} = 11010110(10)_2 \underline{11(01)_2 011(01)_4}$$

El gráfico asociado con su respectivo grafo es:



Del grafo tenemos que la Roma es $R = \{I_1, I_{37}\}$, $a_{1,1} = 2x^{-21}$, $a_{37,37} = x^{-7}$ y el polinomio característico es

$$p(x) = (-1)^{37-1} \cdot x^{37} \cdot \det \begin{pmatrix} 2x^{-21} - 1 & 0 \\ a_{37,1} & x^{-7} - 1 \end{pmatrix}$$

$$= x^9 \cdot (2 - x^{21}) \cdot (1 - x^7)$$

Así la mayor raíz real es $x = \sqrt[21]{2}$

$$\text{Luego } h_{top}(\alpha_{-\underline{\beta}}, \beta_{+\underline{\alpha}}) = \frac{\log(2)}{Per(\alpha)} = \frac{1}{21} \log(2)$$

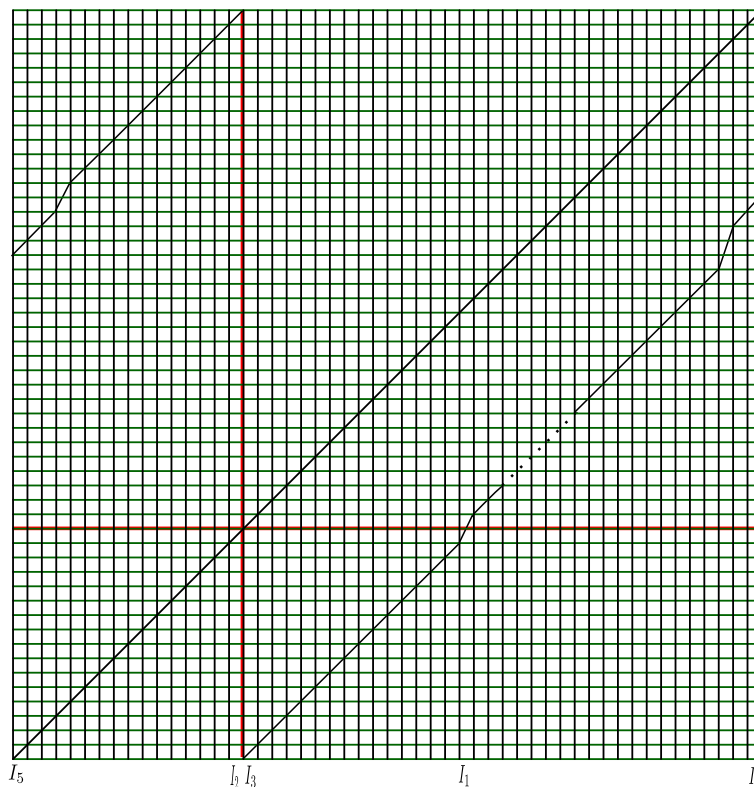
• Caso general para l , tenemos $a = \underline{(01_l)_2 01_{l+1}}$, entonces

$$\alpha = \underline{a_{-} b_{+} a} = \underline{(01_l)_3 01_{l+1} 01_l 01_{l+1} (01_l)_2 01_{l+1}}, Per(\alpha) = 9l + 12 = t$$

$$\alpha_{-\underline{\beta}} = (01_l)_3 01 \underline{(1_l 0)_2 1_{l+1} (01_l)_3 01_{l+1} 01_l 01_{l+1} 0}$$

$$\beta_{+\underline{\alpha}} = 1_{l+1} 01_l 01_{l+1} 0 \underline{(1_l 0)_2 1_{l+1} (01_l)_2 01_{l+1} (01_l)_3 01}$$

El gráfico asociado es:



Del gráfico tenemos que:

I_1 es el intervalo del lado derecho de la discontinuidad que va a dos intervalos $I_1 \rightarrow I_2$

e $I_1 \rightarrow I_3$

I_2 es el intervalo anterior a la discontinuidad, $I_2 \rightarrow I_4$

I_3 es el intervalo posterior a la discontinuidad $I_3 \rightarrow I_5$

I_4 es el último intervalo, $I_4 \rightarrow I_6$

I_5 es el primer intervalo $I_5 \rightarrow I_7$

$I_6 = I_4 - 13$, $I_6 \rightarrow I_8$, $I_8 = I_6 - 15$, $I_7 = I_4 - 16$, $I_7 \rightarrow I_9$, $I_9 = I_7 - 15$

Sucesivamente $I_{6l+7} \rightarrow I_{6l+9} = I_{6l+7} - 15$, $I_{6l+8} \rightarrow I_{6l+10} = I_{6l+8} - 15$, $I_{6l+9} \rightarrow I_{6l+11} = I_2 - 1$

$I_{6l+10} \rightarrow I_{6l+12} = I_5 + 2$, $I_{6l+11} \rightarrow I_{6l+13} = I_4 - 1$, $I_{6l+12} \rightarrow I_{6l+14} = I_4 - 14$

$I_{6l+13} \rightarrow I_{6l+14}$, $I_{6l+14} \rightarrow I_{6l+15} = I_{6l+14} - 15$, \dots , $I_{12l+18} \rightarrow I_1$.

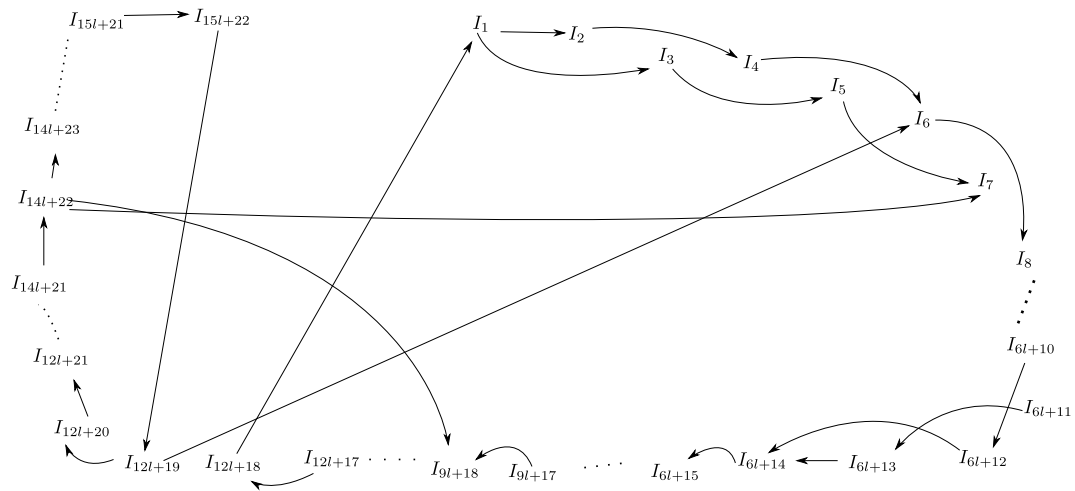
I_{12l+19} es el intervalo del lado izquierdo de la discontinuidad que va a dar a dos intervalos

$I_{12l+19} \rightarrow I_6$ e $I_{12l+19} \rightarrow I_{12l+20} = I_4 - 12$

$I_{12l+20} \rightarrow I_{12l+21} = I_{12l+20} - 15$, \dots , $I_{14l+19} \rightarrow I_{14l+20} = I_{14l+19} - 15$, $I_{14l+20} \rightarrow I_{14l+21} = I_2 - 3$, $I_{14l+21} \rightarrow I_{14l+22} = I_4 - 2$, $I_{14l+22} \rightarrow I_{9l+18}$, $I_{14l+22} \rightarrow I_7$, e $I_{14l+22} \rightarrow I_{14l+23} =$

$I_{14l+22} - 15$, \dots , $I_{15l+22} \rightarrow I_{12l+19}$

Así tenemos el siguiente grafo



Del grafo tenemos que la Roma es $R = \{I_1, I_{15l+22}\}$, $a_{1,1} = 2x^{-(9l+12)}$, $a_{15l+22,15l+22} = x^{-(3l+4)}$ y el polinomio característico es

$$\begin{aligned}
 p(x) &= (-1)^{15l+22-1} \cdot x^{15l+22} \cdot \det \begin{pmatrix} 2x^{-(9l+12)} - 1 & 0 \\ a_{15l+22,1} & x^{-(3l+4)} - 1 \end{pmatrix} \\
 &= (-1)^{15l+21} \cdot x^{3l+6} \cdot (2 - x^{9l+12}) \cdot (1 - x^{3l+4})
 \end{aligned}$$

Así la mayor raíz real es $x = \sqrt[9l+12]{2}$

$$\text{Luego } h_{top}(\underline{\alpha}, \underline{\beta}) = \frac{\log(2)}{Per(\alpha)} = \frac{1}{9l+12} \log(2)$$

Caso general n

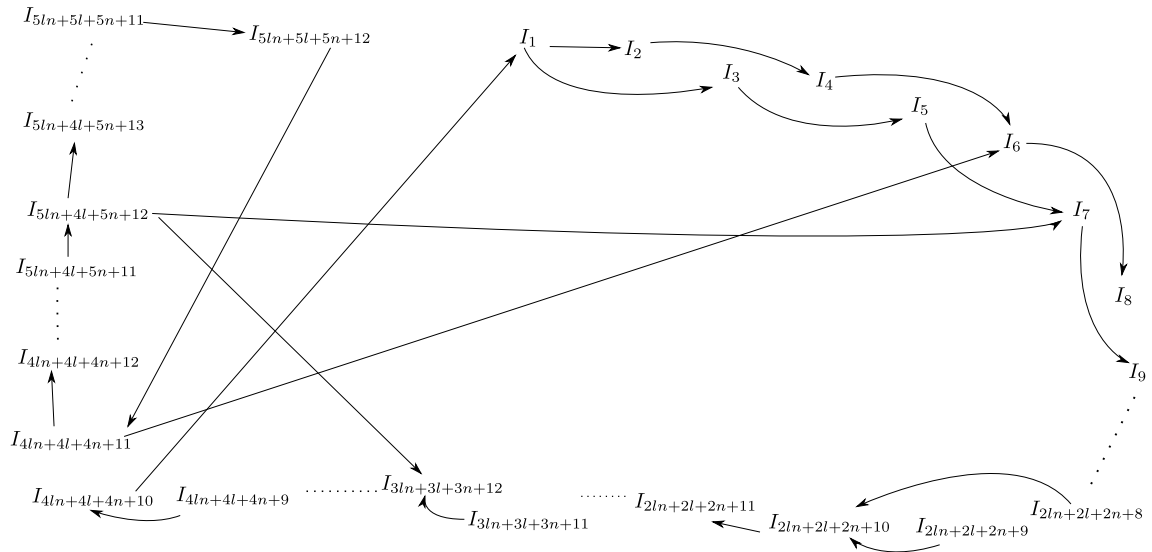
• Si $a = \underline{(01_l)_n 01_{l+1}}$, entonces $\alpha = \underline{a_{-b+a}} = \underline{(01_l)_{n+1} 01_{l+1} (01_l)_{n-1} 01_{l+1} (01_l)_n 01_{l+1}}$,
 $Per(\alpha) = 3ln + 3l + 3n + 6 = t$

$$\underline{\alpha_{-\beta}} = \underline{(01_l)_{n+1} 01_{l+1} (01_l)_{n-1} 01_{l+1} (01_l)_{n+1} 01_{l+1} (01_l)_{n-1} 01_{l+1} 0}$$

$$\underline{\beta_{+\alpha}} = \underline{1_{l+1} (01_l)_{n-1} 01_{l+1} 01_l (01_l)_{n-1} 01_{l+1} (01_l)_n 01_{l+1} (01_l)_{n+1} 01}$$

El gráfico asociado con su respectivo grafo es:





Del grafo tenemos que la Roma es $R = \{I_1, I_{5ln+5l+5n+12}\}$, sea $h = 5ln + 5l + 5n + 12$, $a_{1,1} = 2x^{-(3ln+3l+3n+6)}$, $a_{h,h} = x^{-(ln+l+n+2)}$ y el polinomio característico es

$$\begin{aligned}
 p(x) &= (-1)^{h-1} \cdot x^h \cdot \det \begin{pmatrix} a_{1,1} - 1 & 0 \\ a_{h,1} & a_{h,h} - 1 \end{pmatrix} \\
 &= (-1)^{h-1} \cdot x^{ln+l+n+4} \cdot (2 - x^{3ln+3l+3n+6}) \cdot (1 - x^{ln+l+n+2})
 \end{aligned}$$

Así la mayor raíz real es $x = \sqrt[3ln+3l+3n+6]{2}$

$$\text{Luego } h_{top}(\alpha_{-}\underline{\beta}, \beta_{+}\underline{\alpha}) = \frac{\log(2)}{Per(\alpha)} = \frac{1}{3ln + 3l + 3n + 6} \log(2)$$

Analogamente se prueba el resultado para $\alpha = \underline{a} \underline{bb}_{+}$.

- Si $i = 4$ entonces $k_1 = 2$ o $k_1 = 4$

Si $k_1 = 4$, entonces p^k genera a la sucesión $a = \underline{(01_l)_n 01_{l+1}}$, donde $n = \frac{t-k}{4} - 1$, y a genera a las sucesiones $\alpha_1 = \underline{a}_{-} \underline{b}_{+} a^2$ y $\alpha_2 = \underline{a}_{-} b^2 \underline{b}_{+}$ tales que $Per(\alpha_1) = Per(\alpha_2) = 4ln + 4n + 6l + 10 = t$.

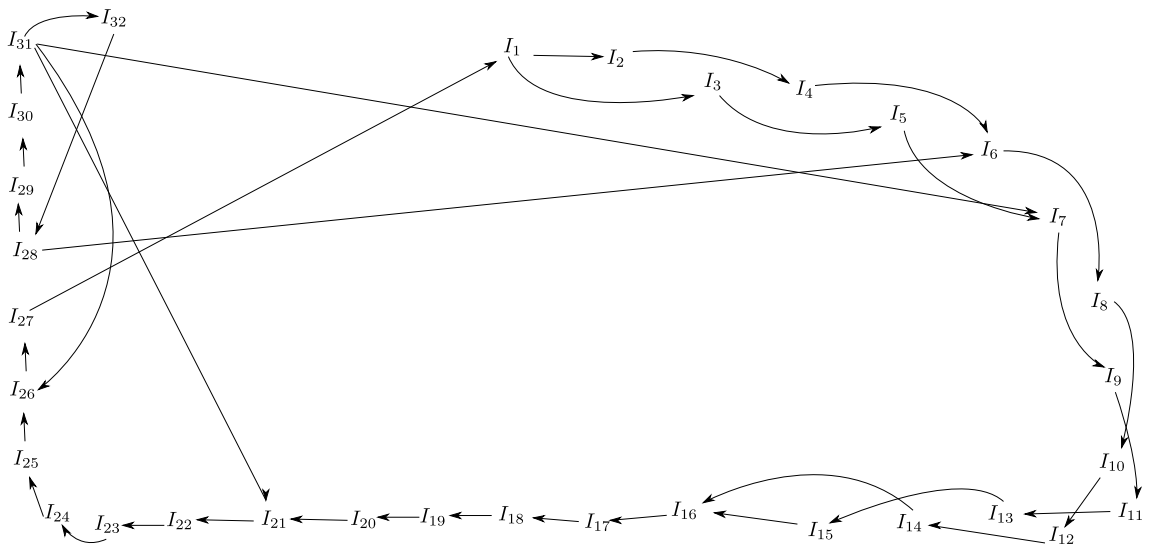
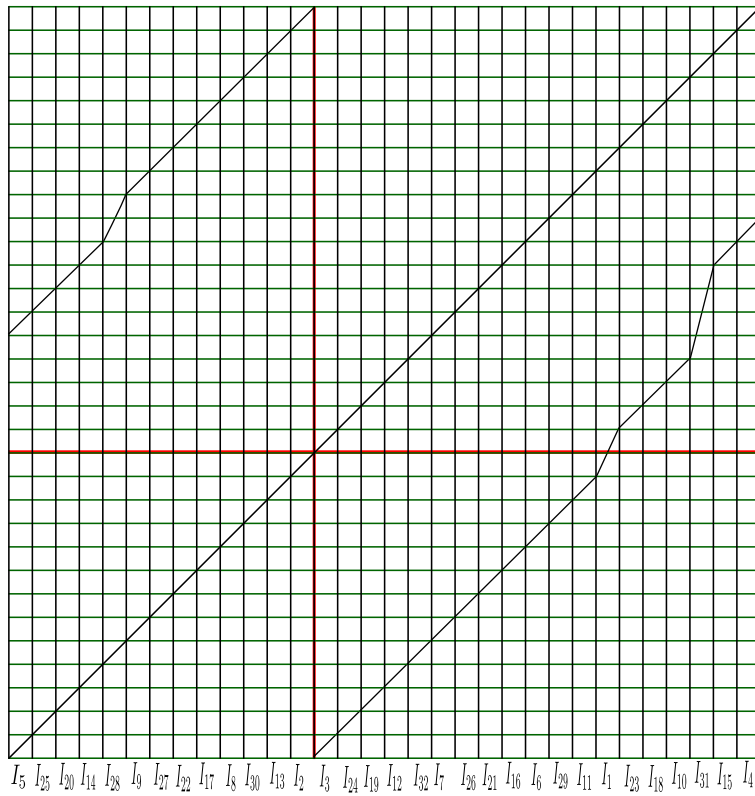
Caso $n = 1$

- Si $l = 1$, tenemos $a = \underline{01011}$, entonces $\alpha = \underline{a}_{-} \underline{b}_{+} a^2 = \underline{010101_2 01_2 0101_2 0101_2}$, $Per(\alpha) = 20$

$$\alpha_{-}\underline{\beta} = (01)_3 \underline{101_2 0101_2 0101_2 01_2 0}$$

$$\beta_{+}\underline{\alpha} = (110)_2 \underline{101_2 0101_2 0101_2} (01)_3$$

El gráfico asociado con su respectivo grafo es:



Del grafo tenemos que la Roma es $R = \{I_1, I_{32}\}$, $a_{1,1} = 2x^{-20}$, $a_{32,32} = x^{-5}$ y el polinomio característico es

$$\begin{aligned}
 p(x) &= (-1)^{32-1} \cdot x^{32} \cdot \det \begin{pmatrix} 2x^{-20} - 1 & 0 \\ a_{32,1} & x^{-5} - 1 \end{pmatrix} \\
 &= -x^7 \cdot (2 - x^{20}) \cdot (1 - x^5)
 \end{aligned}$$

Así la mayor raíz real es $x = \sqrt[20]{2}$

$$\text{Luego } h_{top}(\underline{\alpha}, \underline{\beta}, \overline{\beta}, \overline{\alpha}) = \frac{\log(2)}{\text{Per}(\alpha)} = \frac{1}{20} \log(2)$$

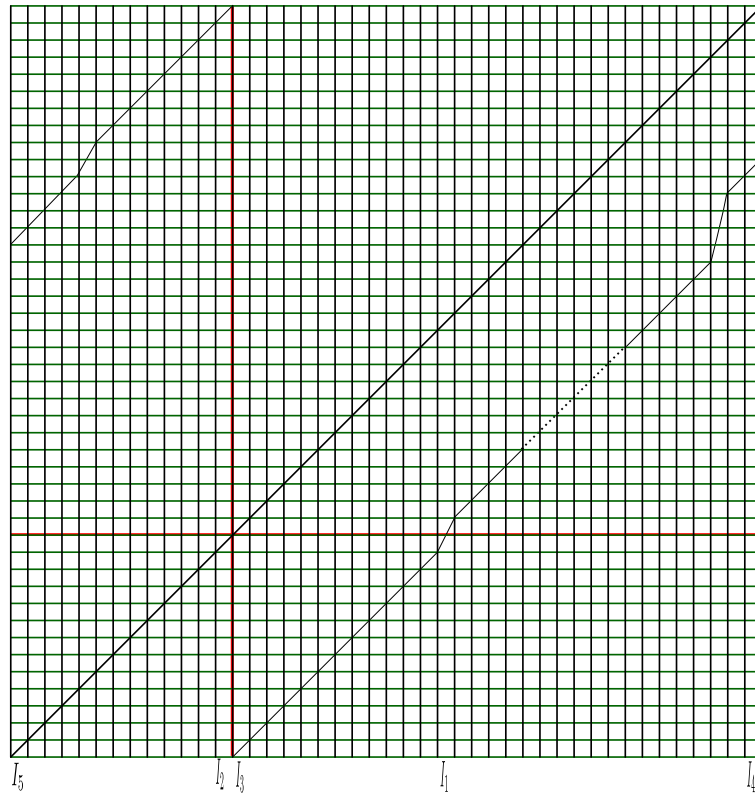
• Caso general para l , tenemos $a = \underline{01_l 01_{l+1}}$, entonces

$$\alpha = \underline{a_- b_+ a^2} = \underline{(01_l)_2 (01_{l+1})_2 01_l 01_{l+1} 01_l 01_{l+1}}, \text{Per}(\alpha) = 8l + 12 = t$$

$$\underline{\alpha_- \underline{\beta}} = (01_l)_2 01_l 01_{l+1} 01_l 01_{l+1} (01_l)_2 (01_{l+1})_2 0$$

$$\overline{\beta_+ \overline{\alpha}} = 1_{l+1} 01_{l+1} \underline{01_l 01_{l+1} 01_l 01_{l+1} 01_l 01_{l+1} (01_l)_2 01}$$

El gráfico asociado es:



Del gráfico tenemos que:

I_1 es el intervalo del lado derecho de la discontinuidad que va a dos intervalos $I_1 \rightarrow I_2$ e $I_1 \rightarrow I_3$

I_2 es el intervalo anterior a la discontinuidad, $I_2 \rightarrow I_4$

I_3 es el intervalo posterior a la discontinuidad $I_3 \rightarrow I_5$

I_4 es el último intervalo, $I_4 \rightarrow I_6$

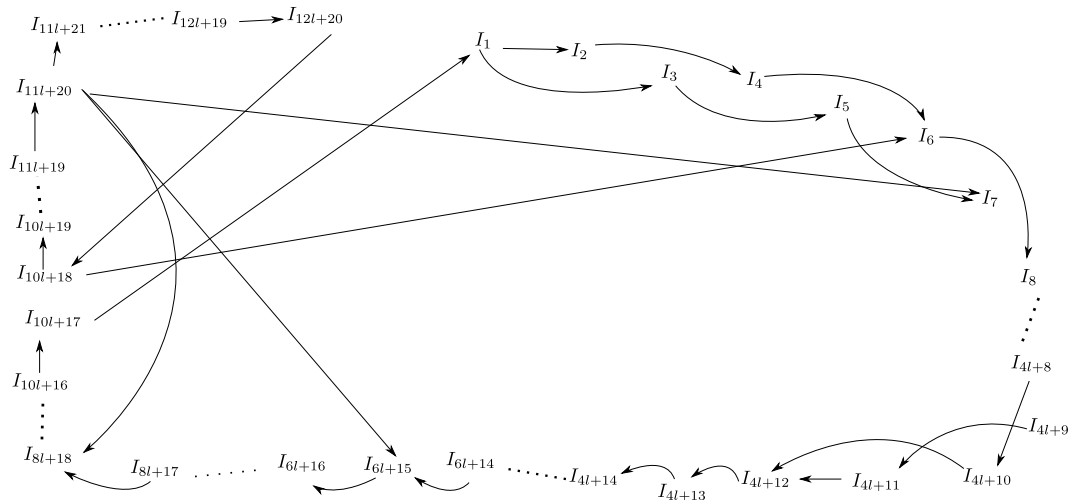
I_5 es el primer intervalo $I_5 \rightarrow I_7$

$$I_6 = I_4 - 9, I_6 \rightarrow I_8, I_8 = I_6 - 12, I_7 = I_4 - 13, I_7 \rightarrow I_9, I_9 = I_7 - 12$$

Sucesivamente $I_{4l+6} \rightarrow I_{4l+8} = I_{4l+6} - 12, I_{4l+5} \rightarrow I_{4l+7} = I_{4l+5} - 12, I_{4l+8} \rightarrow I_{4l+10} = I_5 + 3, I_{4l+7} \rightarrow I_{4l+9} = I_2 - 1, I_{4l+10} \rightarrow I_{4l+12} = I_6 - 1, I_{4l+9} \rightarrow I_{4l+11} = I_4 - 1, I_{4l+11} \rightarrow I_{4l+12}, I_{4l+12} \rightarrow I_{4l+13} = I_{4l+12} - 12, \dots, I_{10l+17} \rightarrow I_1$

I_{10l+18} es el intervalo del lado izquierdo de la discontinuidad que va a dar a dos intervalos $I_{10l+18} \rightarrow I_6$ e $I_{10l+18} \rightarrow I_{10l+19} = I_6 + 1, I_{10l+19} \rightarrow I_{10l+20} = I_{10l+19} - 12, \dots, I_{11l+17} \rightarrow I_{11l+18} = I_{11l+17} - 12, I_{11l+18} \rightarrow I_{11l+19} = I_2 - 2, I_{11l+19} \rightarrow I_{11l+20} = I_4 - 2, I_{11l+20} \rightarrow I_{6l+15}, I_{11l+20} \rightarrow I_{8l+18}, I_{11l+20} \rightarrow I_7$ e $I_{11l+20} \rightarrow I_{11l+21} = I_{11l+20} - 12, \dots, I_{12l+20} \rightarrow I_{10l+18}$

Así tenemos el siguiente grafo



Del grafo tenemos que la Roma es $R = \{I_1, I_{12l+20}\}$, $a_{1,1} = 2x^{-(8l+12)}$, $a_{12l+20,12l+20} = x^{-(2l+3)}$ y el polinomio característico es

$$p(x) = (-1)^{12l+20-1} \cdot x^{12l+20} \cdot \det \begin{pmatrix} 2x^{-(8l+12)} - 1 & 0 \\ a_{12l+20,1} & x^{-(2l+3)} - 1 \end{pmatrix}$$

$$= -x^{2l+5} \cdot (2 - x^{8l+12}) \cdot (1 - x^{2l+3})$$

Así la mayor raíz real es $x = \sqrt[8l+12]{2}$

$$\text{Luego } h_{top}(\underline{\alpha}, \underline{\beta}) = \frac{\log(2)}{Per(\underline{\alpha})} = \frac{1}{8l+12} \log(2)$$

Caso $n = 2$

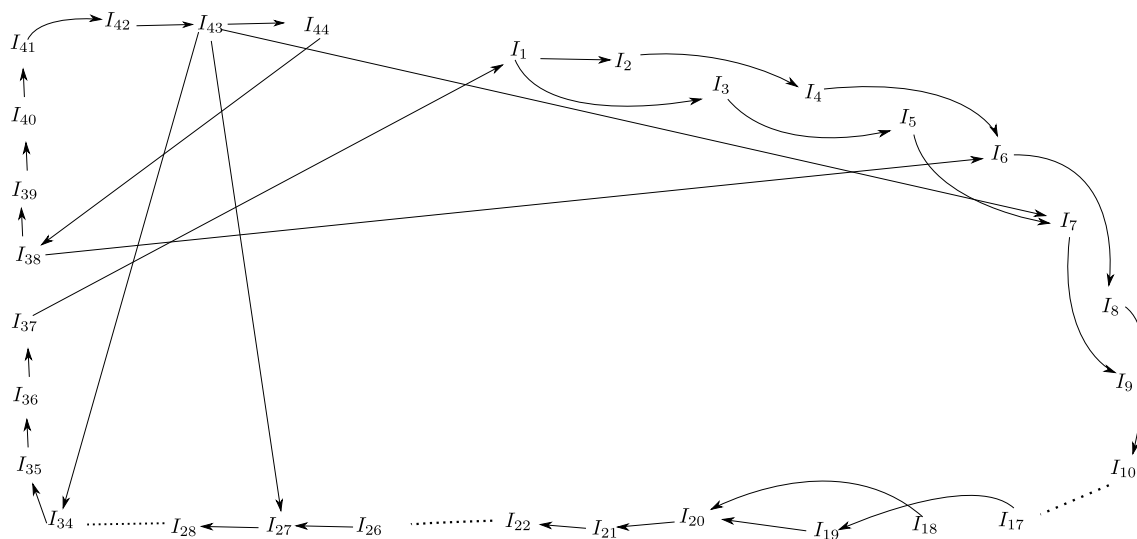
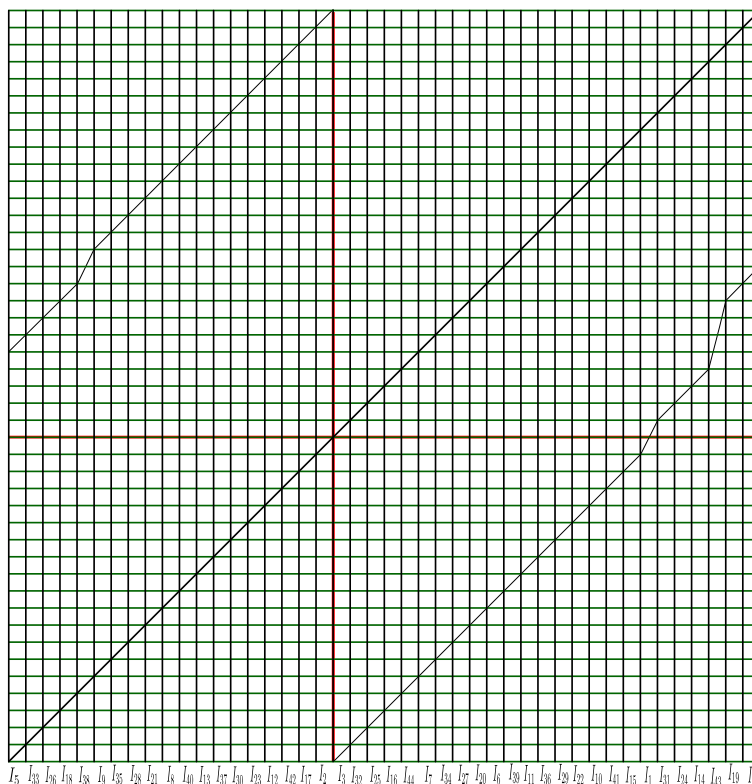
- Si $l = 1$, tenemos $a = \underline{(01)_2 011}$, entonces $\alpha = \underline{a} \cdot \underline{b} \cdot \underline{a}^2 = \underline{(01)_3 01_2 01_1 01_2 (01)_2 01_2 (01)_2 01_2}$,

$$Per(\alpha) = 28$$

$$\alpha_{-\beta} = (01)_4 \underline{101011(01)_2 01_2(01)_3 011010110}$$

$$\beta_{+\alpha} = 11010110(10)_2 \underline{11(01)_2 011(01)_2 011(01)_4}$$

El gráfico asociado con su respectivo grafo es:



Del grafo tenemos que la Roma es $R = \{I_1, I_{44}\}$, $a_{1,1} = 2x^{-28}$, $a_{44,44} = x^{-7}$ y el polinomio característico es

$$p(x) = (-1)^{44-1} \cdot x^{44} \cdot \det \begin{pmatrix} 2x^{-28} - 1 & 0 \\ a_{37,1} & x^{-7} - 1 \end{pmatrix}$$

$$= -x^9 \cdot (2 - x^{28}) \cdot (1 - x^7)$$

Así la mayor raíz real es $x = \sqrt[28]{2}$

Luego $h_{top}(\alpha_{-\underline{\beta}}, \beta_{+\underline{\alpha}}) = \frac{\log(2)}{Per(\alpha)} = \frac{1}{28} \log(2)$

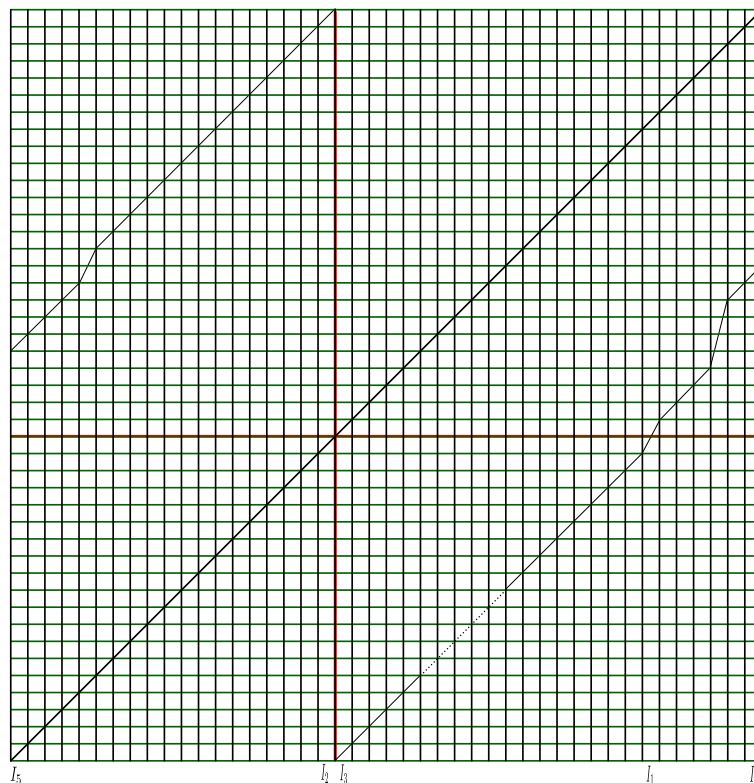
• Caso general para l , $a = \underline{(01_l)_2 01_{l+1}}$, entonces

$$\alpha = \underline{a_- b_+ a^2} = \underline{(01_l)_3 01_{l+1} 01_l 01_{l+1} (01_l)_2 01_{l+1} (01_l)_2 01_{l+1}}, Per(\alpha) = 12l + 16 = t$$

$$\alpha_{-\underline{\beta}} = \underline{(01_l)_3 01_l (1_l)_2 1_{l+1} (01_l)_2 01_{l+1} (01_l)_3 01_{l+1} 01_l 01_{l+1} 0}$$

$$\beta_{+\underline{\alpha}} = \underline{1_{l+1} 01_l 01_{l+1} 0 (1_l)_2 1_{l+1} 0 (1_l)_2 1_{l+1} 0 (1_l)_2 1_{l+1} 0 (01_l)_3 01_l}$$

El gráfico asociado es:



Del gráfico tenemos que:

I_1 es el intervalo del lado derecho de la discontinuidad que va a dos intervalos $I_1 \rightarrow I_2$ e $I_1 \rightarrow I_3$

I_2 es el intervalo anterior a la discontinuidad, $I_2 \rightarrow I_4$

I_3 es el intervalo posterior a la discontinuidad $I_3 \rightarrow I_5$

I_4 es el último intervalo, $I_4 \rightarrow I_6$

I_5 es el primer intervalo $I_5 \rightarrow I_7$

$I_6 = I_4 - 15$, $I_6 \rightarrow I_8$, $I_8 = I_6 - 18$, $I_7 = I_4 - 19$, $I_7 \rightarrow I_9$, $I_9 = I_7 - 18$

Sucesivamente $I_{6l+7} \rightarrow I_{6l+9} = I_{6l+7} - 18$, $I_{6l+8} \rightarrow I_{6l+10} = I_{6l+8} - 18$, $I_{6l+9} \rightarrow I_{6l+11} = I_2 - 1$

$I_{6l+10} \rightarrow I_{6l+12} = I_5 + 3$, $I_{6l+11} \rightarrow I_{6l+13} = I_4 - 1$, $I_{6l+12} \rightarrow I_{6l+14} = I_6 - 1$

$I_{6l+13} \rightarrow I_{6l+14}$, $I_{6l+14} \rightarrow I_{6l+15} = I_{6l+14} - 18$, \dots , $I_{15l+22} \rightarrow I_1$.

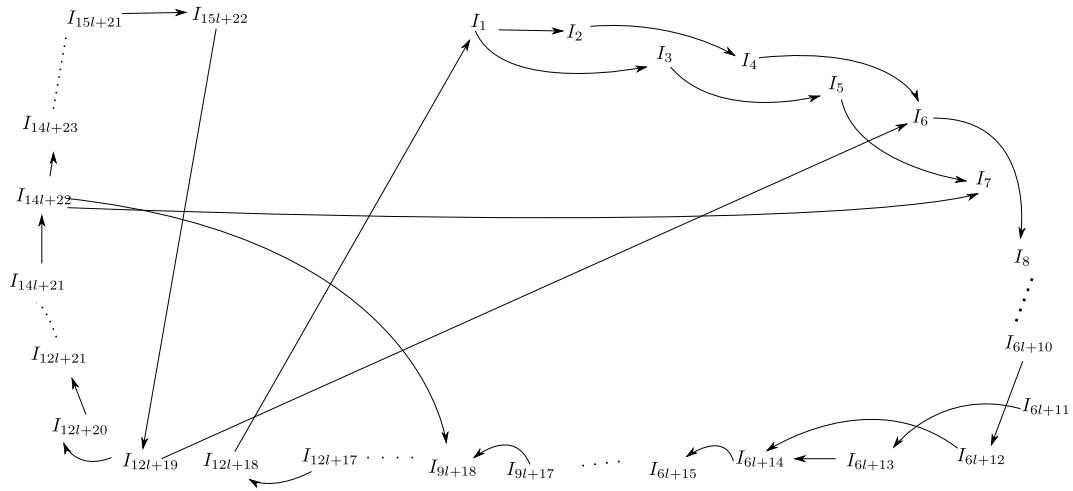
I_{15l+23} es el intervalo del lado izquierdo de la discontinuidad que va a dar a dos intervalos

$I_{15l+23} \rightarrow I_6$ e $I_{15l+23} \rightarrow I_{15l+24} = I_6 + 1$

$I_{15l+24} \rightarrow I_{15l+25} = I_{15l+24} - 18$, \dots , $I_{17l+23} \rightarrow I_{17l+24} = I_{17l+23} - 18$, $I_{17l+24} \rightarrow I_{17l+25} = I_2 - 2$, $I_{17l+25} \rightarrow I_{17l+26} = I_4 - 2$, $I_{17l+26} \rightarrow I_{9l+18}$, $I_{17l+26} \rightarrow I_{12l+22}$, $I_{17l+26} \rightarrow I_7$, e

$I_{17l+26} \rightarrow I_{17l+27} = I_7 - 1$, \dots , $I_{18l+26} \rightarrow I_{15l+23}$

Así tenemos el siguiente grafo



Del grafo tenemos que la Roma es $R = \{I_1, I_{18l+26}\}$, $a_{1,1} = 2x^{-(12l+16)}$, $a_{18l+26,18l+26} = x^{-(3l+4)}$ y el polinomio característico es

$$\begin{aligned}
 p(x) &= (-1)^{18l+26-1} \cdot x^{18l+26} \cdot \det \begin{pmatrix} 2x^{-(12l+16)} - 1 & 0 \\ a_{18l+26,1} & x^{-(3l+4)} - 1 \end{pmatrix} \\
 &= -x^{3l+6} \cdot (2 - x^{12l+16}) \cdot (1 - x^{3l+4})
 \end{aligned}$$

Así la mayor raíz real es $x = \sqrt[12l+16]{2}$

$$\text{Luego } h_{top}(\underline{\alpha-\beta}, \underline{\beta+\alpha}) = \frac{\log(2)}{\text{Per}(\alpha)} = \frac{1}{12l+16} \log(2)$$

Caso general para n

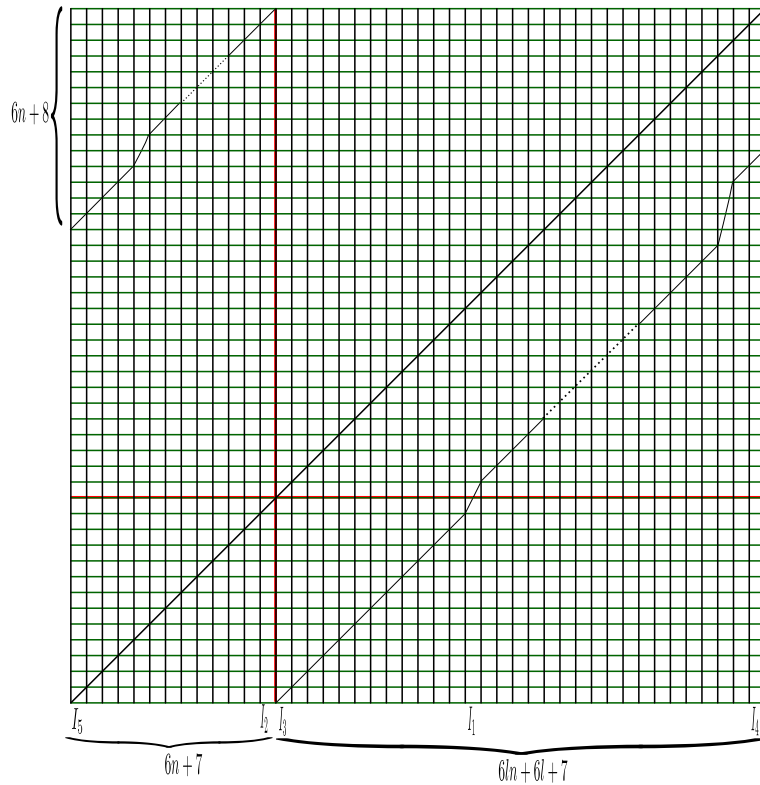
• Si $a = \underline{(01_l)_n 01_{l+1}}$, entonces

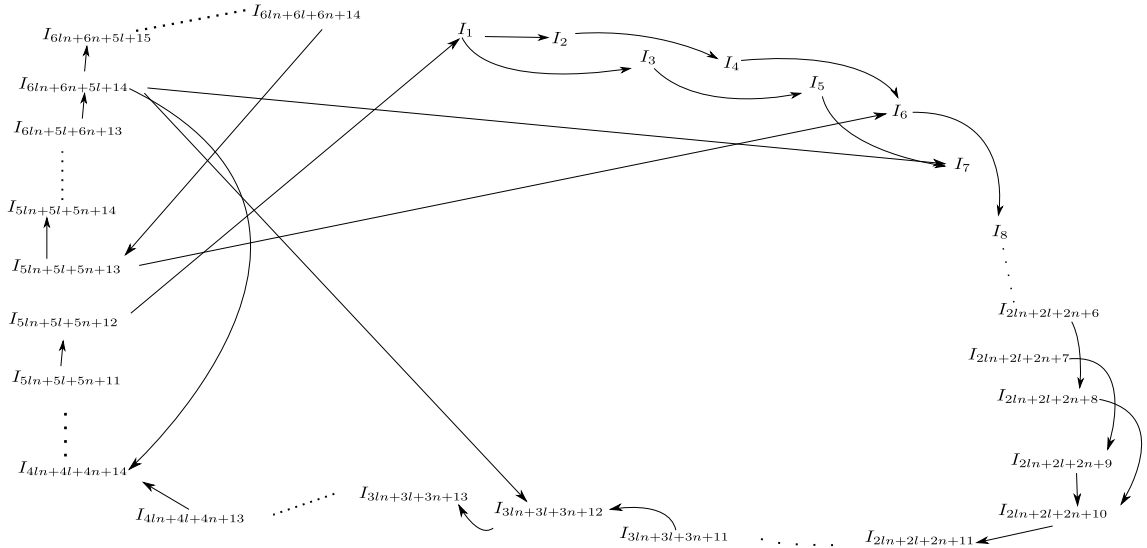
$$\alpha = \underline{a_- b_+ a^2} = \underline{(01_l)_{n+1} 01_{l+1} (01_l)_{n-1} 01_{l+1} (01_l)_n 01_{l+1} (01_l)_n 01_{l+1}}, \text{Per}(\alpha) = 4ln + 4l + 4n + 8 = t$$

$$\underline{\alpha-\beta} = (01_l)_{n+1} \underline{011_l (01_l)_{n-1} 01_{l+1} (01_l)_n 01_{l+1} (01_l)_{n+1} 01_{l+1} (01_l)_{n-1} 01_{l+1} 0}$$

$$\underline{\beta+\alpha} = 1_{l+1} (01_l)_{n-1} 01_{l+1} \underline{01_l (01_l)_{n-1} 01_{l+1} (01_l)_n 01_{l+1} (01_l)_n 01_{l+1} (01_l)_{n+1} 01}$$

El gráfico asociado con su respectivo grafo es:





Del grafo tenemos que la Roma es $R = \{I_1, I_{6ln+6l+6n+14}\}$, sea $h = 6ln + 6l + 6n + 14$, $a_{1,1} = 2x^{-(4ln+4l+4n+8)}$, $a_{h,h} = x^{-(ln+l+n+3)}$ y el polinomio característico es

$$\begin{aligned}
 p(x) &= (-1)^{h-1} \cdot x^h \cdot \det \begin{pmatrix} a_{1,1} - 1 & 0 \\ a_{h,1} & a_{h,h} - 1 \end{pmatrix} \\
 &= -x^{ln+l+n+3} \cdot (2 - x^{4ln+4l+4n+8}) \cdot (1 - x^{ln+l+n+3})
 \end{aligned}$$

Así la mayor raíz real es $x = \sqrt[4ln+4l+4n+8]{2}$

$$\text{Luego } h_{top}(\underline{\alpha}, \underline{\beta}, \underline{\beta}, \underline{\alpha}) = \frac{\log(2)}{Per(\alpha)} = \frac{1}{4ln + 4l + 4n + 8} \log(2)$$

Analogamente se prueba el resultado para $\alpha = \underline{a_- b^2 b_+}$.

- Si $k_1 = 2$, entonces p^k genera a la sucesión $a = \underline{(01_l)_{n+1} 01_{l+1} (01_l)_n 01_{l+1}}$, donde $n = \frac{t - k - 2}{4} - 1$, y a genera a la sucesión $\alpha = \underline{a_- b_+}$ tales que $Per(\alpha) = t$.

Caso $n = 1$

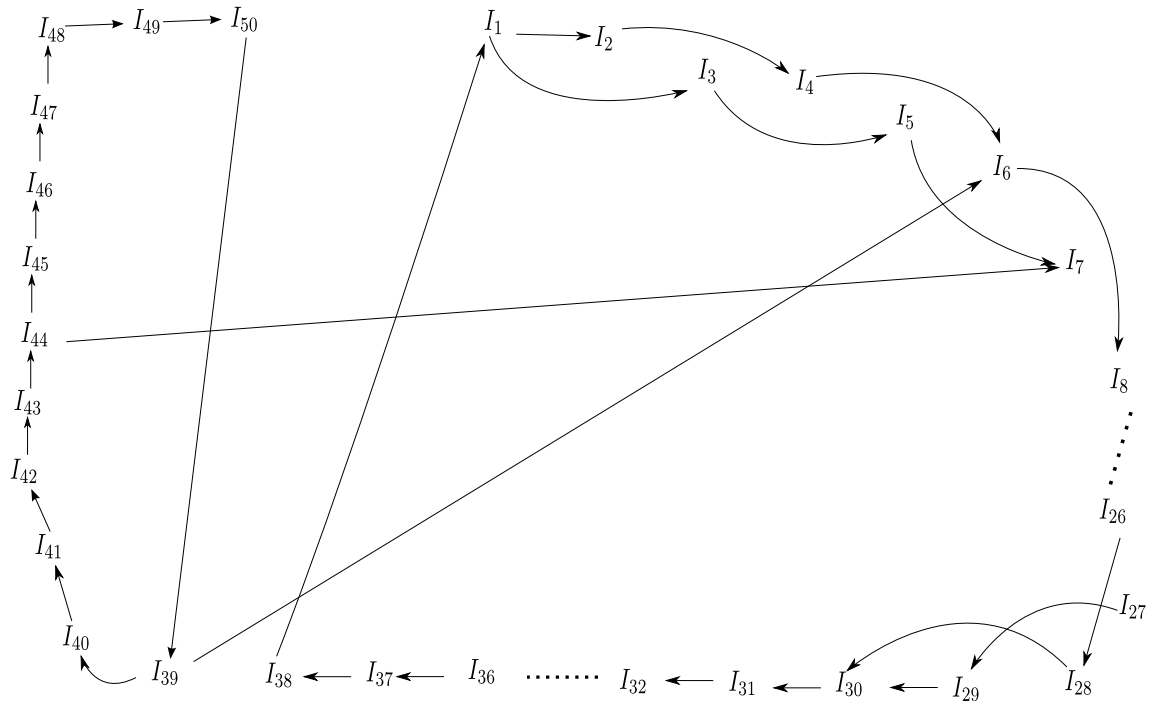
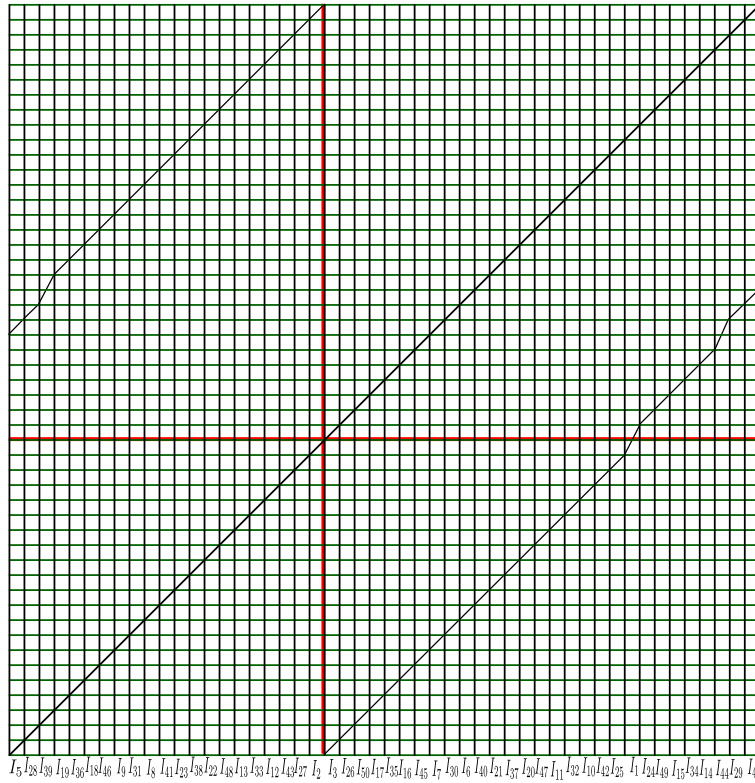
- Si $l = 1$, tenemos $a = \underline{(01)_2 01_2 0101_2}$, entonces $\alpha = \underline{a_- b_+} = \underline{(01)_2 01_2 (01)_2 01_2 0101_2 0101_2}$,

$$Per(\alpha) = 24$$

$$\underline{\alpha_- \underline{\beta}} = (01)_2 01_2 (01)_2 01 \underline{10101_2 (01)_2 01_2 0101_2 0101_2} 0$$

$$\underline{\beta_+ \underline{\alpha}} = 1_2 0101_2 0101_2 010101_2 0101_2 (01)_2 01_2 (01)_3$$

El gráfico asociado con su respectivo grafo es:



Del grafo tenemos que la Roma es $R = \{I_1, I_{50}\}$, $a_{1,1} = 2x^{-24}$, $a_{50,50} = x^{-12}$ y el polinomio característico es

$$\begin{aligned}
 p(x) &= (-1)^{50-1} \cdot x^{50} \cdot \det \begin{pmatrix} 2x^{-24} - 1 & 0 \\ a_{50,1} & x^{-12} - 1 \end{pmatrix} \\
 &= -x^{14} \cdot (2 - x^{24}) \cdot (1 - x^{12})
 \end{aligned}$$

Así la mayor raíz real es $x = \sqrt[24]{2}$

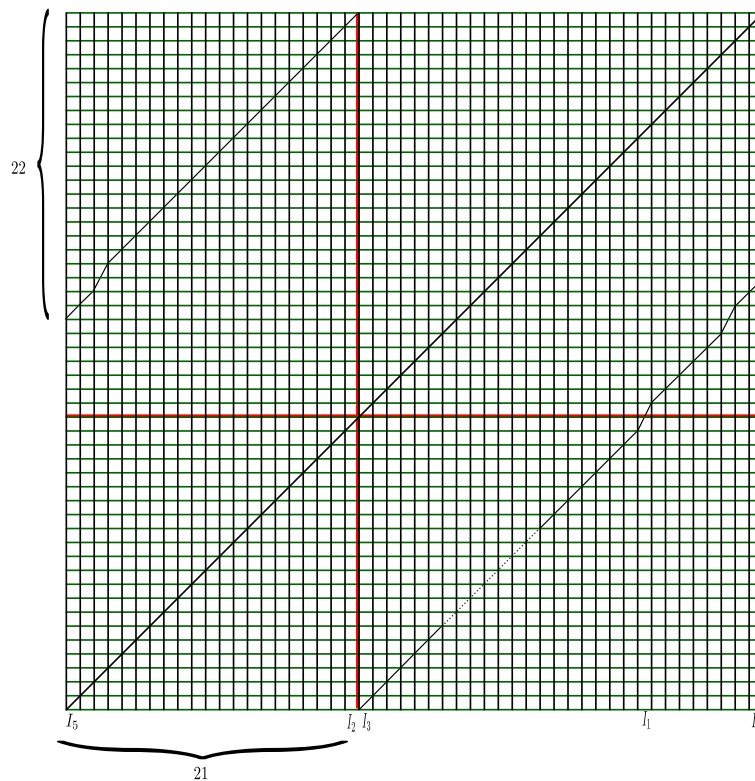
$$\text{Luego } h_{top}(\alpha_{-\underline{\beta}}, \beta_{+\underline{\alpha}}) = \frac{\log(2)}{\text{Per}(\alpha)} = \frac{1}{24} \log(2)$$

• Caso general para l , $a = \underline{(01_l)_2 01_{l+1} 01_l 01_{l+1}}$, entonces $\alpha = \underline{a_{-} b_{+}}$, $\text{Per}(\alpha) = 10l + 14 = t$

$$\alpha_{-\underline{\beta}} = \underline{(01_l)_2 01_{l+1} (01_l)_2 01_l 01_{l+1} (01_l)_2 01_{l+1} 01_l 01_{l+1} 01_l 01_{l+1} 0}$$

$$\beta_{+\underline{\alpha}} = \underline{1_{l+1} 01_l 01_{l+1} 01_l 01_{l+1} 01_l 01_{l+1} 01_l 01_{l+1} (01_l)_2 01_{l+1} (01_l)_2 01}$$

El gráfico asociado es:



Del gráfico tenemos que:

I_1 es el intervalo del lado derecho de la discontinuidad que va a dos intervalos $I_1 \rightarrow I_2$ e $I_1 \rightarrow I_3$

I_2 es el intervalo anterior a la discontinuidad, $I_2 \rightarrow I_4$

I_3 es el intervalo posterior a la discontinuidad $I_3 \rightarrow I_5$

I_4 es el último intervalo, $I_4 \rightarrow I_6$

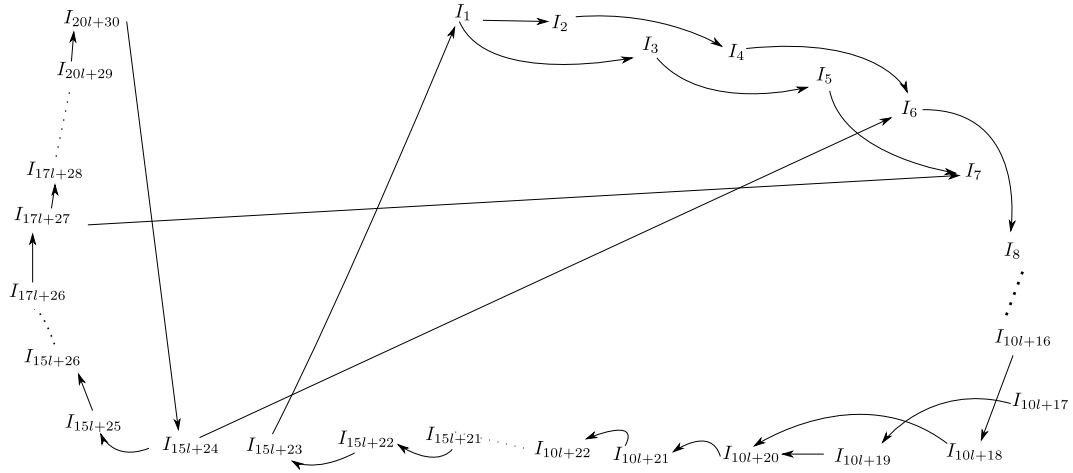
I_5 es el primer intervalo $I_5 \rightarrow I_7$

$I_6 = I_4 - 19$, $I_6 \rightarrow I_8$, $I_8 = I_6 - 20$, $I_7 = I_4 - 21$, $I_7 \rightarrow I_9$, $I_9 = I_7 - 20$

Sucesivamente $I_{10l+13} \rightarrow I_{10l+15} = I_{10l+13} - 20$, $I_{10l+14} \rightarrow I_{10l+16} = I_{10l+14} - 20$, $I_{10l+15} \rightarrow I_{10l+17} = I_2 - 1$, $I_{10l+16} \rightarrow I_{10l+18} = I_5 + 1$, $I_{10l+17} \rightarrow I_{10l+19} = I_4 - 1$, $I_{10l+18} \rightarrow I_{10l+20} = I_6 - 1$, $I_{10l+19} \rightarrow I_{10l+20}$, $I_{10l+20} \rightarrow I_{10l+21} = I_{10l+20} - 20$, \dots , $I_{15l+23} \rightarrow I_1$

I_{15l+24} es el intervalo del lado izquierdo de la discontinuidad que va a dar a dos intervalos $I_{15l+24} \rightarrow I_6$ e $I_{15l+24} \rightarrow I_{15l+25} = I_6 + 1$ $I_{15l+25} \rightarrow I_{15l+26} = I_{15l+25} - 20$, \dots , $I_{17l+24} \rightarrow I_{17l+25} = I_{17l+24} - 20$, $I_{17l+25} \rightarrow I_{17l+26} = I_2 - 2$, $I_{17l+26} \rightarrow I_{17l+27} = I_4 - 2$, $I_{17l+27} \rightarrow I_7$ e $I_{17l+27} \rightarrow I_{17l+28} = I_{17l+27} - 20$, \dots , $I_{20l+29} \rightarrow I_{20l+30} = I_{20l+29} - 20$, $I_{20l+30} \rightarrow I_{15l+24}$

Así tenemos el siguiente grafo



Del grafo tenemos que la Roma es $R = \{I_1, I_{21l+29}\}$, $a_{1,1} = 2x^{-(10l+14)}$, $a_{21l+29,21l+29} = x^{-(6l+6)}$ y el polinomio característico es

$$\begin{aligned}
 p(x) &= (-1)^{21l+29-1} \cdot x^{21l+29} \cdot \det \begin{pmatrix} 2x^{-(10l+14)} - 1 & 0 \\ a_{21l+29,1} & x^{-(6l+6)} - 1 \end{pmatrix} \\
 &= (-1)^{21l+28} \cdot x^{5l+9} \cdot (2 - x^{10l+14}) \cdot (1 - x^{6l+6})
 \end{aligned}$$

Así la mayor raíz real es $x = \sqrt[10l+14]{2}$

$$\text{Luego } h_{top}(\underline{\alpha}, \underline{\beta}, \underline{\beta}, \underline{\alpha}) = \frac{\log(2)}{\text{Per}(\underline{\alpha})} = \frac{1}{10l+14} \log(2).$$

Caso $n = 2$

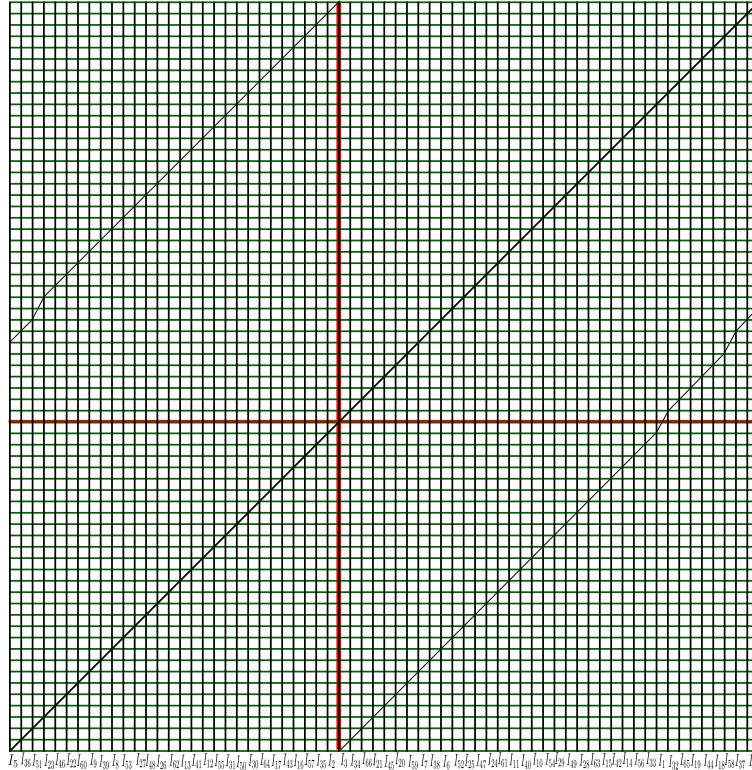
- Si $l = 1$, tenemos $a = \underline{(01)_3 01_2 (01)_2 01_2}$, entonces

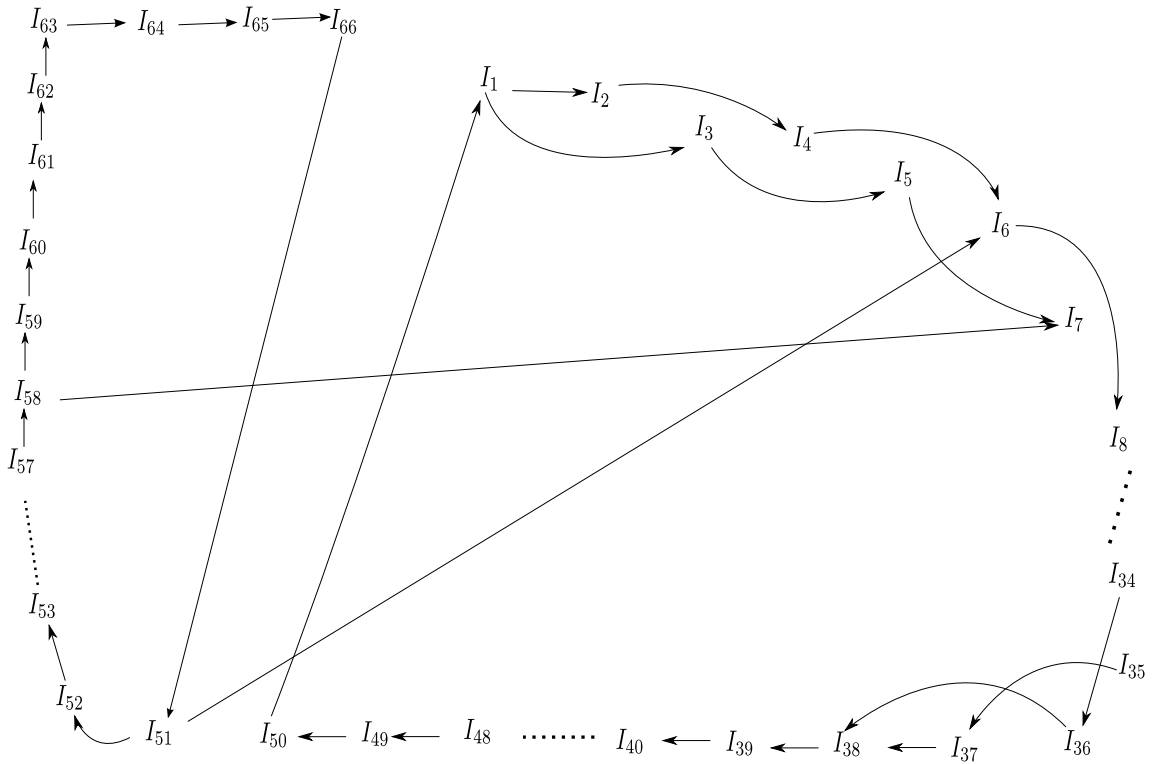
$$\alpha = \underline{a_- b_+} = \underline{(01)_3 01_2 (01)_3 01_2 (01)_2 01_2 (01)_2 01_2}, \text{Per}(\alpha) = 32$$

$$\alpha_- \underline{\beta} = (01)_3 01_2 (01)_4 \underline{1 (01)_2 01_2 (01)_3 01_2 (01)_2 01_2 (01)_2 01_2 0}$$

$$\beta_+ \underline{\alpha} = 1_2 (01)_2 01_2 (01)_2 01_2 01 \underline{(01)_2 01_2 (01)_2 01_2 (01)_3 01_2 (01)_4}$$

El gráfico asociado con su respectivo grafo es:





Del grafo tenemos que la Roma es $R = \{I_1, I_{66}\}$, $a_{1,1} = 2x^{-32}$, $a_{66,66} = x^{-16}$ y el polinomio característico es

$$\begin{aligned} p(x) &= (-1)^{66-1} \cdot x^{66} \cdot \det \begin{pmatrix} 2x^{-32} - 1 & 0 \\ a_{66,1} & x^{-16} - 1 \end{pmatrix} \\ &= -x^{18} \cdot (2 - x^{32}) \cdot (1 - x^{16}) \end{aligned}$$

Así la mayor raíz real es $x = \sqrt[32]{2}$

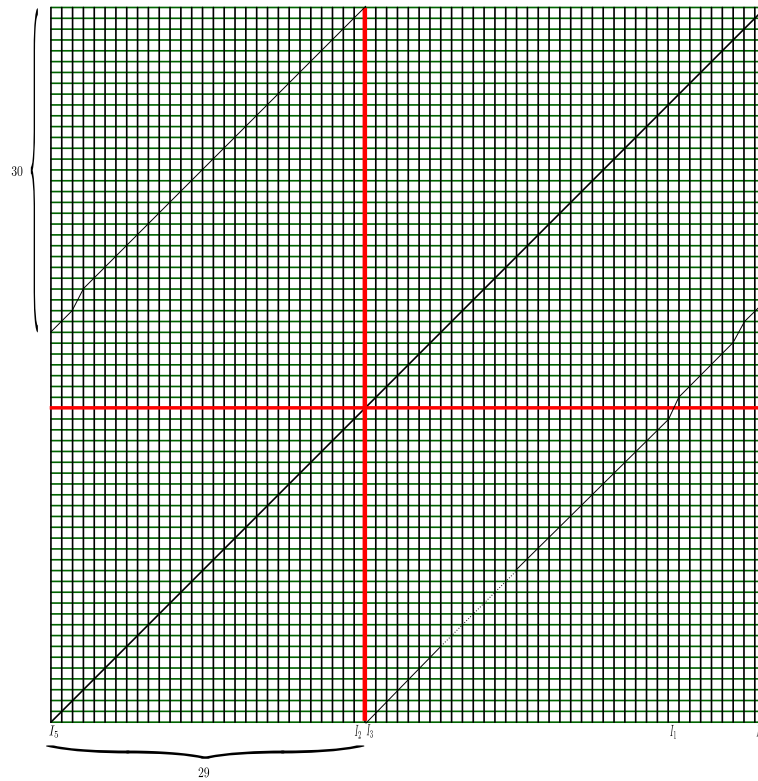
$$\text{Luego } h_{top}(\alpha_{-\underline{\beta}}, \beta_{+\underline{\alpha}}) = \frac{\log(2)}{\text{Per}(\alpha)} = \frac{1}{32} \log(2)$$

• Caso general para l , $a = \underline{(01_l)_3 01_{l+1} (01_l)_2 01_{l+1}}$, entonces $\alpha = \underline{a-b_+}$, $\text{Per}(\alpha) = 14l + 18 = t$

$$\alpha_{-\underline{\beta}} = (01_l)_3 01_{l+1} (01_l)_3 01_{l+1} \underline{(01_l)_2 01_{l+1} (01_l)_3 01_{l+1} (01_l)_2 01_{l+1} (01_l)_2 01_{l+1} 0}$$

$$\beta_{+\underline{\alpha}} = 1_{l+1} (01_l)_2 01_{l+1} (01_l)_2 01_{l+1} \underline{01_l (01_l)_2 01_{l+1} (01_l)_2 01_{l+1} (01_l)_3 01_{l+1} (01_l)_3 01_{l+1}}$$

El gráfico asociado es:



Del gráfico tenemos que:

I_1 es el intervalo del lado derecho de la discontinuidad que va a dos intervalos $I_1 \rightarrow I_2$ e $I_1 \rightarrow I_3$

I_2 es el intervalo anterior a la discontinuidad, $I_2 \rightarrow I_4$

I_3 es el intervalo posterior a la discontinuidad $I_3 \rightarrow I_5$

I_4 es el último intervalo, $I_4 \rightarrow I_6$

I_5 es el primer intervalo $I_5 \rightarrow I_7$

$I_6 = I_4 - 27$, $I_6 \rightarrow I_8$, $I_8 = I_6 - 28$, $I_7 = I_4 - 29$, $I_7 \rightarrow I_9$, $I_9 = I_7 - 28$

Sucesivamente $I_{14l+17} \rightarrow I_{14l+19} = I_{14l+17} - 28$, $I_{14l+18} \rightarrow I_{14l+20} = I_{14l+18} - 28$, $I_{14l+19} \rightarrow$

$I_{14l+21} = I_2 - 1$

$I_{14l+20} \rightarrow I_{14l+22} = I_5 + 1$, $I_{14l+21} \rightarrow I_{14l+23} = I_4 - 1$, $I_{14l+22} \rightarrow I_{14l+24} = I_6 - 1$

$I_{14l+23} \rightarrow I_{14l+24}$, $I_{14l+24} \rightarrow I_{14l+25} = I_{14l+24} - 28$, \dots , $I_{21l+29} \rightarrow I_1$.

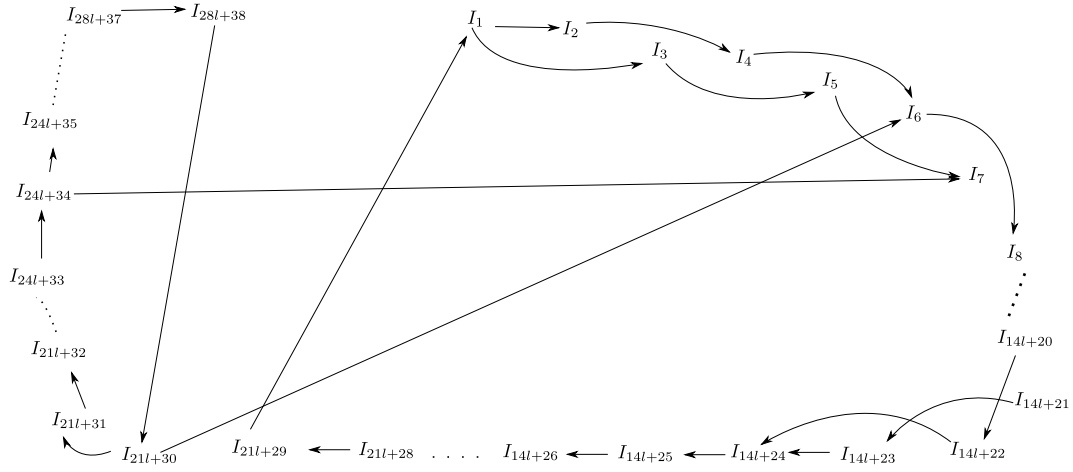
I_{21l+30} es el intervalo del lado izquierdo de la discontinuidad que va a dar a dos intervalos

$I_{21l+30} \rightarrow I_6$ e $I_{21l+30} \rightarrow I_{21l+31} = I_6 + 1$

$I_{21l+31} \rightarrow I_{21l+32} = I_{21l+31} - 28$, \dots , $I_{24l+31} \rightarrow I_{24l+32} = I_{24l+31} - 28$, $I_{24l+32} \rightarrow I_{24l+33} =$

$I_2 - 2, I_{24l+33} \rightarrow I_{24l+34} = I_4 - 2, I_{24l+34} \rightarrow I_7$ e $I_{24l+34} \rightarrow I_{24l+35} = I_{24l+34} - 28, \dots,$
 $I_{28l+38} \rightarrow I_{21l+30}$

Así tenemos el siguiente grafo



Del grafo tenemos que la Roma es $R = \{I_1, I_{28l+38}\}$, $a_{1,1} = 2x^{-(14l+18)}$, $a_{28l+38,28l+38} = x^{-(7l+9)}$ y el polinomio característico es

$$p(x) = (-1)^{28l+38-1} \cdot x^{28l+38} \cdot \det \begin{pmatrix} 2x^{-(14l+18)} - 1 & 0 \\ a_{28l+38,1} & x^{-(7l+9)} - 1 \end{pmatrix}$$

$$= -x^{7l+11} \cdot (2 - x^{14l+18}) \cdot (1 - x^{7l+9})$$

Así la mayor raíz real es $x = \sqrt[14l+18]{2}$

$$\text{Luego } h_{top}(\alpha_{-\underline{\beta}}, \beta_{+\underline{\alpha}}) = \frac{\log(2)}{Per(\alpha)} = \frac{1}{14l+18} \log(2)$$

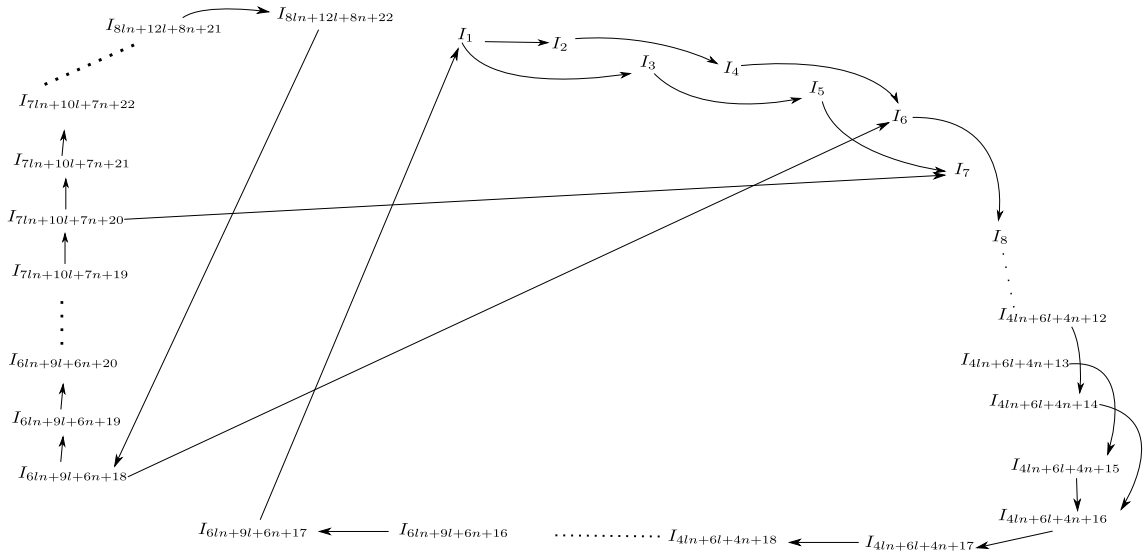
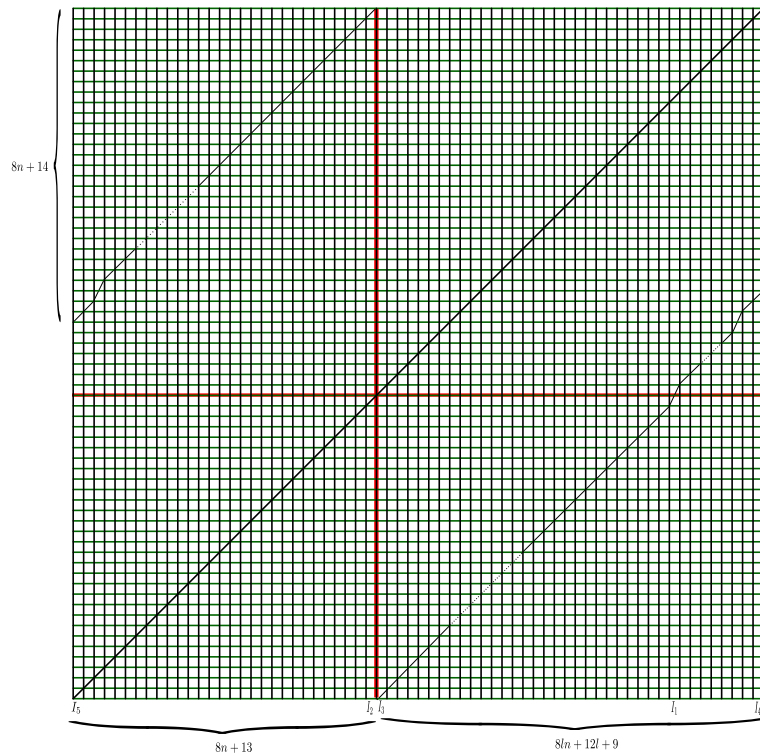
Caso general n

• Tenemos $a = \underline{(01_l)_{n+1} 01_{l+1} (01_l)_n 01_{l+1}}$, entonces $\alpha = \underline{a_- b_+}$, $Per(\alpha) = 4ln + 6l + 4n + 10 = t$

$$\alpha_{-\underline{\beta}} = (01_l)_{n+1} 01_{l+1} (01_l)_{n+1} \underline{01_l (01_l)_n 01_{l+1} (01_l)_{n+1} 01_{l+1} (01_l)_n 01_{l+1} (01_l)_n 01_{l+1} 0}$$

$$\beta_{+\underline{\alpha}} = 1_{l+1} (01_l)_n 01_{l+1} (01_l)_n 01_{l+1} \underline{01_l (01_l)_n 01_{l+1} (01_l)_n 01_{l+1} (01_l)_{n+1} 01_{l+1} (01_l)_{n+1} 01}$$

El gráfico asociado con su respectivo grafo es:



Del grafo tenemos que la Roma es $R = \{I_1, I_{8ln+12l+8n+22}\}$, sea $h = 8ln + 12l + 8n + 22$,

$a_{1,1} = 2x^{-(4ln+6l+4n+10)}$, $a_{h,h} = x^{-(2ln+3l+2n+5)}$ y el polinomio característico es

$$\begin{aligned}
 p(x) &= (-1)^{h-1} \cdot x^h \cdot \det \begin{pmatrix} a_{1,1} - 1 & 0 \\ a_{h,1} & a_{h,h} - 1 \end{pmatrix} \\
 &= -x^{2ln+3l+2n+7} \cdot (2 - x^{4ln+6l+4n+10}) \cdot (1 - x^{2ln+3l+2n+5})
 \end{aligned}$$

Así la mayor raíz real es $x = \sqrt[4ln+6l+4n+10]{2}$

Luego $h_{top}(\alpha_{-\underline{\beta}}, \beta_{+\underline{\alpha}}) = \frac{\log(2)}{Per(\alpha)} = \frac{1}{4ln + 6l + 4n + 10} \log(2)$

Sucesivamente

- Si $i = t - k - 2$ entonces p^k genera a la sucesión $a = \underline{01_l(01_{l+1})_n}$, donde $n = \frac{t - k - 2}{2} - 1$, y a genera a la sucesión $\alpha = \underline{a_{-}b_{+}}$ y $Per(\alpha) = ln + l + 2n + 1 = t$.

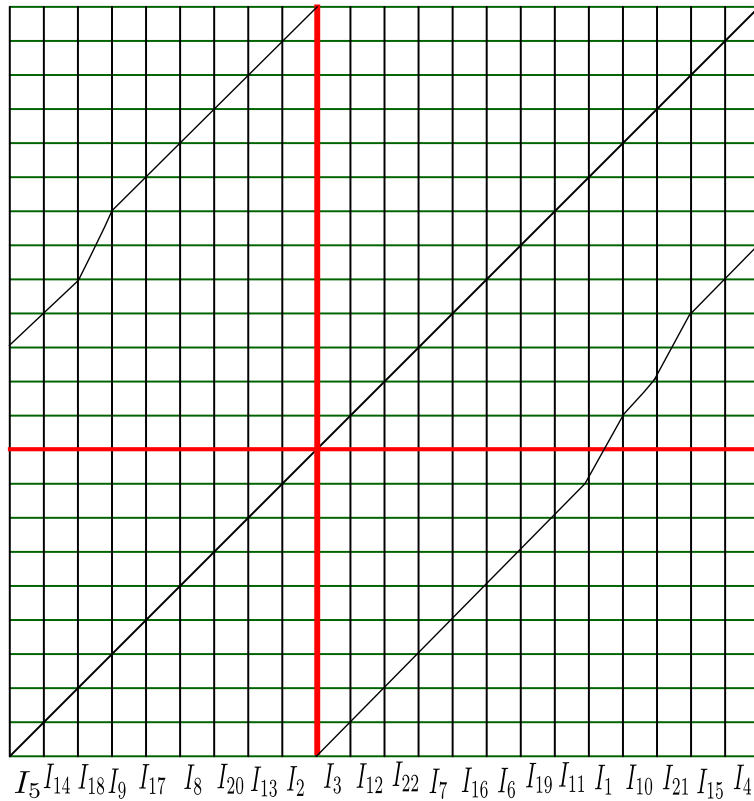
Caso $n = 1$

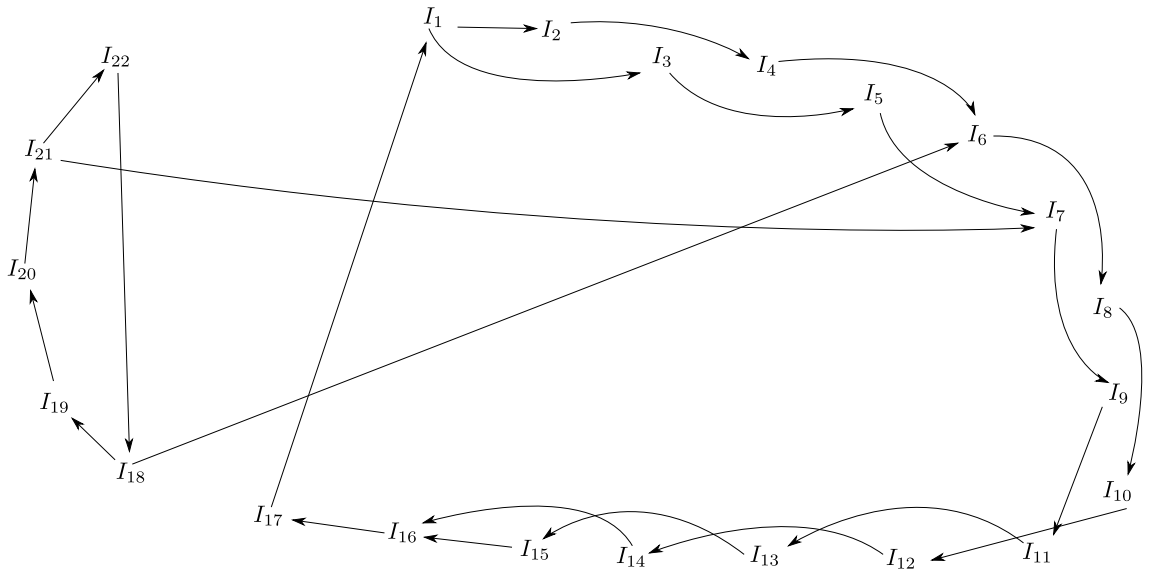
- Si $l = 1$, tenemos $a = \underline{01011}$, entonces $\alpha = \underline{a_{-}b_{+}} = \underline{0101011011}$, $Per(\alpha) = 10$

$\alpha_{-\underline{\beta}} = (01)_3 \underline{1010110110}$

$\beta_{+\underline{\alpha}} = (110)_2 \underline{1011(01)_3}$

El gráfico asociado con su respectivo grafo es:





Del grafo tenemos que la Roma es $R = \{I_1, I_{22}\}$, $a_{1,1} = 2x^{-10}$, $a_{22,22} = x^{-5}$ y el polinomio característico es

$$\begin{aligned}
 p(x) &= (-1)^{22-1} \cdot x^{22} \cdot \det \begin{pmatrix} 2x^{-10} - 1 & 0 \\ a_{22,1} & x^{-5} - 1 \end{pmatrix} \\
 &= -x^7 \cdot (2 - x^{10}) \cdot (1 - x^5)
 \end{aligned}$$

Así la mayor raíz real es $x = \sqrt[10]{2}$

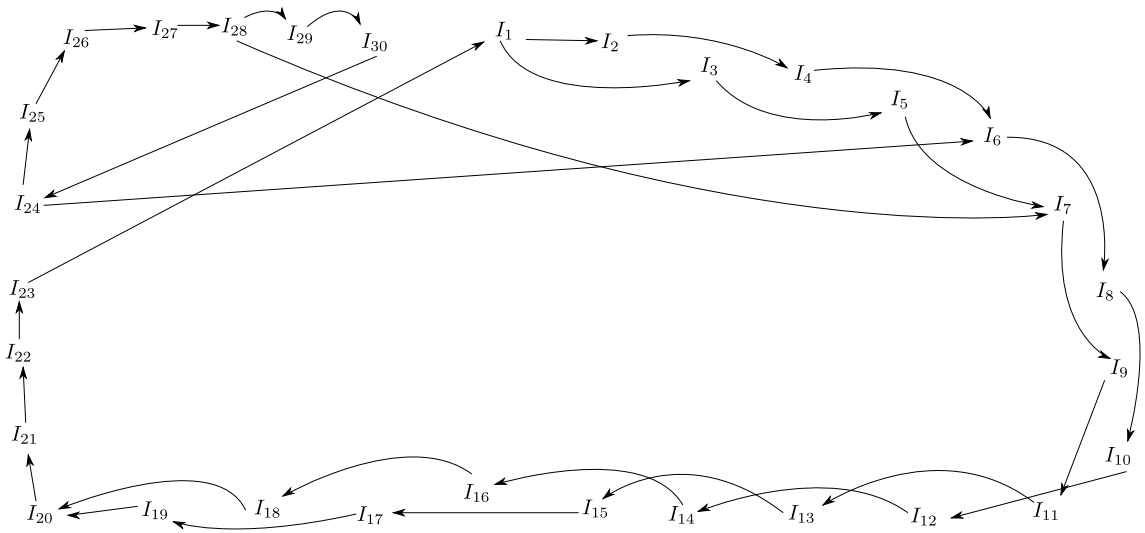
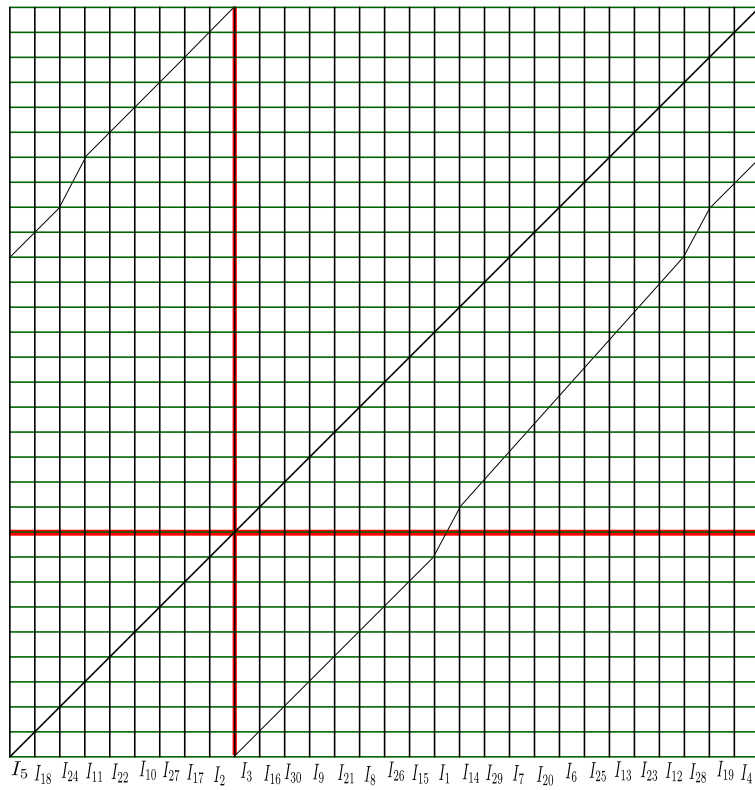
$$\text{Luego } h_{top}(\alpha_- \underline{\beta}, \beta_+ \underline{\alpha}) = \frac{\log(2)}{Per(\alpha)} = \frac{1}{10} \log(2)$$

• Si $l = 2$, tenemos $a = \underline{0110111}$, entonces $\alpha = \underline{a_- b_+} = \underline{01_2 01_2 01_3 01_3}$, $Per(\alpha) = 14$

$$\alpha_- \underline{\beta} = (01_2)_2 \underline{01_1 201_2 01_3 01_3 0}$$

$$\beta_+ \underline{\alpha} = (1_3 0)_2 \underline{1_2 01_3 01_2 01_2 01}$$

El gráfico asociado con su respectivo grafo es:



Del grafo tenemos que la Roma es $R = \{I_1, I_{30}\}$, $a_{1,1} = 2x^{-14}$, $a_{22,22} = x^{-7}$ y el polinomio característico es

$$\begin{aligned}
 p(x) &= (-1)^{30-1} \cdot x^{30} \cdot \det \begin{pmatrix} 2x^{-14} - 1 & 0 \\ a_{30,1} & x^{-7} - 1 \end{pmatrix} \\
 &= -x^9 \cdot (2 - x^{14}) \cdot (1 - x^7)
 \end{aligned}$$

Así la mayor raíz real es $x = \sqrt[14]{2}$

$$\text{Luego } h_{top}(\alpha_{-\underline{\beta}}, \beta_{+\underline{\alpha}}) = \frac{\log(2)}{\text{Per}(\alpha)} = \frac{1}{14} \log(2)$$

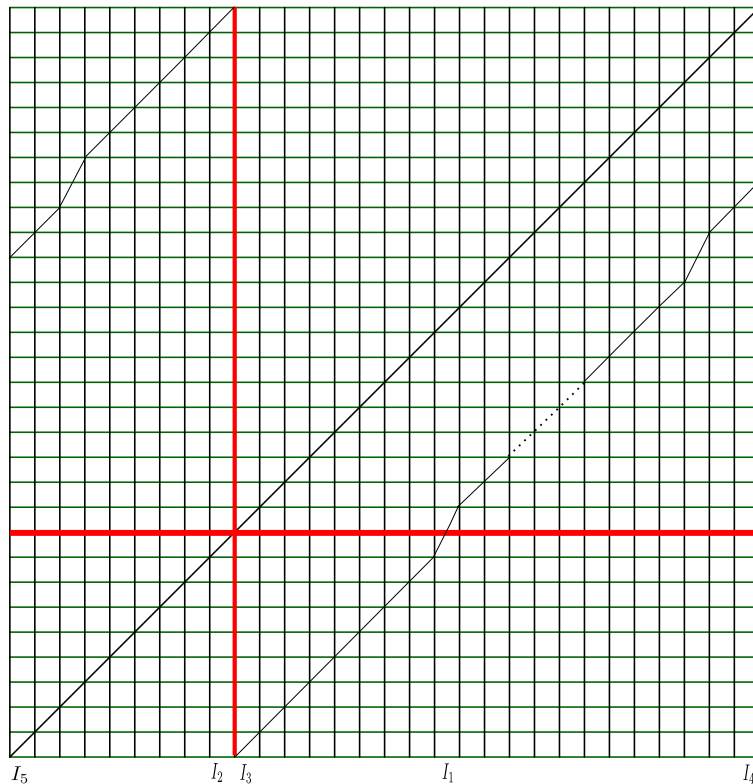
• Caso general para l , tenemos $a = \underline{01_l 01_{l+1}}$, entonces $\alpha = \underline{a_- b_+} = \underline{(01_l)_2 01_{l+1} 01_{l+1}}$,

$$\text{Per}(\alpha) = 4l + 6 = t$$

$$\alpha_{-\underline{\beta}} = (01_l)_2 01_l 01_l 01_{l+1} 01_{l+1} 0$$

$$\beta_{+\underline{\alpha}} = 1_{l+1} 01_{l+1} 01_l 01_{l+1} (01_l)_2 01$$

El gráfico asociado es:



Del gráfico tenemos que:

I_1 es el intervalo del lado derecho de la discontinuidad, más cercano a la discontinuidad que va a dos intervalos $I_1 \rightarrow I_2$ e $I_1 \rightarrow I_3$

I_2 es el intervalo anterior a la discontinuidad, $I_2 \rightarrow I_4$

I_3 es el intervalo posterior a la discontinuidad $I_3 \rightarrow I_5$

I_4 es el último intervalo, $I_4 \rightarrow I_6$

I_5 es el primer intervalo $I_5 \rightarrow I_7$

$$I_6 = I_4 - 7, I_6 \rightarrow I_8, I_8 = I_6 - 8, I_7 = I_4 - 9, I_7 \rightarrow I_9, I_9 = I_7 - 8$$

Sucesivamente $I_{2l+2} \rightarrow I_{2l+4} = I_{2l+2} - 8, I_{2l+3} \rightarrow I_{2l+5} = I_{2l+3} - 8, I_{2l+4} \rightarrow I_{2l+6} = I_2 - 3$

$$I_{2l+5} \rightarrow I_{2l+7} = I_2 - 5, I_{2l+6} \rightarrow I_{2l+8} = I_4 - 3, I_{2l+7} \rightarrow I_{2l+9} = I_4 - 5$$

$$I_{2l+8} \rightarrow I_{2l+10} = I_{2l+8} - 8, I_{2l+9} \rightarrow I_{2l+11} = I_{2l+9} - 8, \dots, I_{4l+6} \rightarrow I_{4l+8} = I_{4l+6} - 8,$$

$$I_{4l+8} \rightarrow I_{4l+10} = I_5 + 1, I_{4l+10} \rightarrow I_{4l+12} = I_4 - 8, I_{4l+5} \rightarrow I_{4l+7} = I_{4l+5} - 8, I_{4l+7} \rightarrow$$

$$I_{4l+9} = I_2 - 1, I_{4l+9} \rightarrow I_{4l+11} = I_4 - 1, I_{4l+11} \rightarrow I_{4l+12}, I_{4l+12} \rightarrow I_{4l+13} = I_{4l+12} - 8, \dots$$

$$I_{6l+11} \rightarrow I_1.$$

I_{6l+12} es el intervalo del lado izquierdo de la discontinuidad que va a dar a dos intervalos

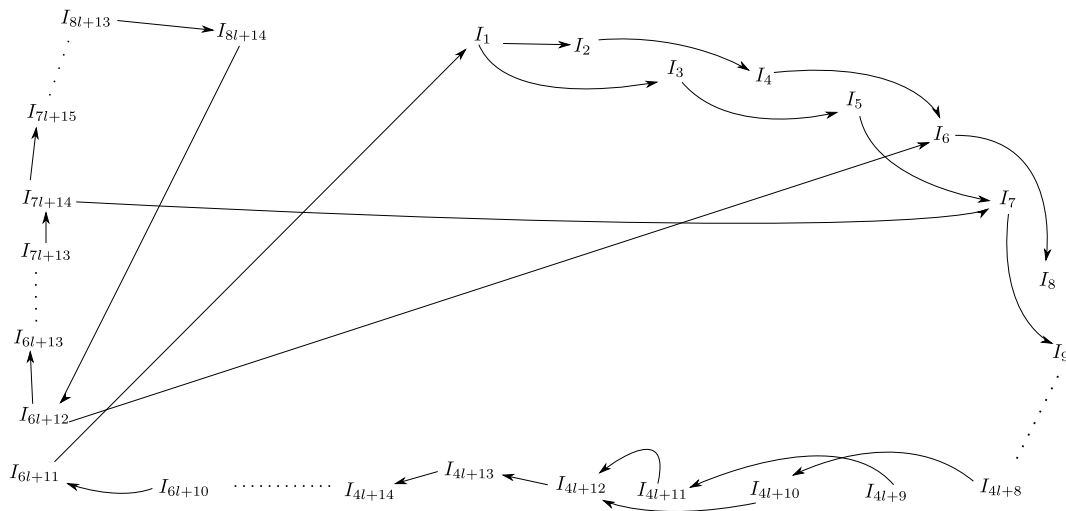
$$I_{6l+12} \rightarrow I_6 \text{ e } I_{6l+12} \rightarrow I_{6l+13} = I_4 - 6$$

$$I_{6l+13} \rightarrow I_{6l+14} = I_{6l+13} - 8, \dots, I_{7l+11} \rightarrow I_{7l+12} = I_{7l+11} - 8, I_{7l+12} \rightarrow I_{7l+13} = I_2 - 2,$$

$$I_{7l+13} \rightarrow I_{7l+14} = I_4 - 2, I_{7l+14} \rightarrow I_7, \text{ e } I_{7l+14} \rightarrow I_{7l+15} = I_{7l+14} - 8, \dots, I_{8l+13} \rightarrow I_{8l+14} =$$

$$I_{8l+13} - 8, I_{8l+14} \rightarrow I_{6l+12}$$

Así tenemos el siguiente grafo



Del grafo tenemos que la Roma es $R = \{I_1, I_{8l+14}\}$, $a_{1,1} = 2x^{-(4l+6)}$, $a_{8l+14,8l+14} = x^{-(2l+3)}$ y el polinomio característico es

$$p(x) = (-1)^{8l+14-1} \cdot x^{8l+14} \cdot \det \begin{pmatrix} 2x^{-(4l+6)} - 1 & 0 \\ a_{8l+14,1} & x^{-(2l+3)} - 1 \end{pmatrix}$$

$$= -x^{2l+5} \cdot (2 - x^{4l+6}) \cdot (1 - x^{2l+3})$$

Así la mayor raíz real es $x = \sqrt[4l+6]{2}$

$$\text{Luego } h_{top}(\alpha_{-\underline{\beta}}, \beta_{+\underline{\alpha}}) = \frac{\log(2)}{Per(\alpha)} = \frac{1}{4l+6} \log(2)$$

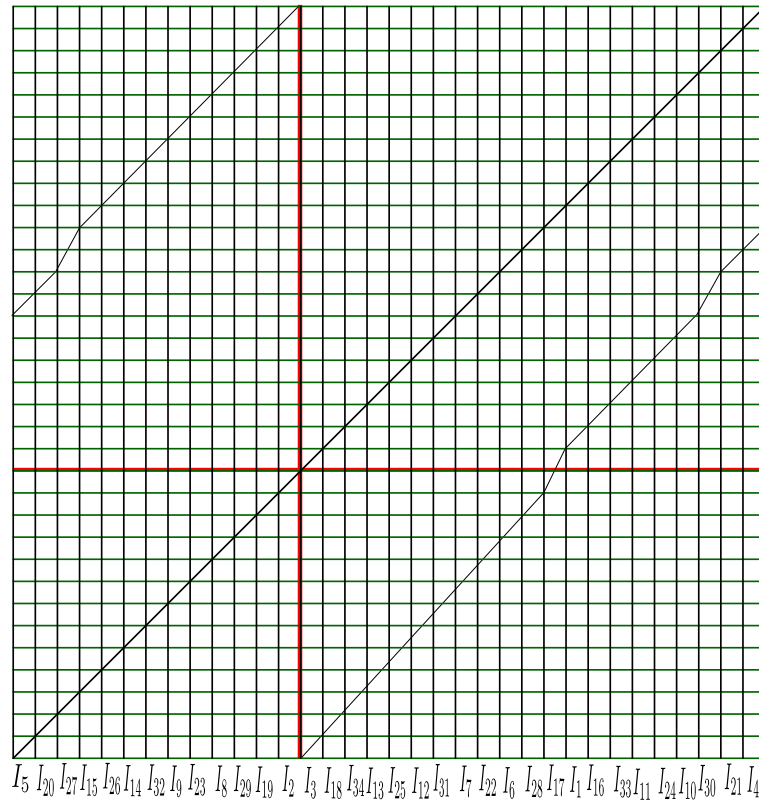
Caso $n = 2$

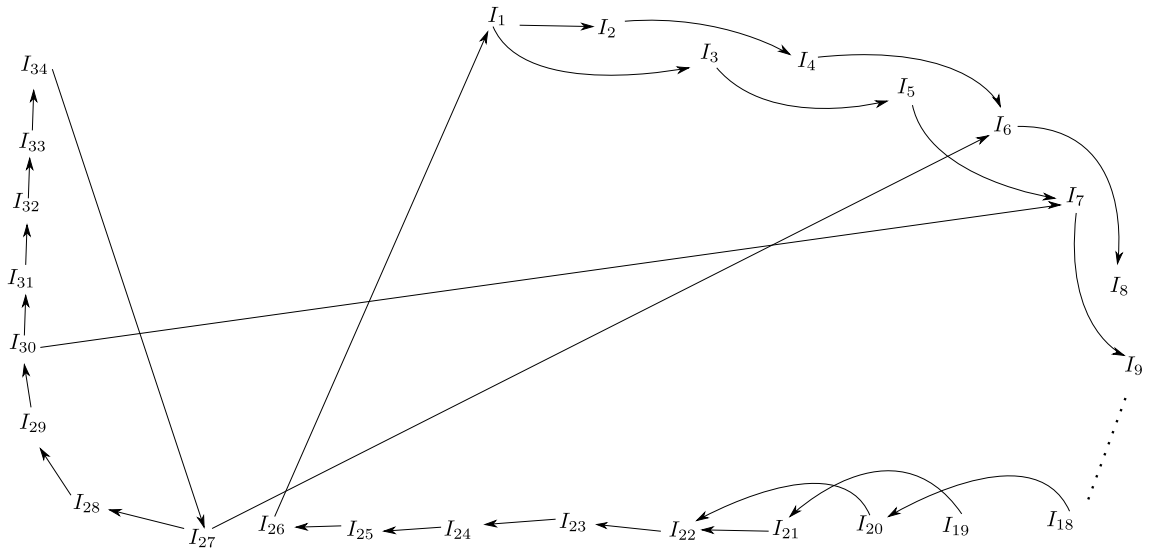
Si $l = 1$, tenemos $a = \underline{01(011)}_2$, entonces $\alpha = \underline{a_{-}b_{+}} = \underline{0101_2 0101_2 01_2 01_2}$, $Per(\alpha) = 16$

$$\alpha_{-\underline{\beta}} = 0101101011\underline{1011010110110110}$$

$$\beta_{+\underline{\alpha}} = (110)_3 \underline{1011011010110101}$$

El gráfico asociado con su respectivo grafo es:





Del grafo tenemos que la Roma es $R = \{I_1, I_{34}\}$, $a_{1,1} = 2x^{-16}$, $a_{34,34} = x^{-8}$ y el polinomio característico es

$$\begin{aligned}
 p(x) &= (-1)^{34-1} \cdot x^{34} \cdot \det \begin{pmatrix} 2x^{-16} - 1 & 0 \\ a_{34,1} & x^{-8} - 1 \end{pmatrix} \\
 &= -x^{10} \cdot (2 - x^{16}) \cdot (1 - x^8)
 \end{aligned}$$

Así la mayor raíz real es $x = \sqrt[16]{2}$

$$\text{Luego } h_{top}(\alpha_{-\underline{\beta}}, \beta_{+\underline{\alpha}}) = \frac{\log(2)}{\text{Per}(\alpha)} = \frac{1}{16} \log(2)$$

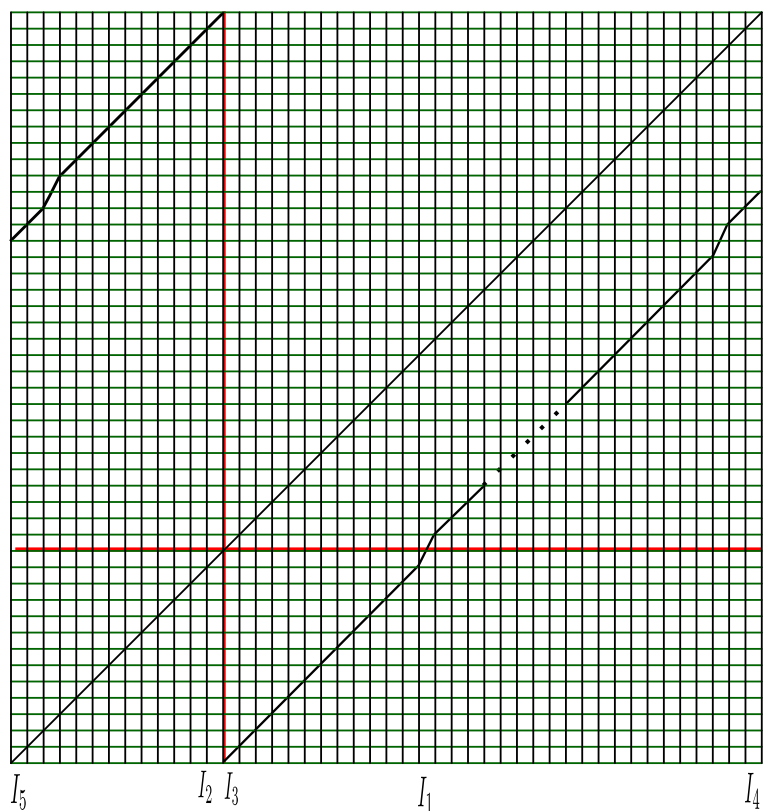
• Caso general para l . tenemos $a = \underline{01_l(01_{l+1})_2}$, entonces $\alpha = \underline{a_{-b_+}} = \underline{01_l 01_{l+1} 01_l (01_{l+1})_3}$,

$$\text{Per}(\alpha) = 6l + 10 = t$$

$$\alpha_{-\underline{\beta}} = 01_l 01_{l+1} 01_l \underline{01_l 01_{l+1} 01_l (01_{l+1})_3} 0$$

$$\beta_{+\underline{\alpha}} = (1_{l+1} 0)_3 \underline{1_l 01_{l+1} 01_{l+1} 01_l 01_{l+1} 01_l 01}$$

El gráfico asociado es:



Del gráfico tenemos que:

I_1 es el intervalo del lado derecho de la discontinuidad que va a dos intervalos $I_1 \rightarrow I_2$ e $I_1 \rightarrow I_3$

I_2 es el intervalo anterior a la discontinuidad, $I_2 \rightarrow I_4$

I_3 es el intervalo posterior a la discontinuidad $I_3 \rightarrow I_5$

I_4 es el último intervalo, $I_4 \rightarrow I_6$

I_5 es el primer intervalo $I_5 \rightarrow I_7$

$I_6 = I_4 - 11$, $I_6 \rightarrow I_8$, $I_8 = I_6 - 12$, $I_7 = I_4 - 13$, $I_7 \rightarrow I_9$, $I_9 = I_7 - 12$

Sucesivamente $I_{6l+9} \rightarrow I_{6l+11} = I_{6l+9} - 12$

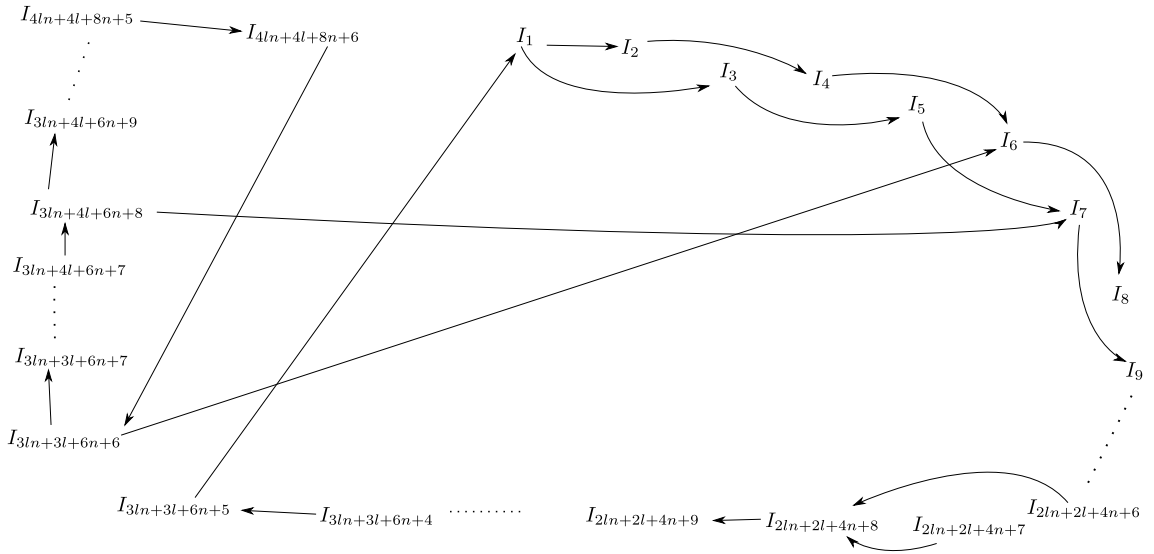
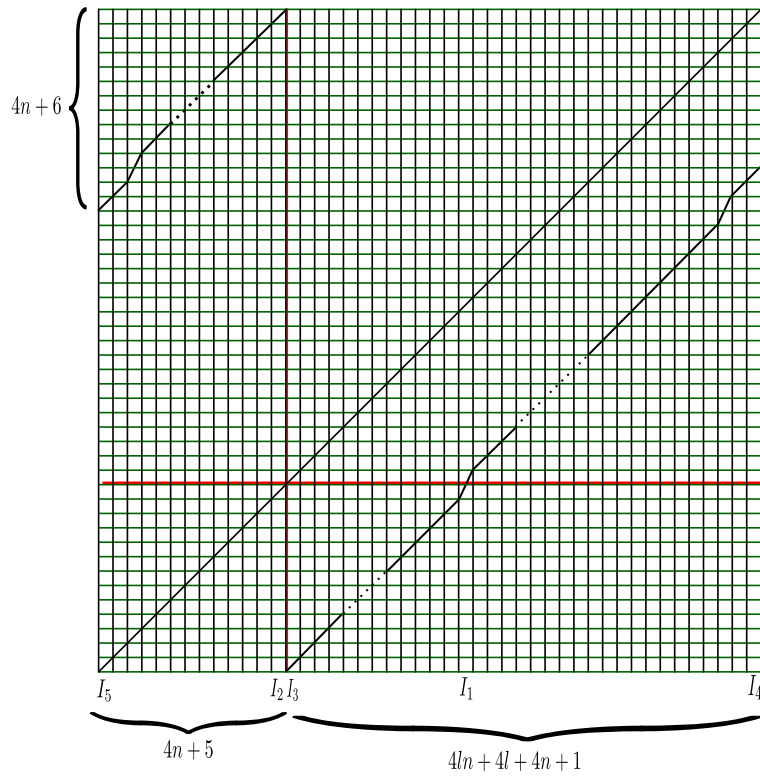
$I_{6l+10} \rightarrow I_{6l+12} = I_{6l+10} - 12$, $I_{6l+11} \rightarrow I_{6l+13} = I_2 - 1$, $I_{6l+12} \rightarrow I_{6l+14} = I_5 + 1$, $I_{6l+13} \rightarrow$

$I_{6l+15} = I_4 - 1$, $I_{6l+14} \rightarrow I_{6l+16} = I_4 - 12$, $I_{6l+15} \rightarrow I_{6l+16}$, $I_{6l+16} \rightarrow I_{6l+17} = I_{6l+16} - 12$,

\dots , $I_{9l+17} \rightarrow I_1$.

I_{9l+18} es el intervalo del lado izquierdo de la discontinuidad que va a dar a dos intervalos

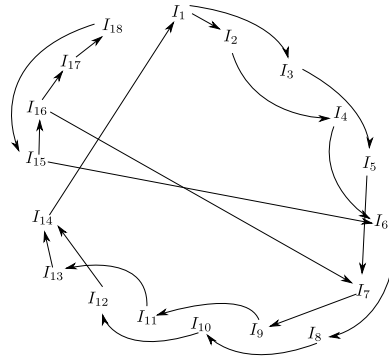
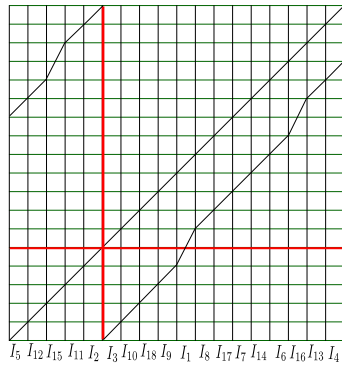
$I_{9l+18} \rightarrow I_6$ e $I_{9l+18} \rightarrow I_{9l+19} = I_6 + 1$



Del grafo tenemos que la Roma es $R = \{I_1, I_{4ln+4l+8n+6}\}$, sea $h = 4ln + 4l + 8n + 6$,

$a_{1,1} = 2x^{-(2ln+2l+4n+2)}$, $a_{h,h} = x^{-(ln+l+2n+1)}$ y el polinomio característico es

$$\begin{aligned}
 p(x) &= (-1)^{h-1} \cdot x^h \cdot \det \begin{pmatrix} a_{1,1} - 1 & 0 \\ a_{h,1} & a_{h,h} - 1 \end{pmatrix} \\
 &= -x^{ln+l+3n+3} \cdot (2 - x^{2ln+2l+4n+2}) \cdot (1 - x^{ln+l+2n+1})
 \end{aligned}$$



La roma es $R = \{I_1, I_{18}\}$, $a_{1,1} = 2x^{-8}$, $a_{18,18} = x^{-4}$ y el polinomio característico es $p(x) = (-1)^{18-1} \cdot x^{18} \cdot \det \begin{pmatrix} 2x^{-8} - 1 & 0 \\ a_{18,1} & x^{-4} - 1 \end{pmatrix} = -x^6 \cdot (2 - x^8) \cdot (1 - x^4)$, y la mayor raíz real es $x = \sqrt[8]{2}$

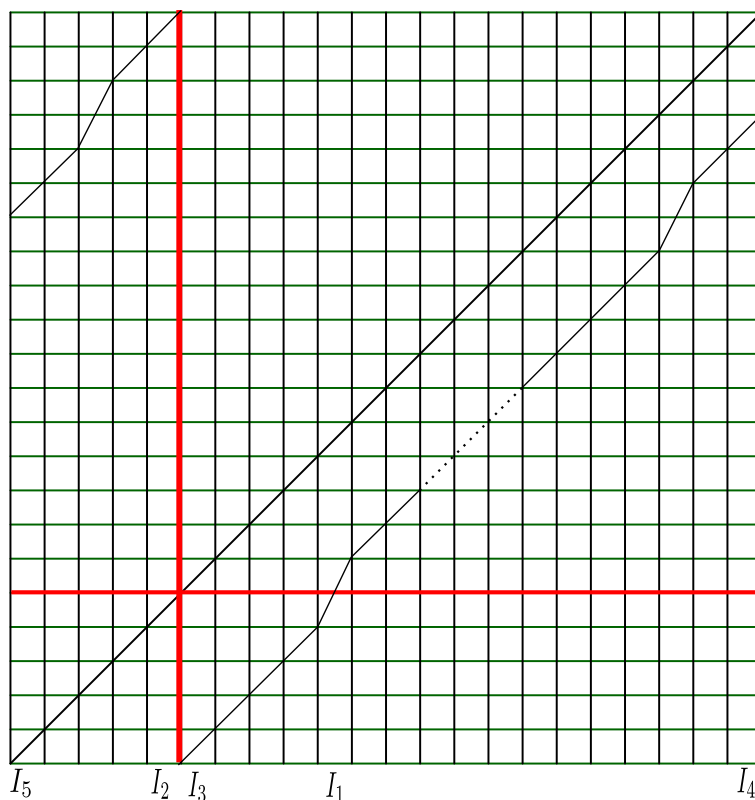
Luego $h_{top}(\alpha_{-\underline{\beta}}, \beta_{+\underline{\alpha}}) = \frac{\log(2)}{Per(\alpha)} = \frac{1}{8} \log(2)$

• Caso general para l , tenemos $a = \underline{01}_l$, entonces $\alpha = \underline{a_- b_+} = \underline{01_{l-1} 01_{l+1}}$, $Per(\alpha) = 2l + 2 = t$

$$\alpha_{-\underline{\beta}} = \underline{01_{l-1} 01_{l-1} 01_{l+1} 0}$$

$$\beta_{+\underline{\alpha}} = \underline{1_{l+1} 01_{l-1} 01_{l-1} 01}$$

El gráfico asociado es:



Del gráfico tenemos que:

I_1 es el intervalo del lado derecho de la discontinuidad, más cercano a la discontinuidad que va a dos intervalos $I_1 \rightarrow I_2$ e $I_1 \rightarrow I_3$

I_2 es el intervalo anterior a la discontinuidad, $I_2 \rightarrow I_4$

I_3 es el intervalo posterior a la discontinuidad $I_3 \rightarrow I_5$

I_4 es el último intervalo, $I_4 \rightarrow I_6$

I_5 es el primer intervalo $I_5 \rightarrow I_7$

$I_6 = I_4 - 3$, $I_6 \rightarrow I_8$, $I_8 = I_6 - 4$, $I_7 = I_4 - 5$, $I_7 \rightarrow I_9$, $I_9 = I_7 - 4$

Sucesivamente $I_{2l+2} \rightarrow I_{2l+4} = I_{2l+2} - 4$, $I_{2l+3} \rightarrow I_{2l+5} = I_2 - 1$, $I_{2l+4} \rightarrow I_{2l+6} = I_5 + 1$

$I_{2l+5} \rightarrow I_{2l+7} = I_4 - 1$, $I_{2l+6} \rightarrow I_{2l+8} = I_4 - 4$, $I_{2l+7} \rightarrow I_{2l+8}$

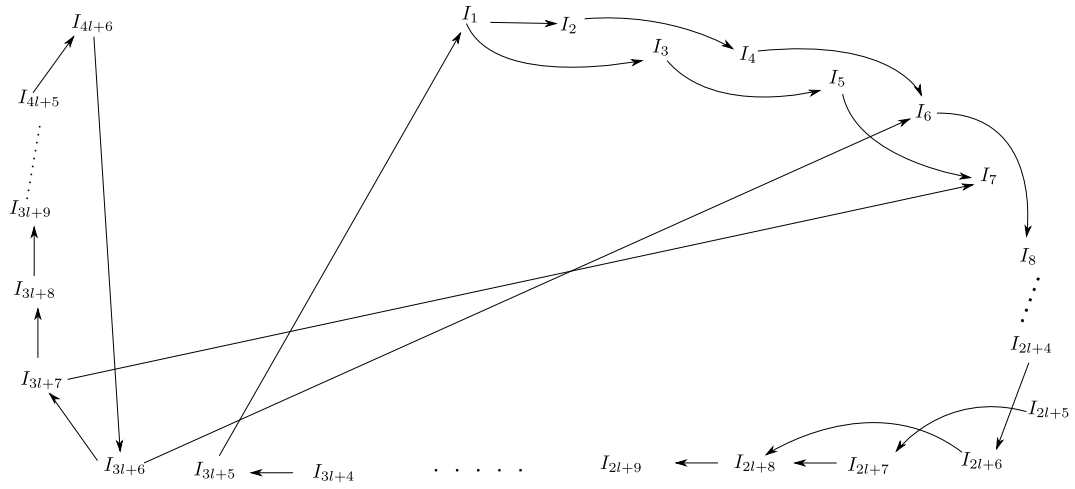
$I_{2l+8} \rightarrow I_{2l+9} = I_{2l+8} - 4$, \dots , $I_{3l+5} \rightarrow I_1$.

I_{3l+6} es el intervalo del lado izquierdo de la discontinuidad que va a dar a dos intervalos

$I_{3l+6} \rightarrow I_6$ e $I_{3l+6} \rightarrow I_{3l+7} = I_4 - 2$

$I_{3l+7} \rightarrow I_7$ e $I_{3l+7} \rightarrow I_{3l+8} = I_{3l+7} - 4$, $I_{3l+8} \rightarrow I_{3l+9} = I_{3l+8} - 4$, \dots , $I_{4l+5} \rightarrow I_{4l+6} = I_{4l+5} - 4$, $I_{4l+6} \rightarrow I_{3l+6}$.

Así tenemos el siguiente grafo



Del grafo tenemos que la Roma es $R = \{I_1, I_{4l+6}\}$, $a_{1,1} = 2x^{-(2l+2)}$, $a_{4l+6,4l+6} = x^{-(l+1)}$ y el polinomio característico es

$$\begin{aligned}
 p(x) &= (-1)^{4l+6-1} \cdot x^{4l+6} \cdot \det \begin{pmatrix} 2x^{-(2l+2)} - 1 & 0 \\ a_{4l+6,1} & x^{-(l+1)} - 1 \end{pmatrix} \\
 &= -x^{l+3} \cdot (2 - x^{2l+2}) \cdot (1 - x^{l+1})
 \end{aligned}$$

Así la mayor raíz real es $x = \sqrt[2l+2]{2}$

$$\text{Luego } h_{top}(\alpha_{-\underline{\beta}}, \beta_{+\underline{\alpha}}) = \frac{\log(2)}{Per(\alpha)} = \frac{1}{2l+2} \log(2)$$

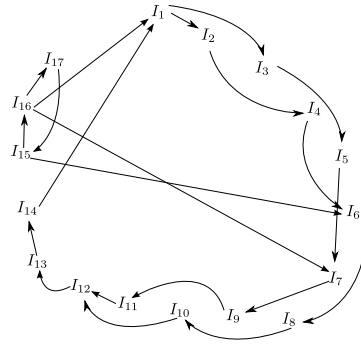
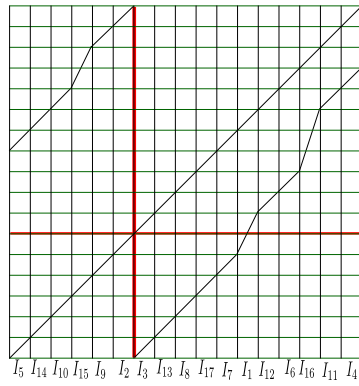
Caso $n = 1$

• Si $l = 2$, tenemos $a = \underline{011}$, entonces $\alpha = \underline{a_{-}b_{+}a} = \underline{0101_301_2}$, $Per(\alpha) = 9$

$$\alpha_{-\underline{\beta}} = 01011_20101_30$$

$$\beta_{+\underline{\alpha}} = 11101_201_20101$$

El gráfico asociado con su respectivo grafo es:



La roma es $R = \{I_1, I_{17}\}$, $a_{1,1} = 2x^{-9}$, $a_{14,14} = x^{-3}$ y el polinomio característico es $p(x) = (-1)^{17-1} \cdot x^{17} \cdot \det \begin{pmatrix} 2x^{-9} - 1 & 0 \\ a_{17,1} & x^{-3} - 1 \end{pmatrix} = x^5 \cdot (2 - x^9) \cdot (1 - x^3)$, y la mayor raíz real es $x = \sqrt[9]{2}$

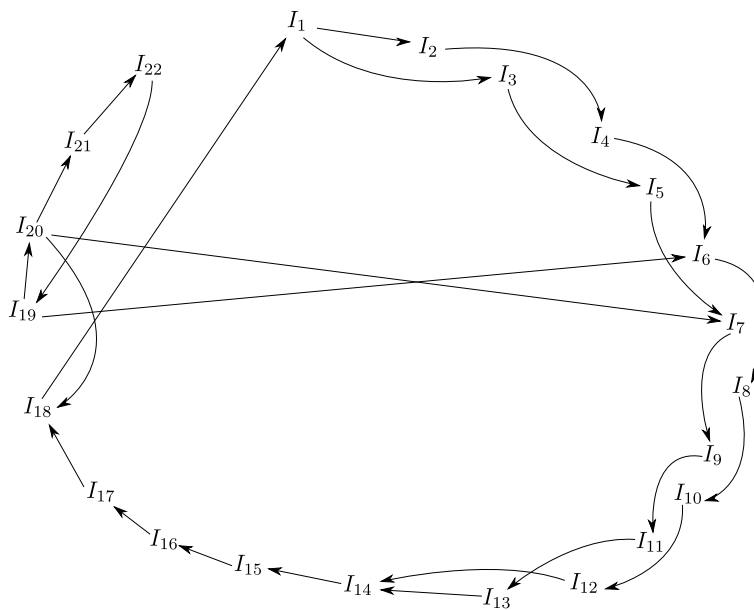
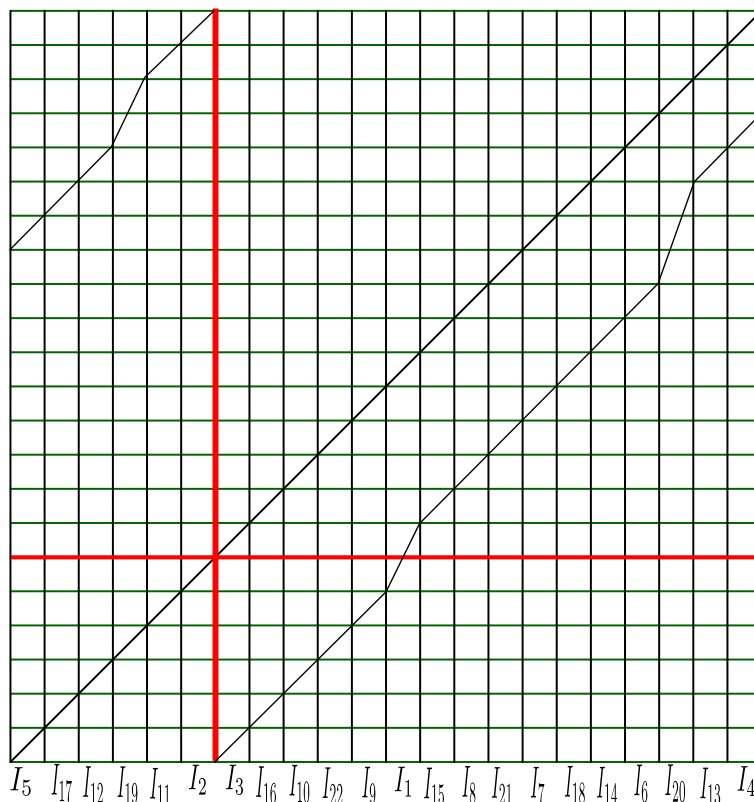
Luego $h_{top}(\alpha_{-\underline{\beta}}, \beta_{+\underline{\alpha}}) = \frac{\log(2)}{Per(\alpha)} = \frac{1}{9} \log(2)$

- Si $l = 3$, tenemos $a = \underline{0111}$, entonces $\alpha = \underline{a_{-}b_{+}a_01_201_401_3}$, $Per(\alpha) = 12$

$\alpha_{-\underline{\beta}} = 011011\underline{3}01_201_40$

$\beta_{+\underline{\alpha}} = 1_401_301_301_201$

El gráfico asociado con su respectivo grafo es:



La roma es $R = \{I_1, I_{22}\}$, $a_{1,1} = 2x^{-12}$, $a_{22,22} = x^{-4}$ y el polinomio característico es $p(x) = (-1)^{22-1} \cdot x^{22} \cdot \det \begin{pmatrix} 2x^{-12} - 1 & 0 \\ a_{22,1} & x^{-4} - 1 \end{pmatrix} = -x^6 \cdot (2 - x^{12}) \cdot (1 - x^4)$, y la mayor

raíz real es $x = \sqrt[12]{2}$

$$\text{Luego } h_{top}(\alpha_{-\underline{\beta}}, \beta_{+\underline{\alpha}}) = \frac{\log(2)}{\text{Per}(\alpha)} = \frac{1}{12} \log(2)$$

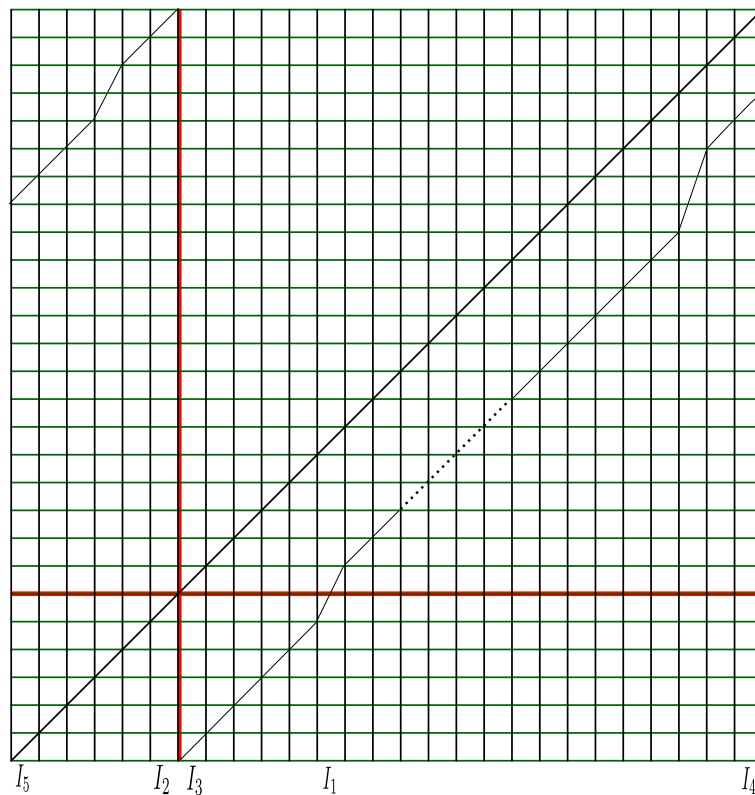
• Caso general para l , tenemos $a = \underline{01}_l$, entonces $\alpha = \underline{a_{-}b_{+}a} = \underline{01_{l-1}01_{l+1}01_l}$, $\text{Per}(\alpha) =$

$$3l + 3 = t$$

$$\alpha_{-\underline{\beta}} = 01_{l-1}01\underline{1}_l01_{l-1}01_{l+1}0$$

$$\beta_{+\underline{\alpha}} = 1_{l+1}0(\underline{1_l0})_2\underline{1_{l-1}01}$$

El gráfico asociado es:



Del gráfico tenemos que:

I_1 es el intervalo del lado derecho de la discontinuidad que va a dos intervalos $I_1 \rightarrow I_2$
e $I_1 \rightarrow I_3$

I_2 es el intervalo anterior a la discontinuidad, $I_2 \rightarrow I_4$

I_3 es el intervalo posterior a la discontinuidad $I_3 \rightarrow I_5$

I_4 es el último intervalo, $I_4 \rightarrow I_6$

I_5 es el primer intervalo $I_5 \rightarrow I_7$

$$I_6 = I_4 - 3, I_6 \rightarrow I_8, I_8 = I_6 - 5, I_7 = I_4 - 6, I_7 \rightarrow I_9, I_9 = I_7 - 5$$

Sucesivamente $I_{2l+2} \rightarrow I_{2l+4} = I_{2l+2} - 5, I_{2l+3} \rightarrow I_{2l+5} = I_2 - 1, I_{2l+4} \rightarrow I_{2l+6} = I_5 + 3$

$$I_{2l+5} \rightarrow I_{2l+7} = I_4 - 1, I_{2l+6} \rightarrow I_{2l+8} = I_4 - 4, I_{2l+7} \rightarrow I_{2l+8}$$

$$I_{2l+8} \rightarrow I_{2l+9} = I_{2l+8} - 5, \dots, I_{4l+6} \rightarrow I_1.$$

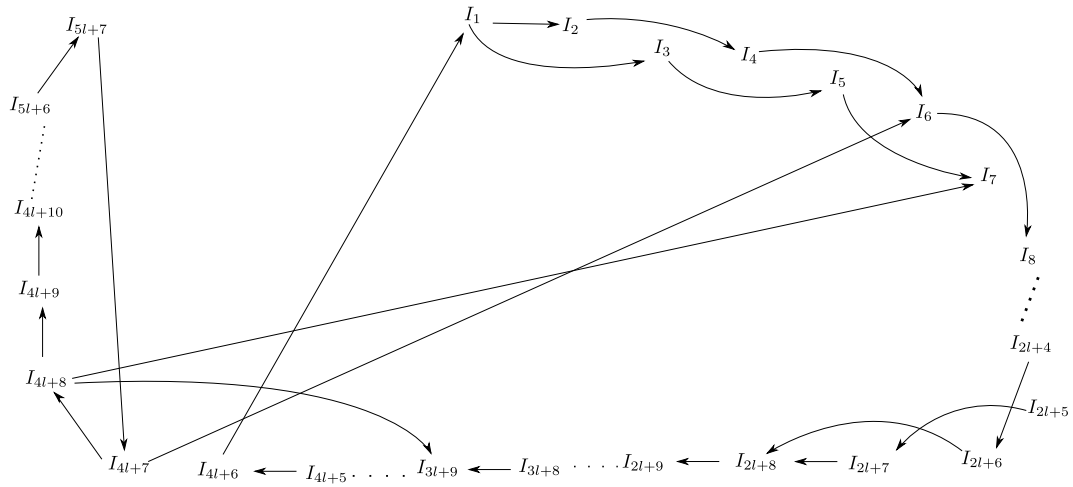
I_{4l+7} es el intervalo del lado izquierdo de la discontinuidad que va a dar a dos intervalos

$$I_{4l+7} \rightarrow I_6 \text{ e } I_{4l+7} \rightarrow I_{4l+8} = I_4 - 2$$

$$I_{4l+8} \rightarrow I_{3l+9}, I_{4l+8} \rightarrow I_7, I_{4l+8} \rightarrow I_{4l+9} = I_{4l+8} - 5, \dots, I_{5l+6} \rightarrow I_{5l+7} = I_{5l+6} - 5,$$

$$I_{5l+7} \rightarrow I_{4l+7}.$$

Así tenemos el siguiente grafo



Del grafo tenemos que la Roma es $R = \{I_1, I_{5l+7}\}$, $a_{1,1} = 2x^{-(3l+3)}$, $a_{5l+7,5l+7} = x^{-(l+1)}$

y el polinomio característico es

$$\begin{aligned} p(x) &= (-1)^{5l+7-1} \cdot x^{5l+7} \cdot \det \begin{pmatrix} 2x^{-(3l+3)} - 1 & 0 \\ a_{5l+7,1} & x^{-(l+1)} - 1 \end{pmatrix} \\ &= (-1)^{5l+6} \cdot x^{l+3} \cdot (2 - x^{3l+3}) \cdot (1 - x^{l+1}) \end{aligned}$$

Así la mayor raíz real es $x = \sqrt[3l+3]{2}$

$$\text{Luego } h_{top}(\alpha_{-\underline{\beta}}, \beta_{+\underline{\alpha}}) = \frac{\log(2)}{Per(\alpha)} = \frac{1}{3l+3} \log(2)$$

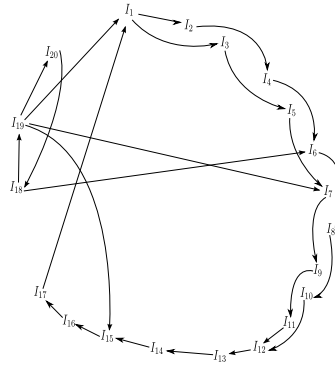
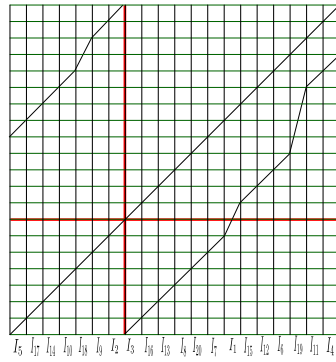
Caso $n = 2$

• Si $l = 2$, tenemos $a = \underline{011}$, entonces $\alpha = \underline{a_{-}b_{+}a^2} = \underline{0101_301_201_2}$, $Per(\alpha) = 12$

$$\alpha_{-\underline{\beta}} = 01011\underline{201_20101_3}0$$

$$\beta_{+\underline{\alpha}} = 11101\underline{201_201_20101}$$

El gráfico asociado con su respectivo grafo es:



La roma es $R = \{I_1, I_{20}\}$, $a_{1,1} = 2x^{-12}$, $a_{20,20} = x^{-3}$ y el polinomio característico es

$$p(x) = (-1)^{20-1} \cdot x^{20} \cdot \det \begin{pmatrix} 2x^{-12} - 1 & 0 \\ a_{20,1} & x^{-3} - 1 \end{pmatrix} = -x^5 \cdot (2 - x^{12}) \cdot (1 - x^3),$$

y la mayor raíz real es $x = \sqrt[12]{2}$

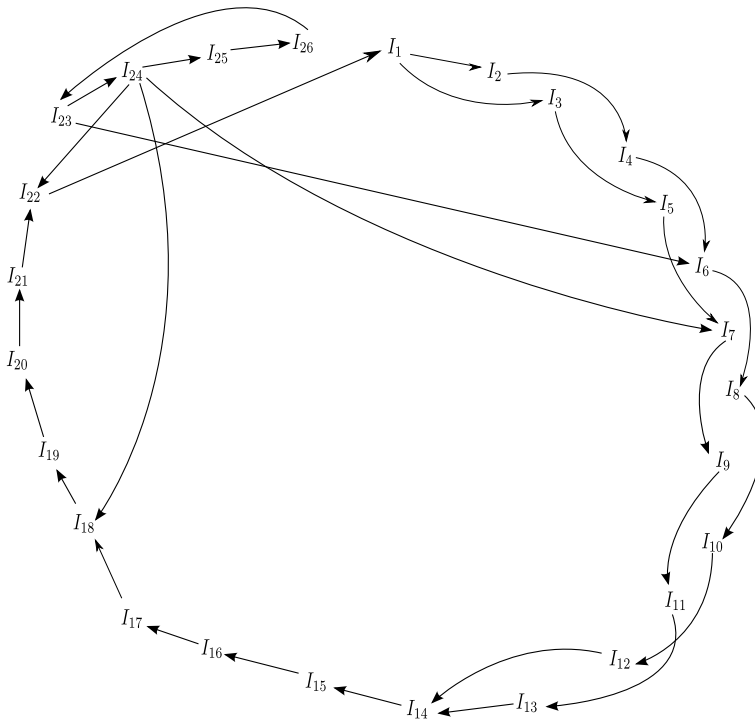
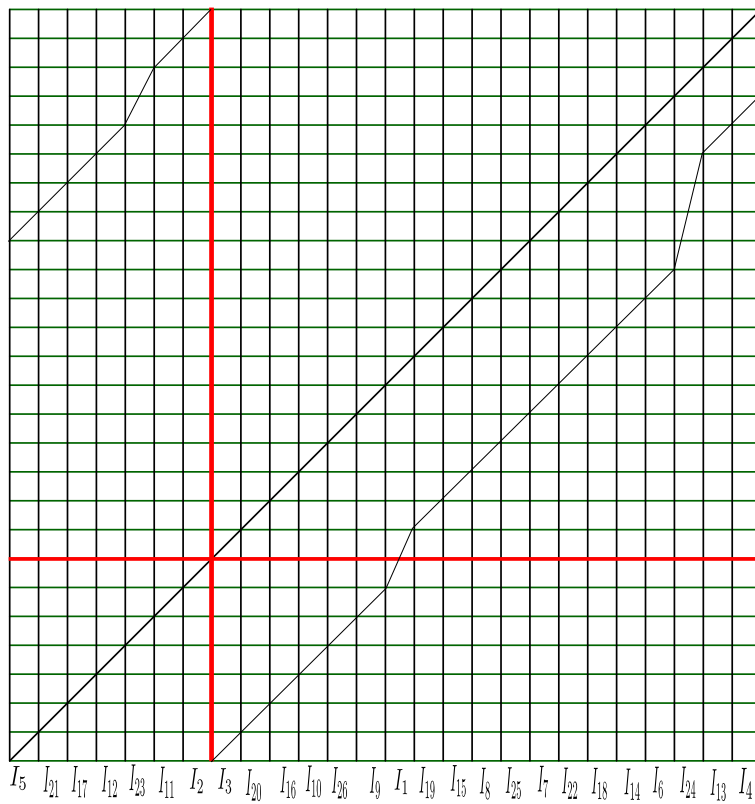
Luego $h_{top}(\underline{\alpha}_-, \underline{\beta}_+) = \frac{\log(2)}{Per(\alpha)} = \frac{1}{12} \log(2)$

• Si $l = 3$, tenemos $a = \underline{0111}$, entonces $\alpha = \underline{a_- b_+ a^2 01_2 01_4 01_3 01_3}$, $Per(\alpha) = 16$

$\underline{\alpha}_- = 011011_3 01_3 01_2 01_4 0$

$\underline{\beta}_+ = 1_4 01_3 01_3 01_3 01_2 01$

El gráfico asociado con su respectivo grafo es:



La roma es $R = \{I_1, I_{26}\}$, $a_{1,1} = 2x^{-16}$, $a_{26,26} = x^{-4}$ y el polinomio característico es

$$p(x) = (-1)^{26-1} \cdot x^{26} \cdot \det \begin{pmatrix} 2x^{-16} - 1 & 0 \\ a_{26,1} & x^{-4} - 1 \end{pmatrix} = -x^6 \cdot (2 - x^{16}) \cdot (1 - x^4), \text{ y la mayor}$$

raíz real es $x = \sqrt[16]{2}$

$$\text{Luego } h_{top}(\underline{\alpha-\beta}, \underline{\beta+\alpha}) = \frac{\log(2)}{Per(\alpha)} = \frac{1}{16} \log(2)$$

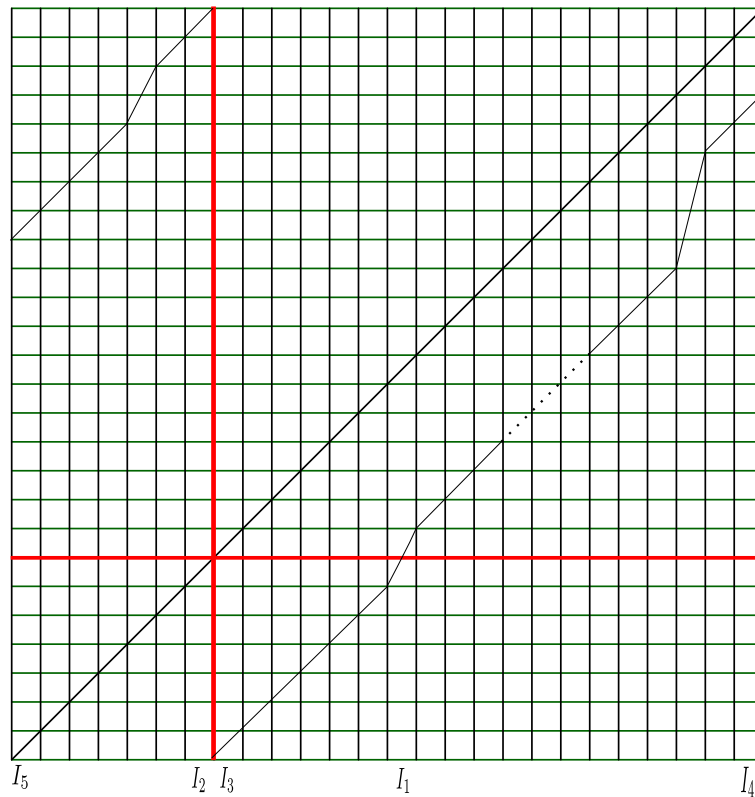
• Caso general para l , tenemos $a = \underline{01}_l$, entonces $\alpha = \underline{a-b+a^2} = \underline{01_{l-1}01_{l+1}01_l01_l}$,

$$Per(\alpha) = 4l + 4 = t$$

$$\underline{\alpha-\beta} = 01_{l-1}01\underline{(1_l0)}_21_{l-1}01_{l+1}0$$

$$\underline{\beta+\alpha} = 1_{l+1}0\underline{(1_l0)}_31_{l-1}01$$

El gráfico asociado es:



Del gráfico tenemos que:

I_1 es el intervalo del lado derecho de la discontinuidad que va a dos intervalos $I_1 \rightarrow I_2$ e $I_1 \rightarrow I_3$

I_2 es el intervalo anterior a la discontinuidad, $I_2 \rightarrow I_4$

I_3 es el intervalo posterior a la discontinuidad $I_3 \rightarrow I_5$

I_4 es el último intervalo, $I_4 \rightarrow I_6$

I_5 es el primer intervalo $I_5 \rightarrow I_7$

$I_6 = I_4 - 3$, $I_6 \rightarrow I_8$, $I_8 = I_6 - 6$, $I_7 = I_4 - 7$, $I_7 \rightarrow I_9$, $I_9 = I_7 - 6$

Sucesivamente $I_{2l+2} \rightarrow I_{2l+4} = I_{2l+2} - 6$, $I_{2l+3} \rightarrow I_{2l+5} = I_2 - 1$, $I_{2l+4} \rightarrow I_{2l+6} = I_2 - 3$

$I_{2l+5} \rightarrow I_{2l+7} = I_4 - 1$, $I_{2l+6} \rightarrow I_{2l+8} = I_4 - 4$, $I_{2l+7} \rightarrow I_{2l+8}$

$I_{2l+8} \rightarrow I_{2l+9} = I_{2l+8} - 5$, \dots , $I_{5l+7} \rightarrow I_1$.

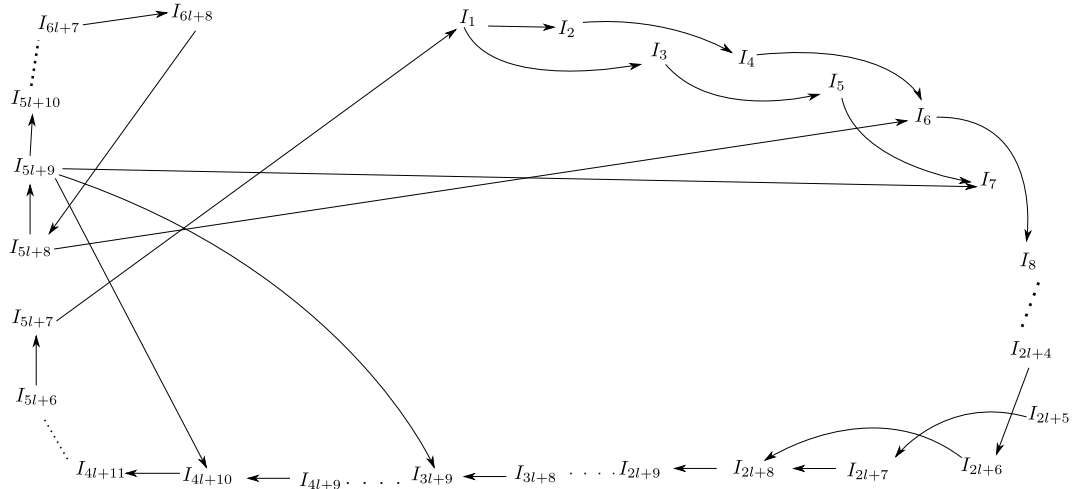
I_{5l+8} es el intervalo del lado izquierdo de la discontinuidad que va a dar a dos intervalos

$I_{5l+8} \rightarrow I_6$ e $I_{5l+8} \rightarrow I_{5l+9} = I_4 - 2$

$I_{5l+9} \rightarrow I_{3l+9}$, $I_{5l+9} \rightarrow I_{4l+10}$, $I_{5l+9} \rightarrow I_7$ e $I_{5l+9} \rightarrow I_{5l+10} = I_{5l+9} - 6$, \dots , $I_{6l+7} \rightarrow I_{6l+8} =$

$I_{6l+7} - 6$, $I_{6l+8} \rightarrow I_{5l+8}$.

Así tenemos el siguiente grafo



Del grafo tenemos que la Roma es $R = \{I_1, I_{6l+8}\}$, $a_{1,1} = 2x^{-(4l+4)}$, $a_{6l+8,6l+8} = x^{-(l+1)}$

y el polinomio característico es

$$p(x) = (-1)^{6l+8-1} \cdot x^{6l+8} \cdot \det \begin{pmatrix} 2x^{-(4l+4)} - 1 & 0 \\ a_{6l+8,1} & x^{-(l+1)} - 1 \end{pmatrix}$$

$$= -x^{l+3} \cdot (2 - x^{4l+4}) \cdot (1 - x^{l+1})$$

Así la mayor raíz real es $x = \sqrt[4l+4]{2}$

$$\text{Luego } h_{top}(\alpha_{-\underline{\beta}}, \beta_{+\underline{\alpha}}) = \frac{\log(2)}{Per(\alpha)} = \frac{1}{4l+4} \log(2)$$

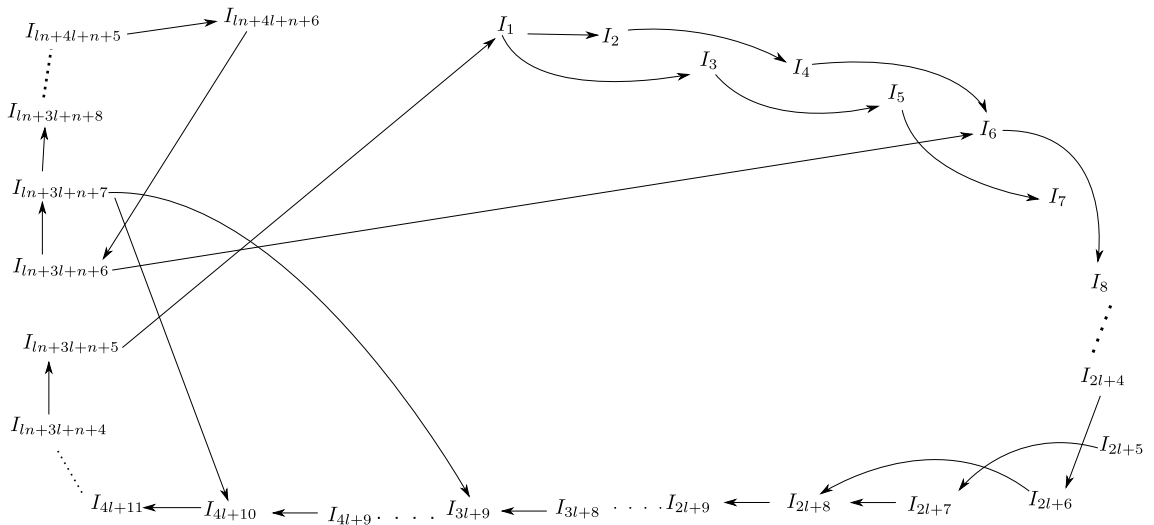
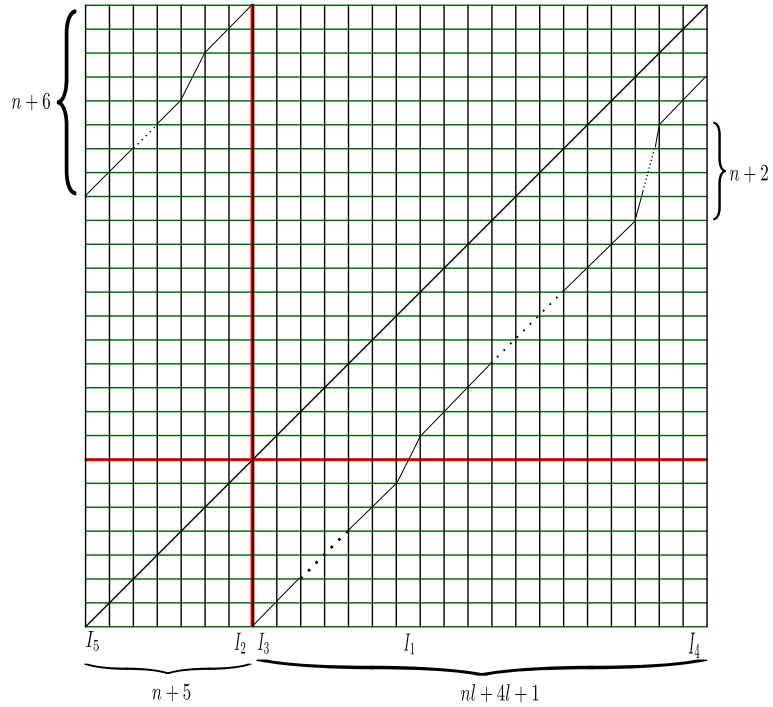
Caso general para n

Si $a = \underline{01}_l$, entonces $\alpha = \underline{a_- b_+ a^n} = \underline{01}_{l-1} \underline{01}_{l+1} (\underline{01}_l)_n$, $Per(\alpha) = ln + 2l + n + 2 = t$

$$\alpha_{-\underline{\beta}} = 01_{l-1}011_{l-1}(01_l)_{n-1}01_{l-1}01_{l+1}0$$

$$\beta_{+\underline{\alpha}} = 1_{l+1}01_l(01_l)_n01_{l-1}01$$

El gráfico asociado con su respectivo grafo es:



Del grafo tenemos que la Roma es $R = \{I_1, I_{ln+4l+n+6}\}$, sea $h = ln + 4l + n + 6$, $a_{1,1} = 2x^{-(ln+2l+n+2)}$, $a_{h,h} = x^{-(l+1)}$ y el polinomio característico es

$$\begin{aligned}
p(x) &= (-1)^{h-1} \cdot x^h \cdot \det \begin{pmatrix} a_{1,1} - 1 & 0 \\ a_{h,1} & a_{h,h} - 1 \end{pmatrix} \\
&= (-1)^{h-1} \cdot x^{l+3} \cdot (2 - x^{ln+2l+n+2}) \cdot (1 - x^{l+1})
\end{aligned}$$

Así la mayor raíz real es $x = \sqrt[ln+2l+n+2]{2}$

$$\text{Luego } h_{top}(\alpha_{-\underline{\beta}}, \beta_{+\underline{\alpha}}) = \frac{\log(2)}{Per(\alpha)} = \frac{1}{ln + 2l + n + 2} \log(2)$$

Analogamente se prueba el resultado para $\alpha = \underline{a_- b_+ a^n}$

□

Conclusiones

Considerando la familia cuadrática de aplicaciones tipo Lorenz $f_{\mu,\nu} : (\mathbb{R} - \{0\}) \rightarrow \mathbb{R}$, definido por

$$f_{(\mu,\nu)}(x) = \begin{cases} \nu - x^2, & x < 0 \\ -\mu + x^2, & x > 0 \end{cases}$$

En el interés de probar que $H_0 = \{(\mu, \nu); h_{top}(F_{(\mu,\nu)})|_{\Lambda_{(\mu,\nu)}} = 0\}$ es conexa en $\{(\mu, \nu); \mu \geq 0, \nu \geq 0\}$ hemos probado los siguientes resultados

Dado un valor $c \geq 0$ tal que existen

- Órbitas periódicas minimal $a \in \Sigma_2$ y maximal $d \in \Sigma_2$ tales que valores del parámetro (μ_0, ν_0) talque $a(\mu_0, \nu_0) = a, b(\mu_0, \nu_0) = d$, entonces existen

1. Un conjunto de órbitas periódicas minimales $\alpha \in \Sigma_2, b = b(\alpha) \in \Sigma_2$ generadas por a y d tales que para todo $(\alpha, b(\alpha))$ se cumple $h_{top}(\alpha, b(\alpha)) = h_{top}(a, d)$. En general, para cada $\alpha \in A_\infty^\infty(a, d)$ ocurre que $\Sigma[a, d] \subset \Sigma[\alpha, b(\alpha)]$; lo interesante es que no aumenta la entropía de σ al considerar su restricción a $[\alpha, b(\alpha)]$.
2. Una vecindad $U(\mu_0, \nu_0)$ tal que $\forall (\mu, \nu) \in U(\mu_0, \nu_0)$ vale $h_{top}(\mu, \nu) = h_{top}(\alpha, b(\alpha))$ para algún α . La vecindad $U(\mu_0, \nu_0)$ tiene una cantidad no numerable de fines. Se llama a $U(\mu_0, \nu_0)$ la burbuja de entropía constante $c = h_{top}(a, d)$
3. Existe un conjunto de sucesiones primarias minimales, denotada $A_\infty^\infty \subset Min_2 \cap Per(\sigma)$ tal que $\forall \alpha \in A_\infty^\infty, h_{top}(\alpha - \underline{\beta}, \beta + \underline{\alpha}) = \frac{1}{Per(\alpha)} \log(2)$ que es una cota para la entropía en una región que contiene en su interior a la burbuja generada por α

y β , $\beta = b(\alpha) = \sup\{\sigma^i(\alpha); i \in \mathbb{N}_0\}$, este resultado nos entrega el cálculo de la entropía topológica del subshift

Este resultado, y la verificación de que el resultado anunciado en [19] como sección 4.3 está correcto, tienen como consecuencia que H_0 es arcoconexo. En efecto, el razonamiento que sigue a la proposición 3.1.2 diría que la intersección de las regiones encajonadas

$B(\underline{\alpha}_i, (\alpha_i) - \underline{\beta}_i, \underline{\beta}_i, (\beta_i) + \underline{\alpha}_i)$ sería un conjunto de entropía cero que puede conectarse con el cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$ por un camino continuo que se va construyendo por los conjuntos $C_1(\underline{\alpha}_i, (\beta_i) + \underline{\alpha}_i) \cup C_2(\underline{\alpha}_i, \underline{\beta}_i) \cup C_3((\alpha_i) - \underline{\beta}_i, \underline{\beta}_i)$.

Bibliography

- [1] Afraimovich V.S., Bykov V.V., Shil'nikov L.P. *The origin and structure of the Lorenz attractor* Dokl. Akad. Nauk SSSR 234 (1977), No 2, 336-339.
- [2] Afraimovich V.S., Bykov V.V., Shil'nikov L.P. *On structurally stable attracting limit sets of Lorenz attractor type* Trans. Mosc.Math. Soc. **44** pp 153-216 (1983). 431-443 (1990).
- [3] Alsedà, Lluís; Llibre, Jaume; Misiurewicz, Michał “*Combinatorial dynamics and entropy in dimension one.*” Second edition. Advanced Series in Nonlinear Dynamics, 5. World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 2000. xvi+15 pp. ISBN: 981-02-4053-8.
- [4] Aranzubía S., Labarca R. *Combinatorial Dynamics and an Elementary Proof of the Continuity of the Topological Entropy at $\theta = 101$, in the Milnor Thurston World.* Progress and Challenges in Dynamical Systems páginas 25-52, año 2013
- [5] Bamón, R.; Labarca, R.; Mañé R.; Pacifico, M.J. *The explosion of singular cycles* Publ. Math. IHES vol 78 pp 207-232 (1993).
- [6] Bruin, H.; Van Strein, S. *Monotonicity of entropy for real unimodal maps* Journal of the American Mathematical Society Vol 28, N° 1 pp 1-61 (2015).
- [7] de Melo W. , Martens M. *Universal Models for Lorenz maps* Ergod. Th. & Dynam. Sys.(2001) 21, pp 833-860.

- [8] de Melo W., Van Strien S. *Lectures on One Dimensional Dynamics* Springer Verlag. 1993.
- [9] Guckenheimer J. *A Strange, Strange Attractor* In : *Hopf Bifurcations and its applications* J.E. Marsden and M. McCracken Eds. pp 368-381. Springer Verlag. Berlin. 1976.
- [10] Guckenheimer J., Williams R. F. *Structural Stability of Lorenz Attractors* Publ. Math. IHES **50**, pp 59-72, (1979).
- [11] Milnor, J. *Remarks on iterated cubic maps* Experiment Math. 1 (1992) N°1 5-24
- [12] Milnor, J., Tresser Ch. *On entropy and monotonicity for real cubic maps* Comm. Math. Phys, 209 (2000) N°1 123-178 (with an appendix by A, Dovady and P. Sentenac)
- [13] Labarca, R. *Bifurcation of Contracting Singular Cycles* Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 4^eserie,t. 28, pp 705-745 (1995).
- [14] Labarca, R. *A note on the topological classification of Lorenz maps on the interval.* Topics in symbolic dynamics an applications, London Math. Soc. Lect. Not. Ser. 279 (2000) pp 229-245. Cambridge Univ. Press.
- [15] Labarca, R. *Unfolding singular cycles.* Notas Soc. Mat. Chile (N5) N°1 (2001) pp 38-71.
- [16] Labarca,R.; Moreira C. *Bifurcation of the Essential Dynamics of Lorenz Maps of the real Line and the Bifurcation Scenario for the Linear family* Scientia Ser A Math. Sci (N-S) vol. 7 pp 13-29 (2001).
- [17] Labarca, R.; Moreira C. *Bifurcation of the Essential Dynamics of Lorenz Maps and applications to Lorenz Like Flows: Contributions to the study of the Expanding Case.* Bol. Soc. Bras. Mat. (N-S) Vol. 32 pp 107-144 (2001).

- [18] Labarca, R.; Moreira C. *Essential Dynamics for Lorenz Maps on the real line and Lexicographical World*. Ann. de L'Institut H. Poincaré Anal. non Linéaire vol. 23 pp 683-694 (2006).
- [19] Labarca, R.; Moreira, C. *Bifurcation of the essential dynamics of Lorenz Maps on the real line and the bifurcation scenario for Lorenz like flows: The Contracting Case* Proyecciones. Journal of Mathematics. Vol 29 N° 3, pp 241-289. 2010.
- [20] Labarca, R.; Moreira, C.; Pumariño, A.; Rodríguez, J.A. “*On bifurcation set for symbolic dynamics in the Milnor-Thurston world.*” Comm. in Contemp. Math. 2012, vol. 14 N°4 (2012) 1250024 pp 1-16.
- [21] Labarca R., Plaza S. *Bifurcations of discontinuous maps of the interval and palindromic numbers*. Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana(3) Vol 5., pp 87-104.2001
- [22] Labarca, R.; San Martín, B. *Prevalence of hyperbolicity for complex singular cycles*. Bol. Soc. Brasil. Mat. (N5) 28 (1997) N°2 pp 343-362.
- [23] Labarca, R.; Vásquez, L. *On the Characterization of the kneading sequences associated to Lorenz maps of the interval and to orientation preserving homeomorphism of the circle* Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana (3) Vol. 16 N°2. Octubre 2010, pp 103-118.
- [24] Labarca R., Vásquez L. *On the Characterization of the Kneading Sequences Associated to Lorenz Maps of the Interval*. Bol. Soc. Bras. Mat. (NS) vol. 43 N° 2, pp 221-245 (2012).
- [25] Lorenz E.N. *Deterministic non-periodic flow* J. Atmos. Sci. **20**, 130-141 (1963).
- [26] Moreira, C. *Maximal invariant sets for restriction of tent and unimodal maps*. Qual. Theory Dyn. Syst. 2 (2001) N°2 385-398.
- [27] Metropolis, N.; Stein, M. L. ; Stein, P.R. “*Stable States of a nonlinear transformation.*”. Numerisch Mathematik 10, 1-19 (1967)

- [28] Metropolis, N.; Stein, M. L.; Stein, P. R. “*On finite limit sets for transformations on the unit interval.*”. Journal of combinatorial Theory (A) 15, 25-44 (1973).
- [29] Milnor, J. ; Thurston, W. *On iterated maps on the interval.* Lect. Notes in Math 1342 pp 465-563 Springer Verlag (1988).
- [30] Smale, S. *Differentiable dynamical systems.* Bull. Amer. Math. Soc. 73 (1967) 747-819.
- [31] Williams, R.F. *The structure of Lorenz Attractors* In *Turbulence Seminar Berkeley 1976/1977* P. Bernard, T. Ratiu (Eds.) pp. 94-112 Springer-Verlag. New York, Heidelberg, Berlin.
- [32] Zacks, Mikhail A. *Scaling Properties and renormalization invariants for the “homoclinic quasiperiodicity”.* Physica D, vol 92 (1993) pp 300-316.