Grupos hiperbólicos

Sebastián Barbieri
DMCC, Universidad de Santiago de Chile.

La teoría de grupos hiperbólicos fue introducida por Gromov en 1987 [5] usando una caracterización de la geometría hiperbólica para espacios métricos usando triángulos geodésicos δ-delgados. Sus ideas se convirtieron rápidamente en un área de investigación extremadamente activa y con resultados soprendentes que mezclan elementos de la teoría de grupos, la geometría, la dinámica y la calculabilidad.

En la primera parte del curso estudiaremos algunos modelos de hiperbolicidad clásicos para espacios métricos, tales como el disco de Poincaré, el semiplano superior, árboles y algunos modelos de dimensión superior. Formalizaremos la noción de geodésicas, estudiaremos el borde de un espacio, su métrica visual y estudiaremos propiedades de rigidez de estos espacios.

En la segunda parte del curso abandonaremos el contexto general para focalizarnos en el caso de un grupo finitamente generado desde un punto de vista geométrico considerando su grafo de Cayley. Mostraremos como ésta noción permite generalizar varias propiedades que son válidas en árboles a grupos bastante complejos. En particular mostraremos que esta clase de grupos satisface buenas propiedades algebraicas y geométricas, como por ejemplo, que son finitamente presentados (de tipo F_∞), que satisfacen la alternativa de tits, que tienen crecimiento exponencial (si no son virtualmente libres), etc.

La última parte del curso corresponderá a tópicos más avanzados y dependerá del interés del curso en los temas propuestos. Algunas posibilidades son

1. Propiedades algorítmicas de grupos hiperbólicos (problema de la palabra decidible y algoritmo de Dehn).
2. Dinámica simbólica en grupos hiperbólicos: la acción de un grupo hiperbólico natural sobre su borde es un "buen" factor topológico de un subshift de tipo finito.
3. Propiedades que ocurren de manera "genérica" (por ejemplo en término de un grupo cuyas relaciones se eligen aleatoriamente) en grupos hiperbólicos, como por ejemplo que su borde es isométrico a una esponja de Menger.

La primera parte del curso será relativamente breve y estará basada en el capítulo 4 de [2] y en la primera parte de [4]. Para la segunda parte utilizaremos la dos referencias anteriores junto con [1].

Para la última parte del curso la bibliografía dependerá de la dirección que decidamos tomar. Por ejemplo, [6] da un recuento muy abundante de resultados sobre bordes de grupos hiperbólicos. Los resultados sobre calculabilidad se pueden encontrar en [3], etc. Daremos esa parte de la bibliografía a medida que lleguemos al fin del curso.

La evaluación del curso se realizará mediante una tarea continua que evaluará los contenidos de las primeras dos partes del curso, y una exposición sobre temas opcionales hacia el final del curso.

Referencias

[1] M. Coornaert and A. Papadopoulos. *Symbolic Dynamics and Hyperbolic Groups.* Lecture Notes in Mathematics. Springer Berlin Heidelberg, 2006.

[2] C. Druţu and M. Kapovich. *Geometric Group Theory.* American Mathematical Society, Mar. 2018.

[3] D. Epstein. *Word Processing in Groups.* Ak Peters Series. Taylor & Francis, 1992.

[4] É. Ghys, d. l. Harpe, P. de La Harpe, and M. Gromov. *Hyperbolic groups.* Progress in Mathematics. Birkhäuser Boston, 1990.

[5] M. Gromov. Hyperbolic groups. In *Essays in Group Theory*, pages 75–263. Springer New York, 1987.

[6] I. Kapovich and N. Benakli. Boundaries of hyperbolic groups, 2002.