

UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN



ECUACIONES DE TIPO PSEUDO-ESFÉRICO Y ECUACIONES QUE DESCRIBEN SUPERFICIES EN LA TRES-ESFERA

POR
ARTURO BENSON RADRIGÁN

Dirigida por:
Dr. Enrique Reyes García

Tesis presentada al Departamento de Matemática y Ciencia de la Computación de la Facultad de Ciencia de la Universidad de Santiago de Chile, para optar al grado de Doctorado en Ciencia en la especialidad de Matemática.

Segundo Semestre, 2023, Santiago, Chile.
©2023, Arturo Benson Radrigán.

©2023, Arturo Benson Radrigán

Se autoriza la reproducción total o parcial, con fines académicos, por cualquier medio o procedimiento, incluyendo la cita bibliográfica que acredita al trabajo y a su autor.

Resumen

En este trabajo se estudian ecuaciones que modelan superficies inmersas en la tres-esfera S^3 y/o superficies pseudo-esféricas y esféricas. También hacemos algunos comentarios sobre el modelamiento discreto de superficies pseudo-esféricas inmersas en \mathbb{R}^3 .

Nuestro primer resultado es sobre el contenido geométrico de las ecuaciones integrables de tipo Rosenau-Hyman [Ro05]. En [HerRe20] se clasificaron todas las ecuaciones de la familia de Rosenau-Hyman que son integrables (en el sentido que poseen una cantidad infinita de simetrías). En esta tesis probamos que todas las ecuaciones encontradas en [HerRe20] describen superficies pseudo-esféricas.

Las soluciones de una ecuación que describe superficies pseudo-esféricas (esféricas) determinan métricas Riemannianas de curvatura Gaussiana -1 (1), pero *no* dan información sobre cómo estas superficies están inmersas en \mathbb{R}^3 . En [Be18] se calculó la segunda forma fundamental de algunas superficies y se construyeron inmersiones de manera numérica, siguiendo un procedimiento sugerido por Z. Koze [Ko10]. En este trabajo mostramos gráficos de soluciones de ecuaciones diferenciales interesantes (por ejemplo, la ecuación de Sine-Gordon o la ecuación de pulso corto), las cuales poseen la estructura de superficie pseudo-esférica.

También introducimos una nueva clase de ecuaciones con contenido geométrico, las "ecuaciones de tipo Lund-Regge", que describen superficies inmersas en la 3-esfera S^3 y se encuentran caracterizaciones de estas ecuaciones. En particular caracterizamos ecuaciones de tipo Lund-Regge que describen superficies mínimas en S^3 .

En este trabajo se utilizan herramientas de tres áreas de la matemática; se comienza con geometría diferencial, se aplica análisis numérico, computación simbólica y también se pasa por la teoría de ecuaciones diferenciales.

Abstract

In this work we study equations that model immersed surfaces in the three-sphere S^3 and/or pseudo-spherical and espherical surfaces. We also make some comments on the discrete modeling of pseudo-espherical surfaces immersed in \mathbb{R}^3 .

Our first result is about the geometric content of the integrable equations of Rosenau-Hyman type [Ro05]. In [HerRe20] all equations of the Rosenau-Hyman family that are integrable (in the sense that they have an infinite number of symmetries) were classified. In this thesis we prove that all the equations found in [HerRe20] describe pseudo-spherical surfaces.

The solutions of a equation that describe pseudo-spherical (spherical) surfaces determine a riemannian metric of Gaussian curvature -1 (1) but they don't give information about how these surfaces are immersed in \mathbb{R}^3 . In [Be18] we calculated the second fundamental form of some surfaces and we constructed immersions in a numeric way , following a suggested procedure by Z. Koze [Ko10]. In this work we show graphs of solutions of interesting differential equations (for example, the Sine-Gordon equation or the short pulse equation), which have the structure of pseudo-spherical surface.

Also we study immersions determined by "equations of Lund-Regge type", that describe surfaces in the three-sphere S^3 and we find a characterization of these equations. In particular we characterize equations of Lund-Regge type that describe minimal surfaces in S^3 .

In this work, we use tools of three areas of mathematics; starting with differential geometry, we apply numerical analysis, symbolic computation and also we use the theory of differential equations.

Agradecimientos

Doy gracias a Dios por el trabajo de tesis realizado, gracias por la organización y paciencia.

Doy gracias a la familia; a mis padres por todo el apoyo, por creer en lo que puedo lograr académicamente y siempre acompañandome en etapas importantes de mi vida, también a mis hermanos por su atención y a mis sobrinos por el cariño.

Quiero dar gracias a mis amistades que me apoyaron y siempre fueron optimistas conmigo, también a algunos profesores de la facultad por sus atenciones.

Doy gracias a Anid por la beca de “Doctorado Nacional” con número de folio 21190661, que se me otorgó en el año 2019 para realizar mis estudios de doctorado (cuando ingresé al doctorado, la beca venía otorgada por Conicyt).

Doy gracias a profesor Enrique, por su dedicación y disposición ya que hubo días en que estuvimos toda una jornada revisando contenidos de la tesis y también a la secretaria Carolina Villagra por sus gestiones.

Índice general

Índice general	iv
Índice de figuras	vi
1. Preliminares Geométricos	4
1.1. Nociones de Geometría Diferencial	4
1.2. Formas de Conexión para la Pseudoesfera	13
1.3. Nociones de Geometría Riemanniana	17
2. Ecuaciones que describen superficies de curvatura constante	26
2.1. Ecuaciones de Tipo Pseudo-Esférico	26
2.2. Ecuaciones de Tipo Esférico	36
2.3. Ecuación de Corto Pulso	39
2.4. Cálculo de Inmersiones	72
3. Ecuaciones de Rosenau y Hyman	77
4. Superficies Inmersas en la Tres-Esfera S^3	94
4.1. Ecuaciones de tipo Lund-Regge, definición y ejemplos	94

4.2. Clasificación de Ecuaciones de tipo Lund-Regge	119
5. Modelamiento Discreto de Superficies Pseudo-Esféricas	139
5.1. Geometría Diferencial Discreta	139
5.2. Modelamiento Discreto de las Superficies Pseudo-Esféricas	144
5.2.1. Modelamiento de la pseudoesfera	147
A. Programa en Maple de teorema 2.1 y 2.2	152
Bibliografía	162

Índice de figuras

1.1. Pseudoesfera Clásica	16
1.2. Pseudoesfera Hiperbólica	17
2.1. Solución de Ecuación Sine Gordon a través de transformación de Backlund	35
2.2. Solución (2.51) de Ecuación Sine-Gordon	50
2.3. Solución (2.53) de Ecuación Corto Pulso	50
2.4. Solución (2.54) de Ecuación Sine-Gordon	51
2.5. Solución (2.56) de Ecuación Corto Pulso	52
4.1. Onda viajera con $f(0) = 1$ y $f'(0) = 1,5$	101
4.2. Onda viajera con $f(0) = 1$ y $f'(0) = 1$	102
4.3. Onda viajera con $f(0) = 1$ y $f'(0) = 0,8$	103
4.4. Onda viajera con $f(0) = 1$ y $f'(0) = \frac{1}{1000}$	104
4.5. Onda viajera con $f(0) = 1$ y $f'(0) = \frac{1}{1000000}$	105
4.6. Onda viajera con $f(0) = 1$ y $f'(0) = \frac{1}{100000000}$	106
4.7. Onda viajera con $f(0) = 1$ y $f'(0) = 0$	107
4.8. Onda viajera de Sine-Gordon con $f(0) = 1$ y $f'(0) = 1,5$, compare con (4.1)	108
4.9. Onda viajera de Sine-Gordon con $f(0) = 1$ y $f'(0) = 1$, compare con (4.2)	108

4.10. Onda viajera de Sine-Gordon con $f(0) = 1$ y $f'(0) = 0,8$, compare con (4.3)	109
4.11. Onda viajera de Sine-Gordon con $f(0) = 1$ y $f'(0) = \frac{1}{1000}$, compare con (4.4)	109
4.12. Onda viajera de Sine-Gordon con $f(0) = 1$ y $f'(0) = \frac{1}{1000000}$, compare con (4.5)	110
4.13. Onda viajera de Sine-Gordon con $f(0) = 1$ y $f'(0) = \frac{1}{100000000}$, compare con (4.6)	110
4.14. Onda viajera de Sine-Gordon con $f(0) = 1$ y $f'(0) = 0$, compare con (4.7) .	111
4.15. Onda viajera de Corto Pulso con $f(0) = 1$ y $f'(0) = 1,5$, compare con (4.1)	112
4.16. Onda viajera de Corto Pulso con $f(0) = 1$ y $f'(0) = 1$, compare con (4.2) .	112
4.17. Onda viajera de Corto Pulso con $f(0) = 1$ y $f'(0) = 0,8$, compare con (4.3)	113
4.18. Onda viajera de Corto Pulso con $f(0) = 1$ y $f'(0) = \frac{1}{1000}$, compare con (4.4)	113
4.19. Onda viajera de Corto Pulso con $f(0) = 1$ y $f'(0) = \frac{1}{1000000}$, compare con (4.5)	114
4.20. Onda viajera de Corto Pulso con $f(0) = 1$ y $f'(0) = \frac{1}{100000000}$, compare con (4.6)	114
4.21. Onda viajera de Corto Pulso con $f(0) = 1$ y $f'(0) = 0$, compare con (4.7) .	115
5.1. Modelamiento Discreto de Pseudoesfera Clásica	146

Introducción

Supongamos que una superficie S está equipada con una métrica g ; esta métrica determina de manera intrínseca la curvatura Gaussiana de S (éste es el *Teorema Egregium* de Gauss). Ahora, la métrica g se puede escribir localmente, en términos de coordenadas (x, t) , como

$$g = E dx \otimes dx + F(dx \otimes dt + dt \otimes dx) + G dt \otimes dt ,$$

y la curvatura Gaussiana K de S es una expresión que contiene segundas derivadas de E, F, G . Algunas veces las funciones E, F, G se escriben en términos de una única función $z(x, t)$ y una cantidad finita de derivadas de $z(x, t)$, y por lo tanto una ecuación del tipo “ $K = -1$ ” (es decir, una ecuación que afirma que la superficie S es una superficie pseudo-esférica) se puede interpretar como una ecuación diferencial para z .

Decimos que una ecuación $K(z(x, t), z_x(x, t), z_t(x, t), \dots) = 0$ describe superficies pseudo-esféricas (o, que es de tipo pseudo-esférico) si las soluciones de esta ecuación nos permiten definir funciones E, F, G tales que el tensor

$$g = E(z(x, t)) dx \otimes dx + F(z(x, t))(dx \otimes dt + dt \otimes dx) + G(z(x, t)) dt \otimes dt$$

es una métrica Riemanniana de curvatura Gaussiana -1 en una superficie S con coordenadas (x, t) .

Las soluciones de una ecuación de tipo pseudo-esférico determinan métricas de curvatura Gaussiana -1 , pero *no* dan información sobre cómo estas superficies están inmersas en \mathbb{R}^3 : decimos que estas superficies están descritas intrínsecamente, como variedades abstractas. En [Be18] se calculó la “segunda forma fundamental” de algunas de estas superficies, un objeto geométrico que nos indica cómo se “curva” la superficie dentro de \mathbb{R}^3 y se construyeron inmersiones de manera numérica con una cantidad finita de puntos usando la segunda forma fundamental, siguiendo un procedimiento sugerido por Z. Koze [Ko10] que consiste en calcular los coeficientes de la primera y segunda forma fundamental, realizar el cambio a coordenadas isotermas, y en estas coordenadas resolver un sistema de ecuaciones

diferenciales parciales de manera numérica con apropiadas condiciones iniciales. Al aplicar este procedimiento, obtenemos puntos de la inmersión de la superficie pseudo-esférica y podemos graficar esta superficie inmersa en \mathbb{R}^3 .

En este trabajo, nuestras contribuciones son las siguientes:

- (i) Introducir las ecuaciones de Rosenau y Hyman (RH) y probar que todas las ecuaciones RH que son de la forma $u_t = F(u, u_x, u_{xx}, u_{xxx})$ y que son integrables, describen superficies pseudo-esféricas.
- (ii) Introducir ecuaciones de tipo Lund-Regge, las cuales describen superficies inmersas en la 3-esfera S^3 . Se estudia cuándo estas ecuaciones describen superficies mínimas en S^3 y se establecen resultados de clasificación para estas ecuaciones.

Las herramientas teóricas que se usan en este trabajo son: Geometría Diferencial, en especial el punto de vista de Cartan de estudiar variedades Riemannianas mediante formas diferenciales y ecuaciones de estructura; la teoría de ecuaciones pseudo-esféricas; la teoría de ecuaciones de tipo Lund-Regge.

Esta tesis se puede considerar como una contribución al estudio de la geometría de ecuaciones diferenciales [Re11]. Se muestra como encontrar 1-formas diferenciales asociadas a una ecuación diferencial parcial, de modo que estas 1-formas cumplan las ecuaciones de estructura de superficies pseudo-esféricas (esféricas) y también se contribuye al estudio de clasificación de ecuaciones que describen superficies interesantes inmersas en S^3 . Además observamos que ecuaciones de tipo Lund-Regge son la condición de integrabilidad de sistemas lineales de 3×3 sobredeterminados en $SL(3, \mathbb{R})$, y por lo tanto podrían ser estudiadas analíticamente usando scattering/inverse scattering [Ten98].

Sobre la literatura actual, mencionamos que existen trabajos recientes en que se estudia si es posible clasificar ecuaciones pseudo-esféricas $G(x, t, u, u_x, \dots, u_{x..x}, u_t, \dots, u_{t..t}, u_{xt}, \dots) = 0$ que admiten segundas formas fundamentales explícitas que permitan construir inmersiones isométricas locales [CD17] (generalizaciones de este tema aparecen en [Ten98] capítulo 2 y capítulo 4). También, cuando se tiene una superficie pseudo-esférica determinada por una solución $u(x, t)$ de una ecuación diferencial $u_t = F(u, u_x, \dots, u_{x..x})$, uno se hace la pregunta: Los coeficientes de la segunda forma fundamental de la inmersión isométrica local en \mathbb{R}^3 dependen de una cantidad de orden finita de derivadas de u o no?. La respuesta está en [KKT15] y [KKT16], también alrededor de 2015 se planteó en [KKT15]: Si es posible encontrar formas de conexión w_{13}, w_{23} para una ecuación de tipo pseudo-esférico dada.

La tesis está compuesta por 5 capítulos. El capítulo 1 consiste en la explicación de conceptos geométricos que se usan a lo largo del trabajo, como la primera y segunda forma

fundamental [Ca76D], curvatura gaussiana, formas de conexión. El capítulo 2 trata de ecuaciones de tipo pseudo-esférico, de tipo esférico (dando definiciones y ejemplos), también estudiamos la ecuación general de corto pulso en que algunos casos corresponde a una ecuación de tipo pseudo-esférico y en otros a una ecuación de tipo esférico. El capítulo 3 es sobre ecuaciones de Rosenau y Hyman (RH), para cada ecuación RH que sea integrable, se probará que es de tipo pseudo-esférico. El capítulo 4 se introducen las ecuaciones de tipo Lund-Regge y realizamos una clasificación de estas ecuaciones que describen superficies en la esfera S^3 . El capítulo 5 es de proyección futura, trata de geometría diferencial discreta, describiendo conceptos y técnicas importantes, para luego aplicar estas técnicas en el modelamiento de superficies pseudo-esféricas.

Objetivos

Objetivo general

Dada una ecuación diferencial parcial, construir 1-formas diferenciales de modo que la ecuación describa superficies con curvatura seccional constante y estudiar familias de ecuaciones que describen superficies en la esfera S^3 . Probar que todas las ecuaciones integrables de la familia RH describen superficies pseudo-esféricas.

Objetivo específicos

1. Introducir conceptos de Geometría Diferencial fundamentales para la tesis, como curvatura gaussiana, formas de conexión, ecuaciones de estructura de superficies.
2. Estudiar sobre ecuaciones que describen superficies con curvatura gaussiana constante y un ejemplo particular de estas ecuaciones; la “ecuación de corto pulso”.
3. Encontrar 1-formas diferenciales a las ecuaciones integrables de Rosenau y Hyman, de modo que estas ecuaciones describan superficies pseudo-esféricas.
4. Encontrar clasificaciones de ecuaciones diferenciales parciales que describan superficies en la esfera S^3 (entre ellas, clasificaciones de ecuaciones que describan superficies mínimas en S^3).

Preliminares Geométricos

En este capítulo se explican conceptos geométricos que sirven de base para lograr el objetivo general de este trabajo. Se explican las nociones de primera y segunda forma fundamental de una superficie y se presentan las ecuaciones de estructura para una superficie en \mathbb{R}^3 . Por último, también se dan algunos detalles de la teoría de conexiones en geometría riemanniana y hablamos sobre las ecuaciones de Weingarten, que se usan para calcular el vector normal de la superficie dada su primera y segunda forma fundamental.

1.1. Nociones de Geometría Diferencial

En esta sección explicamos conceptos fundamentales de geometría de superficies, como la aplicación de Gauss, la primera y segunda forma fundamental, la curvatura gaussiana, la curvatura media, las formas de conexión y las ecuaciones de estructura.

Definición 1.1. *Dada una superficie S en \mathbb{R}^3 con una parametrización $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$, llamamos aplicación de Gauss a la función $N : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2$, dada por*

$$N = \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|} \tag{1.1}$$

Sea la superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ con parametrización $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ definida como $\varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ [Ca76D]. Entonces la primera forma fundamental se define como

$$\begin{aligned}
I &= \langle d\varphi, d\varphi \rangle \\
&= \langle \varphi_u du + \varphi_v dv, \varphi_u du + \varphi_v dv \rangle \\
&= \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle du^2 + 2\langle \varphi_u, \varphi_v \rangle dudv + \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle dv^2 \\
&= Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2
\end{aligned} \tag{1.2}$$

Donde $E = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle$, $F = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle$ y $G = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle$. Las funciones E , F y G se llaman coeficientes de la primera forma fundamental. Rigurosamente la primera forma fundamental es el tensor

$$I = Edu \otimes du + Fdu \otimes dv + Fdv \otimes du + Gdv \otimes dv$$

La segunda forma fundamental se define como $II = -\langle d\varphi, dN \rangle$ donde N es la aplicación de Gauss definida en (1.1). Tenemos

$$\begin{aligned}
II &= -\langle d\varphi, dN \rangle \\
&= -\langle \varphi_u du + \varphi_v dv, N_u du + N_v dv \rangle \\
&= -(\langle \varphi_u, N_u \rangle du^2 + (\langle \varphi_u, N_v \rangle + \langle \varphi_v, N_u \rangle) dudv + \langle \varphi_v, N_v \rangle dv^2)
\end{aligned}$$

Pero $\langle N, \varphi_u \rangle = 0$, entonces derivando con respecto a u tenemos $\langle N_u, \varphi_u \rangle + \langle N, \varphi_{uu} \rangle = 0 \Rightarrow \langle N, \varphi_{uu} \rangle = -\langle N_u, \varphi_u \rangle$

De igual forma, derivando con respecto a v y a u , tenemos

$$\begin{aligned}
\langle N, \varphi_v \rangle = 0 &\Rightarrow \langle N, \varphi_{vv} \rangle = -\langle N_v, \varphi_v \rangle \\
\langle N, \varphi_u \rangle = 0 &\Rightarrow \langle N, \varphi_{uv} \rangle = -\langle N_v, \varphi_u \rangle \\
\langle N, \varphi_v \rangle = 0 &\Rightarrow \langle N, \varphi_{vu} \rangle = -\langle N_u, \varphi_v \rangle
\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}
II &= \langle N, \varphi_{uu} \rangle du^2 + 2\langle N, \varphi_{uv} \rangle dudv + \langle N, \varphi_{vv} \rangle dv^2 \\
&= edu^2 + 2fdudv + gdv^2,
\end{aligned} \tag{1.3}$$

donde $e = \langle \varphi_{uu}, N \rangle$, $f = \langle \varphi_{uv}, N \rangle$ y $g = \langle \varphi_{vv}, N \rangle$. Las funciones e , f y g se llaman coeficientes de la segunda forma fundamental.

Existen dos medidas de curvatura bien usuales en la geometría diferencial de superficies en \mathbb{R}^3 que son la curvatura gaussiana y la curvatura media. La curvatura gaussiana K

mide la curvatura intrínseca en cada punto de la superficie, la curvatura media H mide la curvatura extrínseca (cómo se curva la superficie con respecto al espacio ambiente) en cada punto de la superficie. La curvatura gaussiana K y la curvatura media H se pueden expresar en términos de los coeficientes de la primera y segunda forma fundamental:

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \quad (1.4)$$

$$H = \frac{eG - 2fF + gE}{2(EG - F^2)} \quad (1.5)$$

También podemos calcular la curvatura gaussiana y la curvatura media usando las curvaturas principales k_1 y k_2 (los valores propios de la segunda forma fundamental [Ca94]):

Se tiene que $K = k_1 k_2$ y $H = \frac{k_1 + k_2}{2}$.

Definición 1.2. *Una superficie es mínima si $H = 0$.*

Vamos a tener la oportunidad de usar algunos sistemas especiales de coordenadas que existen localmente. Definimos:

Definición 1.3. *Una superficie está parametrizada en coordenadas isotérmicas si $E = G = \lambda^2$ y $F = 0$, donde $\lambda : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.*

En el artículo [Che54] se prueba que toda superficie suave admite coordenadas isotérmicas localmente.

Como ejemplo de cómo la geometría interactúa con topología, presentamos la siguiente proposición:

Proposición 1.1. *Si una superficie S es compacta en \mathbb{R}^3 entonces existe $q \in S$ tal que $K(q) > 0$.*

Demostración. Sea S una superficie compacta inmersa en \mathbb{R}^3 y sea $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(p) = \|p\|$, donde $\| \cdot \|$ es la norma euclídeana en \mathbb{R}^3 .

f es continua y S es compacta $\Rightarrow f(S)$ es un conjunto compacto en \mathbb{R}
 $\Rightarrow f(S)$ es acotado.

Tomamos r como el máximo de $f \Rightarrow \exists q \in S$ tq $f(q) = r$

Sea $S_r \subset \mathbb{R}^3$ la esfera con centro en el origen y radio r , $\forall w \in S_r$, se cumple $\|w\| = r$

En particular como $f(q) = \|q\| = r$, entonces $q \in S_r$ y además S está contenida en la bola de radio r . Luego como

$$q \in S \cap S_r \Rightarrow K(q) \geq K_{S_r}(q) = \frac{1}{r^2} > 0$$

\therefore Para algún $q \in S$ se cumple $K(q) > 0$. □

El contrareciproco de esta proposición nos dice que si $K(q) < 0, \forall q \in S$, entonces S no es compacta. En particular, las superficies pseudo-esféricas no son compactas. Otro resultado ininteresante para nosotros es :

Lema 1.1. *No existen superficies mínimas compactas en \mathbb{R}^3 .*

Demostración. Sea S superficie y $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$, podemos reparametrizar S , de modo que

$$E = \lambda^2, \quad F = 0 \quad G = \lambda^2$$

con $\lambda : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, así S queda reparametrizada en coordenadas isotérmicas. Supongamos que S es mínima y compacta, entonces

$$\begin{aligned} H &= \frac{eG - 2fF + gE}{2(EG - F^2)} \\ &= \frac{\lambda^2 e + \lambda^2 g}{2\lambda^4} = \frac{e + g}{2\lambda^2} \end{aligned}$$

Como S es mínima $\Rightarrow H = 0 \Rightarrow e = -g$. Entonces

$$\begin{aligned} K &= \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \\ &= \frac{-(g^2 + f^2)}{\lambda^4} < 0 \end{aligned}$$

Pero como S es compacta, entonces existe $q \in S$ tal que $K(q) > 0$, lo que nos lleva a una contradicción. Concluimos que efectivamente no existen superficies mínimas compactas. □

Este lema es importante para nosotros porque nos permite comparar con lo que sucede en S^3 (capítulo 4). En S^3 se sabe que sí existen superficies mínimas compactas [Kap10]. El trabajo del capítulo 4 podría permitirnos construir nuevos ejemplos de superficies mínimas compactas en S^3 ; esto queda como proyección futura.

Ahora trabajamos en \mathbb{R}^n por un momento, pues lo que sigue es válido en dimensiones arbitrarias. Consideramos una base de campos vectoriales diferenciables $\{e_1, \dots, e_n\}$ en $U \subset \mathbb{R}^n$ tal que $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$. En cada $p \in U$, definimos la base de 1-formas diferenciales $\{(w_i)_p\}$ como la base dual de $\{(e_i)_p\}$, esto es,

$$w_i(e_j) = \delta_{ij} \text{ para } i, j = 1, 2, \dots, n \text{ [Ca94].}$$

Para cada campo vectorial e_i considerado como una función $e_i : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, con $i = 1, \dots, n$ se tiene

$$de_i = \sum_j w_{ij} e_j \tag{1.6}$$

donde w_{ij} se llaman formas de conexión de \mathbb{R}^n en la base ortonormal $\{e_i\}_{i=1, \dots, n}$ [Hi65]. Notemos que $w_{ij} = -w_{ji}$ ya que

$$\begin{aligned} \delta_{ij} &= \langle e_i, e_j \rangle \text{ /tomando derivada exterior } d \\ 0 &= \langle de_i, e_j \rangle + \langle e_i, de_j \rangle \\ 0 &= \left\langle \sum_k w_{ik} e_k, e_j \right\rangle + \left\langle e_i, \sum_l w_{jl} e_l \right\rangle \\ 0 &= w_{ij} + w_{ji} \end{aligned}$$

Se sigue que $w_{ii} = 0$. El siguiente resultado relaciona una cobase $\{w_i\}$ de la base $\{e_i\}$ con las formas de conexión.

Proposición 1.2. *Sea $\{e_i\}$ una base de campos vectoriales definida en un abierto $U \subset \mathbb{R}^n$ y sea $\{w_i\}$ su base dual. Si w_{ij} son las formas de conexión de U en la base $\{e_i\}$ entonces*

$$dw_i = \sum_{k=1}^n w_k \wedge w_{ki} \tag{1.7}$$

$$dw_{ij} = \sum_{k=1}^n w_{ik} \wedge w_{kj} \tag{1.8}$$

Demostración. Tomamos base usual de \mathbb{R}^n , $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\}$ y la base dual $\{dx_1, dx_2, \dots, dx_n\}$, entonces

$$e_i = \sum_k \beta_{ik} \frac{\partial}{\partial x_k} \quad (1.9)$$

donde $[\beta_{ik}]$ es una matriz ortogonal. También podemos escribir

$w_i = \sum_k \gamma_{ik} dx_k$. Entonces

$$\begin{aligned} w_i(e_j) &= \sum_k \gamma_{ik} dx_k \left(\sum_s \beta_{js} \frac{\partial}{\partial x_s} \right) \\ &= \sum_k \sum_s \gamma_{ik} \beta_{js} dx_k \frac{\partial}{\partial x_s} \\ &= \sum_k \gamma_{ik} \beta_{jk} \end{aligned}$$

entonces $\delta_{ij} = \sum_k \gamma_{ik} \beta_{jk}$. Como $A = [\beta_{ik}]$ es una matriz ortogonal, tenemos que $A \cdot A^t = id$. Es decir, $\sum \beta_{ik} \beta_{jk} = \delta_{ij}$. Se sigue que $\gamma_{ik} = \beta_{ik}$. Así

$$w_i = \sum_k \beta_{ik} dx_k \quad (1.10)$$

Luego, $de_i = \sum_k w_{ik} e_k = \sum_k w_{ik} \left(\sum_j \beta_{kj} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) = \sum_k \sum_j w_{ik} \beta_{kj} \frac{\partial}{\partial x_j}$

De (1.9) se tiene $de_i = \sum_j d\beta_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j}$. Comparamos las dos últimas ecuaciones y encontramos

$$d\beta_{ij} = \sum_k w_{ik} \beta_{kj} \quad (1.11)$$

Diferenciando (1.10) tenemos

$$dw_i = \sum_j d\beta_{ij} \wedge dx_j = \sum_j \sum_k w_{ik} \beta_{kj} \wedge dx_j = \sum_k \left(\sum_j \beta_{kj} dx_j \right) \wedge w_{ki} = \sum_k w_k \wedge w_{ki}$$

Así probamos (1.7). Ahora probemos (1.8), diferenciando (1.11) tenemos

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_k (\beta_{kj} dw_{ik} + d\beta_{kj} \wedge w_{ik}) \\
&= \sum_k (\beta_{kj} dw_{ik} - w_{ik} \wedge d\beta_{kj})
\end{aligned}$$

Luego

$$\sum_k \beta_{kj} dw_{ik} = \sum_k w_{ik} \wedge d\beta_{kj} = \sum_k (w_{ik} \wedge \sum_s w_{ks} \beta_{sj}) = \sum_s \sum_k (w_{ik} \wedge w_{ks}) \beta_{sj}$$

entonces

$$\sum_s dw_{is} \beta_{sj} = \sum_s \left(\sum_k w_{ik} \wedge w_{ks} \right) \beta_{sj} \quad (1.12)$$

multiplicando por la matriz inversa $(\beta)^{-1} := (\alpha)$ en (1.12), tenemos

$$\sum_r \sum_s dw_{is} \beta_{sr} \alpha_{rp} = \sum_r \sum_s \sum_k (w_{ik} \wedge w_{ks}) \beta_{sr} \alpha_{rp}.$$

Notemos que $\sum_r \beta_{sr} \alpha_{rp} = \delta_{sp}$, por lo tanto se llega a $dw_{ip} = \sum_k w_{ik} \wedge w_{kp}$, que es precisamente la ecuación (1.8) con p intercambiado con j . \square

La demostración anterior está inspirada en [Ca94]. Las ecuaciones (1.7) y (1.8) se llaman ecuaciones de estructura de \mathbb{R}^n . Estas ecuaciones las utilizaremos para mostrar resultados más adelante.

Lema 1.2. *Sea V^n un espacio vectorial y $w_1, \dots, w_r : V^n \rightarrow \mathbb{R}$ 1-formas linealmente independientes, con $r \leq n$. Supongamos que existen 1-formas $\theta_1, \dots, \theta_r : V \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\sum_{i=1}^r w_i \wedge \theta_i = 0$. Entonces existen funciones suaves a_{ij} tq*

$$\theta_i = \sum_j a_{ij} w_j, \quad a_{ij} = a_{ji}. \quad (1.13)$$

Demostración. Completamos las formas w_i para obtener una base $w_1, \dots, w_r, w_{r+1}, \dots, w_n$ de V^* y escribimos $\theta_i = \sum_j a_{ij} w_j + \sum_l b_{il} w_l$, con $j = 1, \dots, r$ y $l = r+1, \dots, n$. Por la hipótesis, tenemos

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{i=1}^r w_i \wedge \theta_i = \sum_{ij} a_{ij} w_i \wedge w_j + \sum_l b_{il} w_i \wedge w_l \\
&= \sum_{i < j} (a_{ij} - a_{ji}) w_i \wedge w_j + \sum_{i < l} b_{il} w_i \wedge w_l
\end{aligned}$$

Como $w_k \wedge w_s$ son linealmente independientes, con $k < s$ y $k, s = 1, \dots, n$, concluimos que $b_{il} = 0$ y $a_{ij} = a_{ji}$. \square

Ahora nos restringimos para $n = 3$. Para una superficie en \mathbb{R}^3 equipada con una base $\{e_1, e_2\}$, la completamos a base ortonormal de \mathbb{R}^3 , obteniendo $\{e_1, e_2, e_3\}$. Ahora tomamos la cobase asociada $\{w_1, w_2, w_3\}$ y las formas de conexión w_{12}, w_{13}, w_{23} .

Imponemos $w_3 = 0$ para trabajar en la superficie y podemos obtener ecuaciones de estructura para la superficie en \mathbb{R}^3 , como se menciona en la siguiente proposición.

Proposición 1.3. *Sea S una superficie en \mathbb{R}^3 , equipada con 1-formas w_1, w_2, w_{12}, w_{13} y w_{23} , entonces estas 1-formas satisfacen las ecuaciones de estructura*

$$\begin{aligned} dw_1 &= w_{12} \wedge w_2 \\ dw_2 &= w_1 \wedge w_{12} \\ w_1 \wedge w_{13} + w_2 \wedge w_{23} &= 0 \\ dw_{13} &= w_{12} \wedge w_{23} \\ dw_{23} &= w_{13} \wedge w_{12} \end{aligned} \tag{1.14}$$

Demostración. Usamos las ecuaciones de estructura en \mathbb{R}^n , con $n = 3$, mencionadas en la proposición 1.2 e imponemos la condición $w_3 = 0$ en S .

Por (1.7) se tiene

$$dw_1 = \sum_{k=1}^3 w_k \wedge w_{k1} = w_1 \wedge w_{11} + w_2 \wedge w_{21} + w_3 \wedge w_{31} = w_2 \wedge w_{21} = w_{12} \wedge w_2$$

De igual forma

$$dw_2 = \sum_{k=1}^3 w_k \wedge w_{k2} = w_1 \wedge w_{12}$$

y

$$dw_3 = \sum_{k=1}^3 w_k \wedge w_{k3} = w_1 \wedge w_{13} + w_2 \wedge w_{23}$$

$$\text{Además, } dw_3 = 0 \Rightarrow w_1 \wedge w_{13} + w_2 \wedge w_{23} = 0$$

Por (1.8) se tiene

$$dw_{13} = \sum_{k=1}^3 w_{1k} \wedge w_{k3} = w_{11} \wedge w_{23} + w_{12} \wedge w_{23} + w_{13} \wedge w_{33} = w_{12} \wedge w_{23}$$

De igual forma

$$dw_{23} = \sum_{k=1}^3 w_{2k} \wedge w_{k3} = w_{21} \wedge w_{13} = w_{13} \wedge w_{12} \quad \square$$

Si asignamos $\theta_i := w_{i3}$ para usar la notación del lema (1.2) y con la tercera ecuación de (1.14) entonces

$$w_1 \wedge \theta_1 + w_2 \wedge \theta_2 = 0$$

Por lema (1.2) se tiene

$$\begin{aligned} w_{13} &= h_{11}w_1 + h_{12}w_2 \\ w_{23} &= h_{21}w_1 + h_{22}w_2 \end{aligned}$$

Donde $h_{ij} = h_{ji}$ son funciones diferenciables. Luego podemos escribir las expresiones anteriores como

$$\begin{aligned} w_{13} &= aw_1 + bw_2 \\ w_{23} &= bw_1 + cw_2 \end{aligned} \quad (1.15)$$

con a , b y c funciones diferenciables.

Definición 1.4. *Supongamos que tenemos una superficie S en \mathbb{R}^3 , equipada con 1-formas w_1 , w_2 , w_{12} , w_{13} y w_{23} que satisfacen las ecuaciones de estructura (1.14). La curvatura Gaussiana K y la curvatura media H de S se pueden definir como*

$$dw_{12} = -Kw_1 \wedge w_2 \quad (1.16)$$

$$w_1 \wedge w_{23} + w_{13} \wedge w_2 = 2Hw_1 \wedge w_2 \quad (1.17)$$

Esta definición implica que la curvatura gaussiana está determinada sólo por la geometría intrínseca de la superficie y que la curvatura media está determinada por la geometría extrínseca de la superficie. Para las funciones a , b y c que mencionamos en (1.15) tenemos la siguiente proposición.

Proposición 1.4. *Para una superficie S en \mathbb{R}^3 , equipada con 1-formas w_1 , w_2 , w_{12} , w_{13} y w_{23} que satisfacen las ecuaciones de estructura (1.14). La curvatura Gaussiana K y la curvatura media H de S se pueden calcular mediante*

$$K = ac - b^2 \quad (1.18)$$

$$H = \frac{a + c}{2} \quad (1.19)$$

Demostración. De la proposición (1.2) tenemos que $dw_{12} = w_{13} \wedge w_{32}$, entonces

$$dw_{12} = -w_{13} \wedge w_{23} = -(aw_1 + bw_2) \wedge (bw_1 + cw_2) = -(ac - b^2)w_1 \wedge w_2$$

Como $dw_{12} = -Kw_1 \wedge w_2$ se obtiene K dado por (1.18). Luego

$$\begin{aligned} w_1 \wedge w_{23} + w_{13} \wedge w_2 &= w_1 \wedge (bw_1 + cw_2) + (aw_1 + bw_2) \wedge w_2 \\ &= (a + c)w_1 \wedge w_2 \end{aligned}$$

Como $w_1 \wedge w_{23} + w_{13} \wedge w_2 = 2Hw_1 \wedge w_2$ se obtiene H dado por (1.19). □

En la sección siguiente veremos ejemplos de cómo relacionar este punto de vista con los cálculos clásicos mostrados en (1.2) y (1.3).

1.2. Formas de Conexión para la Pseudoesfera

En esta sección trabajamos un ejemplo particular con una superficie con curvatura gaussiana -1 la cual se llama pseudoesfera.

En \mathbb{R}^3 , la primera forma fundamental I y la segunda forma fundamental II de una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ (ver ecuaciones (1.2) y (1.3)) se pueden escribir usando 1-formas w_1, w_2, w_{13}, w_{23} , estas 1-formas son fáciles de calcular, no expondremos el cálculo explícito ya que no lo usaremos en este trabajo. Las formas fundamentales I y II quedan definidas por

$$I = w_1 \otimes w_1 + w_2 \otimes w_2 \quad (1.20)$$

$$II = w_1 \otimes w_{13} + w_2 \otimes w_{23} \quad (1.21)$$

En los ejemplos siguientes veremos que si tenemos la inmersión de la superficie, podemos construir manualmente las 1-formas w_1, w_2, w_{12}, w_{13} y w_{23} , calculando la primera forma fundamental y segunda forma fundamental usando (1.20) y (1.21) respectivamente

Ejemplo 1.1. Una parametrización de la pseudoesfera es $\phi : [0, 2\pi) \times (0, \pi) \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, dada por $\phi(\tau, \sigma) = (\cos \tau \sin \sigma, \cos \sigma + \ln(\tan \frac{\sigma}{2}), \sin \tau \sin \sigma)$. Calculemos los coeficientes de la primera y segunda forma fundamental usando (1.2) y (1.3)

$$\begin{aligned} E &= \sin^2 \sigma, & F &= 0, & G &= \cot^2 \sigma \\ N &= (-\cos \tau \cos \sigma, \sin \sigma, -\sin \tau \cos \sigma) \end{aligned}$$

$$e = \cos \sigma \sin \sigma, \quad f = 0, \quad g = -\cot \sigma$$

Entonces la primera forma fundamental y segunda forma fundamental son

$$I = \sin^2 \sigma d\tau^2 + \cot^2 \sigma d\sigma^2 \tag{1.22}$$

$$II = \cos \sigma \sin \sigma d\tau^2 - \cot \sigma d\sigma^2 \tag{1.23}$$

De (1.22), podemos construir las 1-formas:

$$\omega_1 = \sin \sigma d\tau, \quad \omega_2 = \cot \sigma d\sigma$$

De (1.23), podemos construir las 1-formas:

$$\omega_{13} = \cos \sigma d\tau, \quad \omega_{23} = -d\sigma$$

mediante las primeras 2 ecuaciones de (1.14), obtenemos

$$\omega_{12} = -\sin \sigma d\tau$$

notemos que de la ecuación (1.16) vale que $K = -1$. Verifiquemos la tercera, cuarta y quinta ecuación de (1.14).

$$\begin{aligned}
w_1 \wedge w_{13} + w_2 \wedge w_{23} &= 0 \\
dw_{13} &= \sin \sigma d\tau \wedge d\sigma = w_{12} \wedge w_{23} \\
dw_{23} &= 0 = w_{13} \wedge w_{12}
\end{aligned}$$

Ejemplo 1.2. Otra parametrización de la pseudoesfera es $\phi : (-\infty, \infty) \times [0, 2\pi) \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, dada por $\phi(\tau, \sigma) = (\operatorname{sech}\tau \cos \sigma, \operatorname{sech}\tau \sin \sigma, \tau - \tanh \sigma)$. Calculemos los coeficientes de la primera y segunda forma fundamental usando (1.2) y (1.3)

$$\begin{aligned}
E &= \tanh^2 \tau, & F &= 0, & G &= \operatorname{sech}^2 \tau \\
N &= (-\cos \sigma \tanh \tau, -\sin \sigma \tanh \tau, -\operatorname{sech} \tau)
\end{aligned}$$

$$e = -\operatorname{sech} \tau \tanh \tau, \quad f = 0, \quad g = \operatorname{sech} \tau \tanh \tau$$

Entonces la primera forma fundamental y segunda forma fundamental son

$$I = \tanh^2 \tau d\tau^2 + \operatorname{sech}^2 \tau d\sigma^2 \tag{1.24}$$

$$II = -\operatorname{sech} \tau \tanh \tau d\tau^2 + \operatorname{sech} \tau \tanh \tau d\sigma^2 \tag{1.25}$$

De (1.24), podemos construir las 1-formas:

$$\omega_1 = \tanh \tau d\tau, \quad \omega_2 = \operatorname{sech} \tau d\sigma$$

De (1.25), podemos construir las 1-formas:

$$\omega_{13} = -\operatorname{sech} \tau d\tau, \quad \omega_{23} = \tanh \tau d\sigma$$

mediante las primeras 2 ecuaciones de (1.14), obtenemos

$$\omega_{12} = -\operatorname{sech} \tau d\sigma$$

notemos de (1.16) que $K = -1$. Verifiquemos la tercera, cuarta y quinta ecuación de (1.14).

$$\begin{aligned} w_1 \wedge w_{13} + w_2 \wedge w_{23} &= 0 \\ dw_{13} = 0 &= w_{12} \wedge w_{23} \\ dw_{23} = \operatorname{sech}^2 \tau d\tau \wedge d\sigma &= w_{13} \wedge w_{12} \end{aligned}$$

El gráfico de las parametrizaciones $\phi(\tau, \sigma) = (\cos \tau \sin \sigma, \cos \sigma + \ln(\tan \frac{\sigma}{2}), \sin \tau \sin \sigma)$ y $\phi(\tau, \sigma) = (\operatorname{sech} \tau \cos \sigma, \operatorname{sech} \tau \sin \sigma, \tau - \tanh \sigma)$ se muestran en las figuras (1.1) y (1.2) respectivamente.

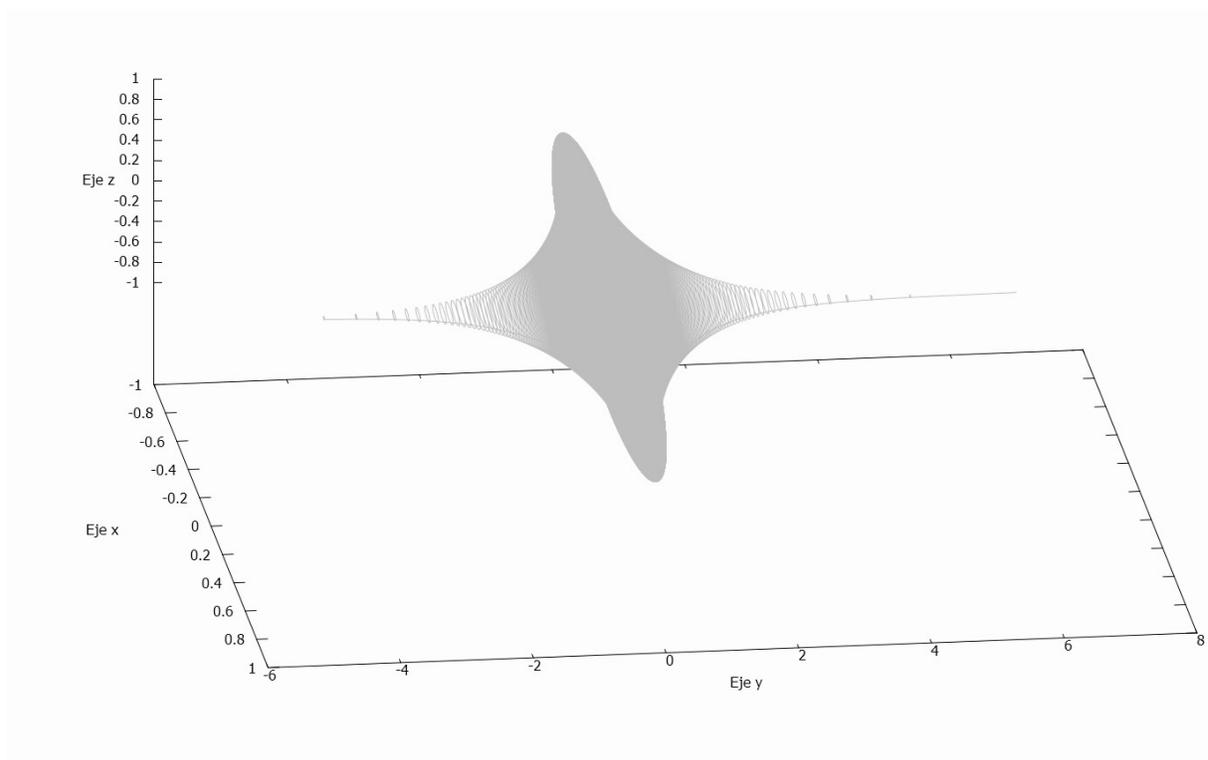


Figura 1.1: Pseudoesfera Clásica

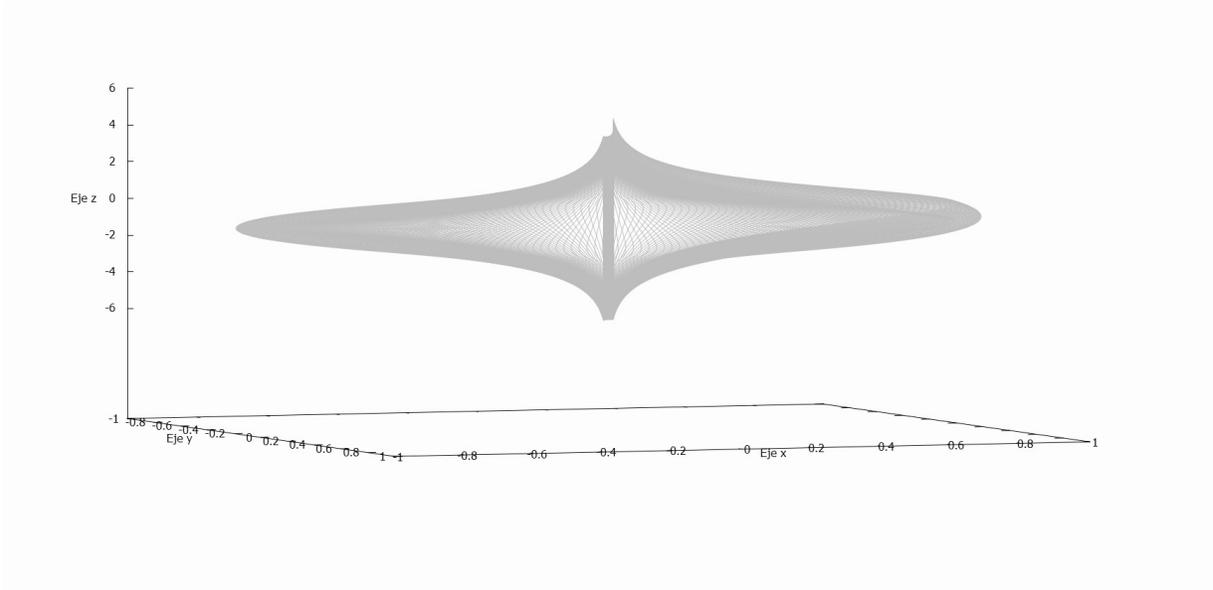


Figura 1.2: Pseudoesfera Hiperbólica

1.3. Nociones de Geometría Riemanniana

En esta sección explicaremos de manera general la teoría de conexiones para mostrar cómo se generaliza lo que hemos expuesto hasta ahora. En esta sección también estudiaremos las ecuaciones de Weingarten, veremos estas ecuaciones en una variedad M y como quedan expresadas en \mathbb{R}^3 . En el capítulo 5 usaremos estas ecuaciones para hallar el vector normal de una superficie pseudo-esférica. Por completitud escribimos las demostraciones de los teoremas principales, aunque éstas son estandar.

Denotaremos por TM al fibrado tangente de una variedad M .

Definición 1.5. Una conexión es una aplicación $\nabla : TM \times TM \rightarrow TM$ tal que $\forall f, h \in C^\infty(M)$, $a, b \in \mathbb{R}$ y $\forall X, Y, X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in TM$, se cumple:

- (i) $\nabla_{fX_1+hX_2}Y = f\nabla_{X_1}Y + h\nabla_{X_2}Y$
- (ii) $\nabla_X(aY_1 + bY_2) = a\nabla_XY_1 + b\nabla_XY_2$
- (iii) $\nabla_X(fY) = f\nabla_XY + X(f)Y$

Sea $\{E_i\}$ base local para TM en un abierto $U \subset M$, tenemos que $\nabla_{E_i}E_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k E_k$. Las funciones Γ_{ij}^k se llaman símbolos de Christoffel de ∇ con respecto a la base $\{E_i\}$.

Lema 1.3. Sea ∇ conexión y X, Y definidos en U , expresados como $X = \sum_i X^i E_i$, $Y = \sum_j Y^j E_j$. Entonces

$$\nabla_X Y = \sum_j XY^j E_j + \sum_j \sum_i \sum_k X^i Y^j \Gamma_{ij}^k E_k \quad (1.26)$$

Demostración.

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= \nabla_X \left(\sum_j Y^j E_j \right) \\ &= \sum_j \nabla_X (Y^j E_j) = \sum_j (XY^j E_j + Y^j \nabla_X E_j) \end{aligned}$$

como $X = \sum_i X^i E_i$, usando la propiedad (i) de la definición 1.5 nos queda

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= \sum_j \left(XY^j E_j + Y^j \sum_i X^i \nabla_{E_i} E_j \right) \\ &= \sum_j \left(XY^j E_j + Y^j \sum_i X^i \sum_k \Gamma_{ij}^k E_k \right) \\ &= \sum_j XY^j E_j + \sum_j \sum_i \sum_k X^i Y^j \Gamma_{ij}^k E_k \end{aligned}$$

□

Definición 1.6. Sea g métrica riemanniana en una variedad M . Una conexión ∇ es compatible con g , si $\forall X, Y, Z \in TM$ se cumple

$$\nabla_X g(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) \quad (1.27)$$

Definición 1.7. La torsión de una conexión ∇ es el tensor $\tau : TM \times TM \rightarrow TM$ dado por

$$\tau(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] \quad (1.28)$$

Decimos que ∇ es simétrica si $\tau(X, Y) = 0$

Afirmación 1.1. ∇ es simétrica \Leftrightarrow los símbolos de Christoffel respecto a cualquier base $\{E_i\}$ son simétricos.

Demostración. ∇ es simétrica ssi $\tau(X, Y) = 0$

i.e $\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] = 0$. A partir de ahora usaremos la convención de Einstein (no pondremos el símbolo \sum).

Expresamos X, Y como $X = X^i E_i, Y = Y^j E_j$, donde $\{E_i\}$ es base local para TM . Entonces

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] = (XY^k + X^i Y^j \Gamma_{ij}^k) E_k - (YX^k + Y^j X^i \Gamma_{ji}^k) E_k - [X, Y]$$

Pero

$$[X, Y] = XY - YX = XY^j E_j - YX^i E_i = (XY^k - YX^k) E_k$$

Entonces

$$\begin{aligned} \tau(X, Y) &= \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] \\ &= (XY^k + X^i Y^j \Gamma_{ij}^k - \\ &\quad YX^k - Y^j X^i \Gamma_{ji}^k - XY^k + YX^k) E_k \\ &= (X^i Y^j \Gamma_{ij}^k - Y^j X^i \Gamma_{ji}^k) E_k \end{aligned}$$

Así (eligiendo apropiadamente los vectores $X = X^i E_i$ e $Y = Y^j E_j$)

$$\begin{aligned} \tau(X, Y) = 0 &\Leftrightarrow X^i Y^j \Gamma_{ij}^k - Y^j X^i \Gamma_{ji}^k = 0 \\ &\Leftrightarrow X^i Y^j \Gamma_{ij}^k = Y^j X^i \Gamma_{ji}^k \\ &\Leftrightarrow \Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k \end{aligned}$$

□

Teorema 1.1. Sea (M, g) una variedad riemanniana (o pseudo-riemanniana). Existe una única conexión ∇ en M tal que

- ∇ es compatible con g .
- ∇ es simétrica.

Demostración. Sea ∇ una conexión y $X, Y, Z \in TM$. Supongamos que ∇ es compatible con g , entonces tenemos

$$\begin{aligned} Xg(Y, Z) &= g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) \\ Yg(Z, X) &= g(\nabla_Y Z, X) + g(Z, \nabla_Y X) \\ Zg(X, Y) &= g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y) \end{aligned}$$

Si además ∇ es simétrica, tenemos

$$g(Y, [X, Z]) = g(Y, \nabla_X Z - \nabla_Z X) = g(Y, \nabla_X Z) - g(Y, \nabla_Z X)$$

entonces

$$Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_Z X) + g(Y, [X, Z]) \quad (1.29)$$

de igual forma

$$Yg(Z, X) = g(\nabla_Y Z, X) + g(Z, \nabla_X Y) + g(Z, [Y, X]) \quad (1.30)$$

$$Zg(X, Y) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Y Z) + g(X, [Z, Y]) \quad (1.31)$$

Si hacemos (1.29) + (1.30) - (1.31), y luego despejamos $g(\nabla_X Y, Z)$ tenemos

$$\begin{aligned} g(\nabla_X Y, Z) &= \frac{1}{2}(Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y) - \\ &g(Y, [X, Z]) - g(Z, [Y, X]) + g(X, [Z, Y])) \end{aligned} \quad (1.32)$$

Esta fórmula determina $\nabla_X Y$ porque nos da la proyección de $\nabla_X Y$ a lo largo de cualquier dirección Z .

Supongamos ahora que ∇^1 y ∇^2 son dos conexiones que cumplen (1.32), entonces

$$\begin{aligned} g(\nabla_X^1 Y, Z) - g(\nabla_X^2 Y, Z) &= 0, \forall Z \\ \Rightarrow g(\nabla_X^1 Y - \nabla_X^2 Y, Z) &= 0 \Rightarrow \nabla_X^1 Y = \nabla_X^2 Y, \forall X, Y. \end{aligned} \quad \square$$

Sea $(\widehat{M}, \widehat{g})$ una variedad riemanniana de dimensión m , sea M una variedad de dimensión n y sea $i : M \rightarrow \widehat{M}$ una inmersión ($n < m$).

Si M es equipada con la métrica riemanniana $g = i^*\widehat{g}$ entonces i es inmersión isométrica y si i es 1-1 decimos que M es una subvariedad riemanniana inmersa de \widehat{M} . La variedad \widehat{M} se le llama variedad ambiente.

Para el espacio tangente T_pM , podemos definir $N_pM := (T_pM)^\perp$ respecto a la métrica $\widehat{g}(p)$ en $T_p\widehat{M}$. El conjunto

$$NM = \bigcup_{p \in M} N_pM \quad (1.33)$$

se llama fibrado normal de M .

Definición 1.8. Sea $\widehat{\nabla}$ la conexión riemanniana de $(\widehat{M}, \widehat{g})$. La segunda forma fundamental de la variedad M es la aplicación $II : TM \times TM \rightarrow NM$, dada por

$$II(X, Y) = (\widehat{\nabla}_X Y)^\perp \quad (1.34)$$

A principios de la sección 1.1, vimos la segunda forma fundamental de una superficie en \mathbb{R}^3 , la definición 1.8 es una generalización a una variedad M arbitraria.

Lema 1.4. II es:

1. bilineal sobre $C^\infty(M)$
2. simétrica

Demostración. 1. $\forall f, h \in C^\infty(M)$

a)

$$\begin{aligned} II(fX_1 + hX_2, Y) &= (\widehat{\nabla}_{fX_1 + hX_2} Y)^\perp = (f\widehat{\nabla}_{X_1} Y + h\widehat{\nabla}_{X_2} Y)^\perp \\ &= f(\widehat{\nabla}_{X_1} Y)^\perp + h(\widehat{\nabla}_{X_2} Y)^\perp \\ &= fII(X_1, Y) + hII(X_2, Y) \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} II(X, fY_1 + hY_2) &= (\widehat{\nabla}_X (fY_1 + hY_2))^\perp \\ &= (f\widehat{\nabla}_X Y_1 + X(f)Y_1 + h\widehat{\nabla}_X Y_2 + X(h)Y_2)^\perp \\ &= f(\widehat{\nabla}_X Y_1)^\perp + (X(f)Y_1)^\perp + h(\widehat{\nabla}_X Y_2)^\perp + (X(h)Y_2)^\perp \end{aligned}$$

Como $X(f), Y_1 \in TM \Rightarrow (X(f)Y_1)^\perp = 0$, de igual forma $(X(h)Y_2)^\perp = 0$. Por lo tanto

$$II(X, fY_1 + hY_2) = fII(X, Y_1) + hII(X, Y_2)$$

2. Sean X, Y campos vectoriales sobre M extendidos a \widehat{M} y en $(\widehat{M}, \widehat{g})$ consideremos la conexi3n riemanniana $\widehat{\nabla}$. Entonces

$$II(X, Y) - II(Y, X) = (\widehat{\nabla}_X Y)^\perp - (\widehat{\nabla}_Y X)^\perp = (\widehat{\nabla}_X Y - \widehat{\nabla}_Y X)^\perp = [X, Y]^\perp$$

Como X, Y son tangentes a $M \Rightarrow [X, Y]$ es tangente a $M \Rightarrow [X, Y]^\perp = 0$
 $\Rightarrow II(X, Y) = II(Y, X)$

□

Teorema 1.2. (F3rmula de Gauss) Sean $X, Y \in TM$ extendidos a $T\widehat{M}$, se cumple

$$\widehat{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + II(X, Y) \tag{1.35}$$

Demostraci3n. Sabemos que $\widehat{\nabla}_X Y = (\widehat{\nabla}_X Y)^T + (\widehat{\nabla}_X Y)^\perp$. Como $II(X, Y) = (\widehat{\nabla}_X Y)^\perp$, basta probar $(\widehat{\nabla}_X Y)^T = \nabla_X Y$, donde ∇ es la conexi3n riemanniana de M determinada por $g = i^*(\widehat{g})$.

Sea $\nabla^T : TM \times TM \rightarrow TM$, definido por $\nabla_X^T Y := (\widehat{\nabla}_X Y)^T$, con $X, Y \in T\widehat{M}$. ∇^T es conexi3n ya que se verifican las condiciones de la definici3n 1.5. Mostremos que ∇^T cumple las condiciones de conexi3n riemanniana en (M, g) .

veamos que ∇^T es simetrica :

$$\begin{aligned} \nabla_X^T Y - \nabla_Y^T X &= (\widehat{\nabla}_X Y)^T - (\widehat{\nabla}_Y X)^T \\ &= (\widehat{\nabla}_X Y - \widehat{\nabla}_Y X)^T \\ &= [X, Y]^T = [X, Y] \end{aligned}$$

veamos que ∇^T es compatible con g :

$$\begin{aligned} \widehat{\nabla}_X \widehat{g}(Y, Z) &= \widehat{g}(\widehat{\nabla}_X Y, Z) + \widehat{g}(Y, \widehat{\nabla}_X Z) \\ &= \widehat{g}((\widehat{\nabla}_X Y)^T, Z) + \widehat{g}(Y, (\widehat{\nabla}_X Z)^T) \\ &= \widehat{g}(\nabla_X^T Y, Z) + \widehat{g}(Y, \nabla_X^T Z) \end{aligned}$$

Pero $\widehat{g}(Y, Z) = g(Y, Z) \Rightarrow \widehat{\nabla}g(Y, Z) = X(g(Y, Z)) = \nabla_X^T g(Y, Z)$

entonces ∇^T es conexión riemanniana de (M, g) , por el teorema 1.1: $\nabla^T = \nabla \Rightarrow (\widehat{\nabla}_X Y)^T = \nabla_X Y$. \square

Lema 1.5. Sean X, Y campos vectoriales definidos en una variedad riemanniana (M, g) y sea N el vector normal definido en el fibrado normal NM . Si X, Y se extienden a \widehat{M} , se cumple

$$g(\widehat{\nabla}_X N, Y) = -g(N, II(X, Y)) \quad (1.36)$$

(1.36) se llama la ecuación de Weingarten en una variedad M .

Demostración. Como $N \perp Y$ entonces $g(N, Y) = 0$, derivando tenemos :

$$g(\widehat{\nabla}_X N, Y) + g(N, \widehat{\nabla}_X Y) = 0$$

Entonces usando la fórmula de Gauss

$$\begin{aligned} g(\widehat{\nabla}_X N, Y) &= -g(N, \widehat{\nabla}_X Y) \\ &= -g(N, \nabla_X Y + II(X, Y)) \\ &= -g(N, \nabla_X Y) - \langle N, II(X, Y) \rangle \\ &= -g(N, II(X, Y)) \end{aligned}$$

\square

Un caso particular de las ecuaciones de Weingarten es que si en \mathbb{R}^3 , conocemos la primera forma fundamental $I = E dx \otimes dx + 2F dx \otimes dt + G dt \otimes dt$ y la segunda forma fundamental $II = e dx \otimes dx + 2f dx \otimes dt + g dt \otimes dt$ de una superficie S descrita por una inmersión ϕ con vector normal N , entonces N_x y N_t se expresan en términos de los coeficientes de I y II . Tenemos la siguiente proposición.

Proposición 1.5. Sea una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ descrita por una inmersión $\phi := \phi(x, t)$, las ecuaciones de Weingarten para S quedan expresadas como

$$\begin{aligned} N_x &= l_1 \phi_x + l_2 \phi_t \\ N_t &= l_3 \phi_x + l_4 \phi_t \end{aligned} \quad (1.37)$$

donde

$$\begin{pmatrix} l_1 & l_3 \\ l_2 & l_4 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \quad (1.38)$$

y $N := N(x, t)$ es el vector normal a S .

Demostración. Como N es un vector normal se tiene que N_x y N_t son ortogonales a N , luego N_x y N_t están en los planos tangentes de la superficie descrita por ϕ . Luego existen l_1, l_2, l_3 y l_4 tq

$$N_x = l_1\phi_x + l_2\phi_t, \quad N_t = l_3\phi_x + l_4\phi_t$$

Sabemos que $\langle N, \phi_x \rangle = 0$ y al derivar con respecto a x , tenemos

$$\langle N, \phi_{xx} \rangle = -\langle N_x, \phi_x \rangle \Rightarrow -e = \langle N_x, \phi_x \rangle$$

De igual forma

$$-f = \langle N_t, \phi_x \rangle, \quad -f = \langle N_x, \phi_t \rangle, \quad -g = \langle N_t, \phi_t \rangle$$

$$\text{Pero } \langle N_x, \phi_x \rangle = \langle l_1\phi_x + l_2\phi_t, \phi_x \rangle = l_1E + l_2F, \quad \langle N_t, \phi_x \rangle = l_3E + l_4F$$

$$\langle N_x, \phi_t \rangle = l_1F + l_2G, \quad \langle N_t, \phi_t \rangle = l_3F + l_4G$$

Entonces

$$-e = l_1E + l_2F, \quad -f = l_1F + l_2G$$

$$-f = l_3E + l_4F, \quad -g = l_3F + l_4G$$

Así

$$\begin{pmatrix} -e & -f \\ -f & -g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1E + l_2F & l_1F + l_2G \\ l_3E + l_4F & l_3F + l_4G \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow - \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 & l_3 \\ l_2 & l_4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} l_1 & l_3 \\ l_2 & l_4 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$$

□

Si para una superficie $S \in \mathbb{R}^3$, conocemos los coeficientes de I y II , podemos plantear el sistema (1.38), el cual si le equipamos condiciones de frontera, podemos obtener N a través de métodos numéricos. Esto lo veremos en el capítulo 5 para un modelamiento discreto de superficies pseudo-esféricas (estas superficies las vemos en el siguiente capítulo).

Por otro lado, si para una superficie $S \in \mathbb{R}^3$, conocemos los coeficientes de I y II , podemos realizar un cambio a coordenadas isotérmicas y modelar la superficie inmersa en \mathbb{R}^3 , esto lo usamos en [Be18].

Ecuaciones que describen superficies de curvatura constante

En este capítulo se explican definiciones, ejemplos y resultados importantes de las ecuaciones de tipo pseudo-esférico (curvatura gaussiana que vale -1) y de las ecuaciones de tipo esférico (curvatura gaussiana que vale 1).

2.1. Ecuaciones de Tipo Pseudo-Esférico

Definición 2.1. *Una variedad de 2 dimensiones M es una superficie pseudo-esférica si existen 1-formas diferenciales w_1 , w_2 y w_3 sobre M (cumpliendo la condición de independencia $w_1 \wedge w_2 \neq 0$) tal que*

$$\begin{aligned}dw_1 &= w_3 \wedge w_2 \\dw_2 &= w_1 \wedge w_3 \\dw_3 &= w_1 \wedge w_2\end{aligned}\tag{2.1}$$

Una ecuación diferencial $F(x, t, u, u_x, \dots, u_{x..x.t..t}) = 0$ se le llama ecuación de tipo pseudo-esférico (o, se dice que describe superficies pseudo-esféricas) si los gráficos de soluciones $u(x, t)$ se pueden equipar (genéricamente) con la estructura de una superficie pseudo-esférica, es decir existen 1-formas diferenciales w_1 , w_2 y w_3 que dependen de x, t , de la solución $u(x, t)$ y de un número finito de sus derivadas, que cumplen las igualdades (2.1) y que satisfacen $w_1 \wedge w_2 \neq 0$ [TenCher86].

Nota: Consideramos una ecuación $F(x, t, u, u_x, \dots) = 0$ con 1-formas asociadas w_1 , w_2 y

w_3 que satisfacen las ecuaciones (2.1). Si $w_2 = \lambda w_1$, con $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$, entonces $dw_2 = \lambda dw_1$.

Tenemos que

$$dw_1 = w_3 \wedge w_2 = -\lambda w_1 \wedge w_3$$

y también

$$dw_2 = w_1 \wedge w_3 \Rightarrow dw_1 = \frac{1}{\lambda} w_1 \wedge w_3$$

comparando las expresiones de dw_1 , se llega a

$$-\lambda w_1 \wedge w_3 = \frac{1}{\lambda} w_1 \wedge w_3 \Rightarrow \lambda^2 = -1 \Rightarrow \lambda \in \mathbb{C},$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto $w_2 \neq \lambda w_1$, esto significa que la condición $w_1 \wedge w_2 \neq 0$ se satisface, a menos que w_1 o w_2 sea cero en una solución dada.

Nota: Consideremos una ecuación $F(x, t, u, u_x, \dots) = 0$ con 1-formas asociadas $w_1, w_2 = A dx + B dt$ y $w_3 = \lambda w_1$ que satisfacen las ecuaciones (2.1), con $A, B, \lambda \in \mathbb{R}$. Si $A \neq 0$ y $B \neq 0$ entonces $\lambda = \pm 1$. En efecto

$$dw_1 = w_3 \wedge w_2 = A\lambda w_1 \wedge dx + B\lambda w_1 \wedge dt$$

También

$$dw_3 = w_1 \wedge w_2 = Aw_1 \wedge dx + Bw_1 \wedge dt$$

como $w_3 = \lambda w_1 \Rightarrow dw_3 = \lambda dw_1$, entonces

$$dw_1 = \frac{1}{\lambda} (Aw_1 \wedge dx + Bw_1 \wedge dt)$$

comparando las expresiones de dw_1 , se llega a

$$A\lambda w_1 \wedge dx + B\lambda w_1 \wedge dt = \frac{1}{\lambda} (Aw_1 \wedge dx + Bw_1 \wedge dt)$$

$$\Rightarrow A\lambda = \frac{A}{\lambda}, \quad B\lambda = \frac{B}{\lambda}$$

$$\Rightarrow A(\lambda^2 - 1) = 0, \quad B(\lambda^2 - 1) = 0$$

Si $\lambda^2 - 1 \neq 0 \Rightarrow A = B = 0 \Rightarrow w_2 = 0$

Lo cual es una contradicción ya que $w_2 \neq 0$ (recordemos que w_1 y w_2 son parte de una cobase). Por lo tanto $\lambda^2 - 1 = 0$.

Podemos expresar las 1-formas w_i como $w_i = f_{i1}dx + f_{i2}dt$, $1 \leq i \leq 3$; cada f_{ij} ($1 \leq j \leq 2$) es una función que depende de x , t , $u(x, t)$ y de un número finito de derivadas de $u(x, t)$ respecto a x y t .

Supongamos que $u(x, t)$ es una solución genérica, es decir $(w_1 \wedge w_2)(u(x, t)) \neq 0$. Entonces las formas $w_1(u(x, t))$ y $w_2(u(x, t))$ forman una cobase local sobre el dominio $(x, t) \in D \subset \mathbb{R}^2$ donde está definida $u(x, t)$. Al conocer $w_1(u(x, t))$ y $w_2(u(x, t))$, podemos calcular la primera forma fundamental

$$I = w_1(u(x, t)) \otimes w_1(u(x, t)) + w_2(u(x, t)) \otimes w_2(u(x, t))$$

si asignamos $w_3 := w_{12}$, entonces tenemos que la superficie S descrita localmente en coordenadas (x, t) y equipada con la métrica Riemanniana $g := I$ posee curvatura gaussiana $K = -1$.

Ésta es una visión intrínseca de la superficie S : sin información extra no podemos saber qué forma tiene esta superficie dentro de \mathbb{R}^3 ; para determinar qué forma tiene, se usa la segunda forma fundamental (II).

Veamos algunos ejemplos de ecuaciones pseudo-esféricas.

Ejemplo 2.1. *La ecuación de Sine-Gordon $u_{xt} = \sin(u)$ es una ecuación de tipo pseudo-esférico con 1-formas*

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{1}{\eta} \operatorname{sen}(u) dt \\ w_2 &= \eta dx + \frac{1}{\eta} \operatorname{cos}(u) dt \\ w_3 &= u_x dx \end{aligned}$$

donde $\eta \in \mathbb{R} - \{0\}$.

En efecto

$$\begin{aligned} dw_1 &= \frac{u_x}{\eta} \operatorname{cos}(u) dx \wedge dt = w_3 \wedge w_2 \\ dw_2 &= -\frac{u_x}{\eta} \operatorname{sen}(u) dx \wedge dt = w_1 \wedge w_3 \\ dw_3 &= -u_{xt} dx \wedge dt = -\operatorname{sen}(u) dx \wedge dt = w_1 \wedge w_2 \end{aligned}$$

en soluciones de $u_{xt} = \sin(u)$

Ejemplo 2.2. La ecuación de Burgers $u_t = u_{xx} + uu_x$ es una ecuación de tipo pseudo-esférico con 1-formas

$$\begin{aligned} w_1 &= \left(\frac{u}{2} - \frac{\alpha}{\eta} \right) dx + \frac{1}{2} \left(u_x + \frac{u^2}{2} \right) dt \\ w_2 &= \eta dx + \left(\frac{\eta}{2} u + \alpha \right) dt \\ w_3 &= -w_2 \end{aligned} \tag{2.2}$$

donde $\eta \in \mathbb{R} - \{0\}$ y $\alpha = \alpha(x)$ es solución de $\alpha^2 - \eta\alpha_x = 0$

Ejemplo 2.3. La ecuación KdV $u_t = u_{xxx} + 6uu_x$ es una ecuación de tipo pseudo-esférico con 1-formas

$$\begin{aligned} w_1 &= (1 - u) dx + (-u_{xx} + \eta u_x - \eta^2 u - 2u^2 + \eta^2 + 2u) dt \\ w_2 &= \eta dx + (\eta^3 + 2\eta u - 2u_x) dt \\ w_3 &= -(1 + u) dx + (-u_{xx} + \eta u_x - \eta^2 u - 2u^2 - \eta^2 - 2u) dt \end{aligned} \tag{2.3}$$

donde $\eta \in \mathbb{R}$

Ejemplo 2.4. La ecuación de Ibragimov-Shabat $u_t = u_{xxx} + 3u^2 u_{xx} + 9uu_x^2 + 3u^4 u_x$ es una ecuación de tipo pseudo-esférico con 1-formas

$$\begin{aligned} w_1 &= \left(\frac{u_x}{u} + u^2 \right) dx + \left(\frac{u_{xxx}}{u} + u^6 + 8u_x^2 + 5uu_{xx} + 9u^3 u_x \right) dt \\ w_2 &= \eta dx + \eta \left(\frac{u_{xx}}{u} + u^4 + 4uu_x \right) dt \\ w_3 &= -\eta dx - \eta \left(\frac{u_{xx}}{u} + u^4 + 4uu_x \right) dt \end{aligned} \tag{2.4}$$

donde $\eta \in \mathbb{R}$.

Puesto que usamos permanentemente la noción de una solución genérica, escribiremos su definición explícitamente:

Definición 2.2. Sea $F(x, t, u, u_x, \dots, u_{x..xt..t}) = 0$ una ecuación de tipo pseudo-esférico con 1-formas $w_i, i=1,2,3$. Una solución $u : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de $F(x, t, u, u_x, \dots, u_{x..xt..t}) = 0$ se llama solución genérica si $(w_1 \wedge w_2)(u(x, t))$ es distinto de 0 en U .

Esta definicion es importante porque si $(w_1 \wedge w_2)(u(x, t)) = 0$ entonces w_1 y w_2 no determinan una cobase móvil.

Las siguientes dos proposiciones son importantes para el estudio geométrico de ecuaciones diferenciales, ver [Re11].

Proposición 2.1. *Sea $w_i = f_{i1}dx + f_{i2}dt$, $i \in \{1, 2, 3\}$ 1-formas diferenciales, donde f_{i1} y f_{i2} son funciones diferenciables que dependen de x, t, u y derivadas de u . Sea $u(x, t)$ función suave y $w_i := w_i(u(x, t))$. Las ecuaciones (2.1) son invariantes bajo las transformaciones (2.5), (2.6) y (2.7):*

$$\widehat{w}_1 = w_1 \cos p + w_2 \sin p, \quad \widehat{w}_2 = -w_1 \sin p + w_2 \cos p, \quad \widehat{w}_3 = w_3 + dp, \quad (2.5)$$

$$\widehat{w}_1 = w_1 \cosh p - w_3 \sinh p, \quad \widehat{w}_2 = w_2 + dp, \quad \widehat{w}_3 = -w_1 \sinh p + w_3 \cosh p \quad (2.6)$$

$$\widehat{w}_1 = w_1 + dp, \quad \widehat{w}_2 = w_2 \cosh p + w_3 \sinh p, \quad \widehat{w}_3 = w_2 \sinh p + w_3 \cosh p \quad (2.7)$$

donde $p = p(u(x, t))$ es una función diferenciable.

Proposición 2.2. *Sea M una superficie Riemanniana. Sea $\{\sigma_1, \sigma_2\}$ cobase dual a una base ortonormal dada y sea σ_3 la 1-forma diferencial de conexión correspondiente. Existe una nueva cobase $\{\theta_1, \theta_2\}$ y una nueva 1-forma diferencial θ_3 en M tal que*

$$\left\{ \begin{array}{l} d\theta_1 = 0 \\ d\theta_2 = \theta_2 \wedge \theta_1 \\ \theta_3 + \theta_2 = 0 \end{array} \right\} \quad (2.8)$$

si y solo si M es superficie pseudo-esférica.

Demostración. Supongamos que las bases ortonormales dual a las bases $\{\sigma_1, \sigma_2\}$ y $\{\theta_1, \theta_2\}$ tienen igual orientación. Entonces σ_α y θ_α están conectadas por rotación y transformación [Re11]:

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \sigma_1 \cos p + \sigma_2 \sin p \\ \theta_2 &= -\sigma_1 \sin p + \sigma_2 \cos p \\ \theta_3 &= \sigma_3 + dp \end{aligned}$$

Definamos

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= g_{11} dx + g_{12} dt \\ \sigma_2 &= g_{21} dx + g_{22} dt \\ \sigma_3 &= g_{31} dx + g_{32} dt\end{aligned}$$

donde $g_{ij} := g_{ij}(x, t, u(x, t), u_x, u_t, \dots)$, con $1 \leq i \leq 3$, $1 \leq j \leq 2$.

De la tercera ecuación de (2.8), se tiene $\sigma_3 + dp - \sigma_1 \sin p + \sigma_2 \cos p = 0$, entonces

$$g_{31} dx + g_{32} dt + p_x dx + p_t dt - (g_{11} dx + g_{12} dt) \sin p + (g_{21} dx + g_{22} dt) \cos p = 0$$

Luego obtenemos el sistema

$$\begin{aligned}p_x &= -g_{31} + g_{11} \sin p - g_{21} \cos p \\ p_t &= -g_{32} + g_{12} \sin p - g_{22} \cos p\end{aligned}\tag{2.9}$$

que determina $p(x, t)$. Para que (2.9) sea compatible, debe satisfacerse la condición de integrabilidad $p_{xt} = p_{tx}$, entonces

$$\begin{aligned}-g_{31,t} + g_{11} p_t \cos p + g_{11,t} \sin p + g_{21} p_t \sin p - g_{21,t} \cos p &= -g_{32,x} + g_{12} p_x \cos p + g_{12,x} \sin p \\ &+ g_{22} p_x \sin p - g_{22,x} \cos p\end{aligned}$$

entonces

$$-g_{31,t} + g_{32,x} + (g_{11} p_t - g_{21,t} - g_{12} p_x + g_{22,x}) \cos p + (g_{11,t} + g_{21} p_t - g_{12,x} - g_{22} p_x) \sin p = 0$$

Remplazamos las expresiones de p_x y p_t , simplificando se llega a

$$\begin{aligned}g_{12,x} - g_{11,t} &= g_{22} g_{31} - g_{21} g_{32} \\ g_{22,x} - g_{21,t} &= g_{11} g_{32} - g_{12} g_{31} \\ g_{32,x} - g_{31,t} &= g_{11} g_{22} - g_{12} g_{21}\end{aligned}\tag{2.10}$$

y estas son las ecuaciones de estructura (2.1) que satisfacen σ_1 , σ_2 y σ_3 .

Por lo tanto $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ cumplen (2.8) $\Leftrightarrow \sigma_3 + dp - \sigma_1 \sin p + \sigma_2 \cos p = 0$ es integrable para

$p(x, t)$ en el espacio de coordenada $(x, t, p) \Leftrightarrow M$ es superficie pseudo-esférica.

□

Consideremos las 1-formas asociadas a la ecuación de Sine-Gordon del ejemplo 2.1, que son

$$w_1 = \frac{1}{\eta} \text{sen}(u) dt, \quad w_2 = \eta dx + \frac{1}{\eta} \text{cos}(u) dt, \quad w_3 = u_x dx$$

Si reemplazamos estas 1-formas en el sistema (2.9), nos queda

$$\begin{aligned} p_x &= -u_x - \eta \cos p \\ p_t &= -\frac{1}{\eta} \cos(u + p) \end{aligned} \quad (2.11)$$

De la segunda ecuación de (2.11), despejamos u :

$$u = \arccos(-\eta p_t) - p \quad (2.12)$$

Luego de la primera ecuación de (2.11), se tiene (usando que $u(x, t)$ es una solución de la ecuación $u_{xt} = \sin(u)$)

$$\begin{aligned} p_{xt} &= -u_{xt} + \eta p_t \sin p \\ &= -\sin u + \eta p_t \sin p \\ &= -\sin(\arccos(-\eta p_t) - p) + \eta p_t \sin p \\ &= -\sqrt{1 - \eta^2 p_t^2} \cos p \end{aligned}$$

hacemos el cambio $p \rightarrow \pi - p$, $\eta \rightarrow -\eta$ ya que la ecuación para p_{xt} queda invariante, al reemplazar el cambio en (2.12) tendremos una nueva solución de Sine-Gordon :

$$v = \arccos(-\eta p_t) - \pi + p \quad (2.13)$$

Al operar (2.13) - (2.12), se obtiene

$$p = \frac{1}{2}(v - u + \pi)$$

reemplazamos p en (2.11), se tiene de la primera ecuación

$$\begin{aligned} p_x &= -u_x - \eta \cos p \\ \Rightarrow \frac{1}{2}(v_x - u_x) &= -u_x - \eta \cos \left(\frac{1}{2}(v - u + \pi) \right) \\ \Rightarrow \frac{1}{2}(v_x - u_x) &= -u_x + \eta \sin \left(\frac{v - u}{2} \right) \end{aligned}$$

$\Rightarrow v_x = -u_x + 2\eta \sin\left(\frac{v-u}{2}\right)$, hacemos el cambio $u \rightarrow -u$ (ya que $-u$ satisface en la ecuación de Sine-Gordon), obtenemos

$$v_x = u_x + 2\eta \sin \left(\frac{v + u}{2} \right) \quad (2.14)$$

De igual forma en (2.11), se tiene de la segunda ecuación

$$\begin{aligned} p_t &= -\frac{1}{\eta} \cos(u + p) \\ \Rightarrow \frac{1}{2}(v_t - u_t) &= -\frac{1}{\eta} \cos \left(\frac{v}{2} + \frac{u}{2} + \frac{\pi}{2} \right) \\ \Rightarrow \frac{1}{2}(v_t - u_t) &= \frac{1}{\eta} \sin \left(\frac{v + u}{2} \right) \end{aligned}$$

$\Rightarrow v_t = u_t + \frac{2}{\eta} \sin \left(\frac{v+u}{2} \right)$, también hacemos el cambio $u \rightarrow -u$, obtenemos

$$v_t = -u_t + \frac{2}{\eta} \sin \left(\frac{v - u}{2} \right) \quad (2.15)$$

Las ecuaciones (2.14) y (2.15) se llaman “transformaciones de Backlund” de la ecuación de Sine-Gordon. La derivación anterior está basada en el artículo [TenCher86]. A continuación veremos un ejemplo de su uso: a partir de una solución trivial de Sine-Gordon, se obtiene una solución no trivial.

Ejemplo 2.5. *Consideremos el sistema formado por las ecuaciones (2.14) y (2.15). Este sistema es compatible si y solo si $u(x, t)$ y $v(x, t)$ satisfacen la ecuación de Sine-Gordon.*

Tomemos por ejemplo la solución trivial $u = 0$. Tenemos

$$\begin{aligned} v_x &= 2\eta \sin\left(\frac{v}{2}\right) \\ v_t &= \frac{2}{\eta} \sin\left(\frac{v}{2}\right) \end{aligned} \quad (2.16)$$

$\frac{dv}{dx} = 2\eta \sin\frac{v}{2} \Rightarrow \csc\frac{v}{2} dv = 2\eta dx$ integrando queda

$$-2 \ln\left(\csc\frac{v}{2} + \cot\frac{v}{2}\right) = 2\eta x + A(t) \quad (2.17)$$

De igual forma en la segunda ecuación de (2.16), se tiene

$$-2 \ln\left(\csc\frac{v}{2} + \cot\frac{v}{2}\right) = \frac{2t}{\eta} + B(x) \quad (2.18)$$

Al restar las ecuaciones (2.17) y (2.18), se tiene

$$2\eta x - \frac{2t}{\eta} = -A(t) + B(x)$$

así $A(t) = \frac{2t}{\eta} + C$, $B(x) = 2\eta x + C$, con $C \in \mathbb{R}$, reemplazando en (2.17) y (2.18) obtenemos dos ecuaciones equivalentes, entonces obtenemos

$$\ln\left(\csc\frac{v}{2} + \cot\frac{v}{2}\right) = -\eta x - \frac{t}{\eta} - \frac{C}{2} \quad (2.19)$$

Consideremos la siguiente identidad con $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha \neq k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.

$$\tan\frac{\alpha}{2} \cdot (\csc\alpha + \cot\alpha) = 1$$

¹en esta tesis no definiremos transformación de Backlund en general porque usaremos sólo ejemplos, el lector puede encontrar una definición en [Re01]

Usando esta identidad en (2.19), se tiene $\ln\left(\frac{1}{\tan\frac{v}{4}}\right) = -\eta x - \frac{t}{\eta} - \frac{C}{2}$, entonces

$$v = 4 \operatorname{arccot}\left(e^{-\eta x - \frac{t}{\eta} - \frac{C}{2}}\right) \quad (2.20)$$

Por lo tanto podemos notar que a partir de una solución trivial de la ecuación de Sine-Gordon, a través de una transformación obtenemos una solución no trivial de la ecuación de Sine-Gordon.

El gráfico de la solución (2.20) se muestra en la figura (2.1) con $\eta = -1$ y $C = 0$.

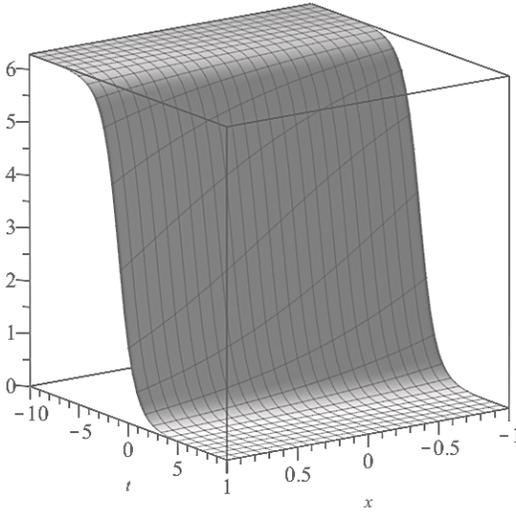


Figura 2.1: Solución de Ecuación Sine Gordon a través de transformación de Backlund

Nota : Las ecuaciones de estructura (2.1) son equivalentes a la condición de integrabilidad de la ecuación

$$d\Upsilon = \Omega \cdot \Upsilon$$

donde

$$\Upsilon = (\Upsilon_1 \quad \Upsilon_2)^t \quad (2.21)$$

$$\Omega = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} w_2 & w_1 - w_3 \\ w_1 + w_3 & -w_2 \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

Notemos de (2.22) que podemos plantear

$$\Omega = Adx + Bdt$$

donde $A := A(x, t, u, u_x, \dots, u_{x..xt..t})$ y $B := B(x, t, u, u_x, \dots, u_{x..xt..t})$ son matrices de 2×2 con coeficientes reales y sus trazas valen 0, ósea $A, B \in sl(2)$. Luego

$$d\Upsilon = \Omega \cdot \Upsilon \Rightarrow \Upsilon_x dx + \Upsilon_t dt = (Adx + Bdt) \cdot \Upsilon$$

entonces

$$\begin{aligned} \Upsilon_x &= A \cdot \Upsilon \\ \Upsilon_t &= B \cdot \Upsilon \end{aligned} \quad (2.23)$$

Estas ecuaciones se pueden usar para estudiar ecuaciones de tipo pseudo-esférico de forma analítica. Ver por ejemplo [Ten98].

La condición de integrabilidad corresponde a que

$$\begin{aligned} \Upsilon_{xt} &= \Upsilon_{tx} \\ \Rightarrow AB\Upsilon + A_t\Upsilon &= BA\Upsilon + B_x\Upsilon \\ \Rightarrow (AB + A_t - BA - B_x)\Upsilon &= 0 \\ \Rightarrow [A, B] + A_t - B_x &= 0 \end{aligned}$$

Esta ecuación es equivalente a las ecuaciones de estructura (2.1).

2.2. Ecuaciones de Tipo Esférico

De manera análoga, comentaremos sobre ecuaciones esféricas.

Definición 2.3. *Una variedad de 2 dimensiones M es una superficie esférica si existen*

1-formas diferenciales w_1 , w_2 y w_3 sobre M (cumpliendo la condición de independencia $w_1 \wedge w_2 \neq 0$) tal que

$$\begin{aligned} dw_1 &= w_3 \wedge w_2 \\ dw_2 &= w_1 \wedge w_3 \\ dw_3 &= -w_1 \wedge w_2 \end{aligned} \tag{2.24}$$

Una ecuación diferencial $F(x, t, u, u_x, \dots, u_{x..xt..t}) = 0$ o sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} G_1(x, t, u, u_x, \dots, u_{x..xt..t}, v, v_x, \dots, v_{x..xt..t}) &= 0 \\ G_2(x, t, u, u_x, \dots, u_{x..xt..t}, v, v_x, \dots, v_{x..xt..t}) &= 0 \end{aligned}$$

se llama de tipo esférico si existen 1-formas diferenciales w_1 , w_2 y w_3 que dependen de x , t , de la solución $u(x, t)$ y de un número finito de sus derivadas, que cumplen las igualdades (2.24) y satisfacen la condición de independencia $w_1 \wedge w_2 \neq 0$ [Di02].

Como la conexión de Levi-Civita $w_{12} := w_3$ satisface (1.16), se tiene

$$dw_3 = -K w_1 \wedge w_2 \tag{2.25}$$

donde K es la curvatura gaussiana, entonces la última ecuación de (2.24) dice que $K = 1$.

Ejemplo 2.6. *El sistema*

$$\begin{aligned} u_t + v_{xx} + 2(u^2 + v^2)v &= 0 \\ -v_t + u_{xx} + 2(u^2 + v^2)u &= 0 \end{aligned} \tag{2.26}$$

es un sistema de ecuaciones de tipo esférico donde $u := u(x, t)$ y $v := v(x, t)$ son soluciones de (2.26) con 1-formas

$$\omega_1 = 2v dx + (2u_x - 4\eta v) dt$$

$$\omega_2 = 2\eta dx + (2(u^2 + v^2) - 4\eta^2) dt$$

$$\omega_3 = -2u dx + (4\eta u + 2v_x) dt$$

Ejemplo 2.7. *El sistema*

$$\begin{aligned} u_t &= (2up)_x + 4vp \\ v_t &= (2vp)_x - 2up \end{aligned} \tag{2.27}$$

donde $p := p(u, v)$ es una función arbitraria, es un sistema de ecuaciones de tipo esférico donde $u := u(x, t)$ y $v := v(x, t)$ son soluciones de (2.27) con 1-formas

$$\omega_1 = u dx + 2up dt$$

$$\omega_2 = (1 + v) dx + 2vp dt$$

$$\omega_3 = (v - 1) dx + 2vp dt$$

Nota : Podemos notar que las ecuaciones de estructura (2.24) son equivalentes a la condición de integrabilidad de la ecuación

$$d\Phi = \Omega \cdot \Phi$$

donde

$$\Phi = (\Phi_1 \quad \Phi_2)^t \tag{2.28}$$

$$\Omega = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} iw_2 & w_1 + iw_3 \\ -w_1 + iw_3 & -iw_2 \end{pmatrix} \tag{2.29}$$

De igual forma que en la sección anterior, de (2.29) podemos plantear

$$\Omega = A'dx + B'dt$$

donde A' y B' son matrices de 2×2 con coeficientes complejos, sus trazas valen 0 y son antisimétricas, osea $A', B' \in su(2)$. Entonces

$$\begin{aligned}\Phi_x &= A' \cdot \Phi \\ \Phi_t &= B' \cdot \Phi\end{aligned}\tag{2.30}$$

La condición de integrabilidad corresponde a que $\Phi_{xt} = \Phi_{tx} \Rightarrow [A', B]' + A'_t - B'_x = 0$, y esta ecuación es equivalente a las ecuaciones de estructura (2.24).

2.3. Ecuación de Corto Pulso

La ecuación de corto pulso se encontró primero en una clasificación de ecuaciones de tipo pseudo-esférico en los años 1980's [Ra89] y después de 15 años se descubrió que es físicamente importante. No es una ecuación muy estudiada (a diferencia de la ecuación de Sine-Gordon y Burgers). Por lo que hemos decidido presentar algunas de sus propiedades geométricas.

La siguiente ecuación diferencial parcial no lineal de segundo orden

$$u_{xt} = u + c_0 u^2 + c_1 u u_x + c_2 u u_{xx} + c_3 u_x^2 + d_0 u^3 + d_1 u^2 u_x + d_2 u^2 u_{xx} + d_3 u u_x^2\tag{2.31}$$

se introdujo en [Ho17].

Si $c_i = 0$, para $i = 0, 1, 2, 3$, $d_0 = d_1 = 0$, $d_3 = 2d_2$, se obtiene

$$u_{xt} = u + \frac{d_2}{3}(u^3)_{xx}\tag{2.32}$$

con $d_2 \in \mathbb{R}$, que es la ecuación general de corto pulso derivada por Schäfer y Wayne [ScWa04] que sirve como modelo de pulso ópticos ultra cortos en medios no lineales. La ecuación (2.31) es una generalización de (2.32) que contiene varias ecuaciones interesantes, ver [Ho17].

Consideremos una ecuación diferencial parcial de la forma

$$u_{xt} = F(u, u_x, u_{xx})\tag{2.33}$$

en que $u := u(x, t)$ es solución de (2.33). Introducimos las notaciones

$$z_0 = u, \quad z_1 = u_x, \quad z_2 = u_{xx}$$

Entonces (2.33) queda

$$z_{1,t} = F(z_0, z_1, z_2) \tag{2.34}$$

La ecuación (2.34) la podemos equipar con 1-formas diferenciales $w_i = f_{i1}dx + f_{i2}dt$, con $i = 1, 2, 3$, de modo que la ecuación describa superficies pseudo-esféricas o esféricas. Los siguientes lemas dan condiciones necesarias sobre las funciones f_{i1} y f_{i2} para que (2.34) describa superficies pseudo-esféricas o esféricas.

Lema 2.1. *Consideremos la ecuación (2.34), la cual describe superficies pseudo-esféricas con 1-formas asociadas $w_i = f_{i1}dx + f_{i2}dt$, con $i = 1, 2, 3$ y $f_{21} = \eta \in \mathbb{R}$. Si f_{ij} son funciones diferenciables de z_0, z_1, z_2 , entonces*

$$\begin{aligned} f_{11,z_i} &= f_{31,z_i} = 0, \forall i \neq 1 \\ f_{12,z_2} &= f_{22,z_2} = f_{32,z_2} = 0 \\ &f_{22,z_1} = 0 \\ f_{11,z_1}^2 &+ f_{31,z_1}^2 \neq 0 \end{aligned} \tag{2.35}$$

$$\begin{aligned} -F f_{11,z_1} + \sum_{i=0}^1 z_{i+1} f_{12,z_i} + \eta f_{32} - f_{22} f_{31} &= 0 \\ z_1 f_{22,z_0} + f_{12} f_{31} - f_{11} f_{32} &= 0 \\ -F f_{31,z_1} + \sum_{i=0}^1 z_{i+1} f_{32,z_i} + \eta f_{12} - f_{22} f_{11} &= 0 \end{aligned} \tag{2.36}$$

Demostración. Tenemos las relaciones

$$dz_i \wedge dt = z_{i,x} dx \wedge dt = z_{i+1} dx \wedge dt$$

con $i = 0, 1$

$$dz_1 \wedge dx = z_{1,t} dt \wedge dx = -F dx \wedge dt$$

Luego

$$\begin{aligned}
dw_1 - w_3 \wedge w_2 &= (f_{11,z_0} dz_0 + f_{11,z_1} dz_1 + f_{11,z_2} dz_2) \wedge dx \\
&\quad + (f_{12,z_0} dz_0 + f_{12,z_1} dz_1 + f_{12,z_2} dz_2) \wedge dt - (f_{31} dx + f_{32} dt) \wedge (\eta dx + f_{22} dt) \\
&= f_{11,z_0} dz_0 \wedge dx - F f_{11,z_1} dx \wedge dt + f_{11,z_2} dz_2 \wedge dx + \sum_{i=0}^1 f_{12,z_i} z_{i+1} dx \wedge dt \\
&\quad + f_{12,z_2} dz_2 \wedge dt + (\eta f_{32} - f_{31} f_{22}) dx \wedge dt \\
&= (-F f_{11,z_1} + \sum_{i=0}^1 f_{12,z_i} z_{i+1} + \eta f_{32} - f_{31} f_{22}) dx \wedge dt + f_{11,z_0} dz_0 \wedge dx + f_{11,z_2} dz_2 \wedge dx \\
&\quad + f_{12,z_2} dz_2 \wedge dt
\end{aligned}$$

Como $dw_1 - w_3 \wedge w_2 = 0$, obtenemos la primera ecuación de (2.36) y que $f_{11,z_0} = f_{11,z_2} = f_{12,z_2} = 0$.

Luego

$$\begin{aligned}
dw_2 - w_1 \wedge w_3 &= \sum_{i=0}^2 f_{22,z_i} dz_i \wedge dt + (f_{12} f_{31} - f_{11} f_{32}) dx \wedge dt \\
&= \sum_{i=0}^1 f_{22,z_i} z_{i+1} dx \wedge dt + f_{22,z_2} dz_2 \wedge dt + (f_{12} f_{31} - f_{11} f_{32}) dx \wedge dt
\end{aligned}$$

Como $dw_2 - w_1 \wedge w_3 = 0$, obtenemos que $f_{22,z_2} = 0$ y también obtenemos una suma de expresiones que nos permite mostrar que $f_{22,z_1} = 0$ y entonces tendremos la segunda ecuación de (2.36).

Luego

$$\begin{aligned}
dw_3 - w_1 \wedge w_2 &= \sum_{i=0}^2 f_{31,z_i} dz_i \wedge dx + \sum_{i=0}^2 f_{32,z_i} dz_i \wedge dt + (\eta f_{12} - f_{11} f_{22}) dx \wedge dt \\
&= f_{31,z_0} dz_0 \wedge dx + -F f_{31,z_1} dx \wedge dt + f_{31,z_2} dz_2 \wedge dx \\
&\quad + \sum_{i=0}^1 f_{32,z_i} z_{i+1} dx \wedge dt + f_{32,z_2} dz_2 \wedge dt \\
&\quad + (\eta f_{12} - f_{11} f_{22}) dx \wedge dt
\end{aligned}$$

Como $dw_3 - w_1 \wedge w_2 = 0$, obtenemos la tercera ecuación de (2.36) y también que $f_{31,z_0} = f_{31,z_2} = f_{32,z_2} = 0$

Notemos que $f_{11}, f_{12}, f_{22}, f_{31}, f_{32}$ no dependen de z_2 , entonces

$$\sum_{i=0}^1 f_{22,z_i} \cdot z_{i+1} + f_{31} f_{12} - f_{11} f_{32} = 0$$

Tomamos $\frac{\partial}{\partial z_2}$ y obtenemos $f_{22,z_1} = 0$.

Supongamos que $f_{11,z_1} = f_{31,z_1} = 0$, o sea que f_{11} y f_{31} son constantes. Luego

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^1 z_{i+1} f_{12,z_i} + \eta f_{32} - f_{22} f_{31} &= 0 \\
\sum_{i=0}^1 z_{i+1} f_{32,z_i} + \eta f_{12} - f_{22} f_{11} &= 0
\end{aligned}$$

$\Rightarrow z_{1,t} = F(z_0, z_1, z_2)$ no es una condición necesaria ni suficiente para que w_1, w_2 y w_3 cumplan las ecuaciones de estructura (2.1) y esto nos lleva a una contradicción.

Entonces $f_{11,z_1} \neq 0$ o $f_{31,z_1} \neq 0 \Rightarrow f_{11,z_1}^2 + f_{31,z_1}^2 \neq 0$. □

Lema 2.1 fue probado por Rabelo en [Ra89], una modificación simple, permite probar

Lema 2.2. *Consideremos la ecuación (2.34), la cual describe superficies esféricas con 1-formas asociadas $w_i = f_{i1} dx + f_{i2} dt$, con $i = 1, 2, 3$ y $f_{21} = \eta \in \mathbb{R}$. Si f_{ij} son funciones*

diferenciables de z_0, z_1, z_2 , entonces se satisfacen las ecuaciones (2.35) del lema 2.1 y también la primera y segunda ecuación de (2.36), y se cumple

$$-F f_{31, z_1} + \sum_{i=0}^1 z_{i+1} f_{32, z_i} - \eta f_{12} + f_{22} f_{11} = 0.$$

La demostración es similar a la del lema 2.1.

De acuerdo a estos lemas, las 1-formas asociadas a (2.32) quedan dadas por

$$\begin{aligned} w_1 &= f_{11}(z_1) dx + f_{12}(z_0, z_1) dt \\ w_2 &= \eta dx + f_{22}(z_0) dt \\ w_3 &= f_{31}(z_1) dx + f_{32}(z_0, z_1) dt \end{aligned} \tag{2.37}$$

Ejemplo 2.8. De (2.32) si $d_2 = \frac{1}{2}$ nos queda

$$u_{xt} = u + \frac{(u^3)_{xx}}{6}$$

y si esta ecuación la equipamos con las 1-formas diferenciales:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \left(2u_x + \frac{\sqrt{3}}{3} \right) dx + \left(\frac{u^2(6u_x + \sqrt{3})}{6} + \frac{2u}{3} + \frac{\sqrt{12}}{18} \right) dt \\ \omega_2 &= 2dx + \left(u^2 + \frac{2 + \sqrt{3}u}{3} \right) dt \\ \omega_3 &= \left(u_x + \frac{2\sqrt{3}}{3} \right) dx + \left(u^2 \frac{(3u_x + 2\sqrt{3})}{6} + \frac{4u}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{9} \right) dt \end{aligned}$$

se cumplen las ecuaciones de estructura (2.1), por lo que esta ecuación describe superficies de tipo pseudo-esférico.

Ejemplo 2.9. De (2.32) si $d_2 = 3$ nos queda

$$u_{xt} = u + (u^3)_{xx} \tag{2.38}$$

y si esta ecuación la equipamos con las 1-formas:

$$\omega_1 = \left(2u_x - \frac{\sqrt{126}}{30} \right) dx + \left(6u^2u_x + \frac{(-75u^2\sqrt{2} - 120\sqrt{3}u + 6\sqrt{2})\sqrt{7}}{250} \right) dt$$

$$\omega_2 = 2dx + \left(6u^2 - \frac{12}{25} - \frac{\sqrt{6}u}{5} \right) dt$$

$$\omega_3 = \left(\sqrt{21}u_x + \frac{\sqrt{6}}{15} \right) dx + \left(\frac{(375u^2\sqrt{7}u_x + 25u^2\sqrt{2} - 2\sqrt{2})\sqrt{3}}{125} + \frac{24u}{25} \right) dt$$

Se cumplen las ecuaciones de estructura (2.24), por lo que esta ecuación describe superficies de tipo esférico.

Para la ecuación (2.38), tenemos una representación de la forma (como explicamos al final de la sección anterior)

$$d\Phi = \Omega \cdot \Phi$$

donde Φ y Ω están dados por (2.28) y (2.29), entonces

$$\Omega = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i\sqrt{6}udt & (2 + 2\sqrt{6}u_x i)dx + (6u^2 - \frac{1}{2} + 6\sqrt{6}u^2u_x i)dt \\ (-2 + 2\sqrt{6}u_x i)dx + (-6u^2 + \frac{1}{2} + 6\sqrt{6}u^2u_x i)dt & -i\sqrt{6}udt \end{pmatrix}$$

como $\Omega = A'dx + B'dt$, con A' y B' matrices en $su(2)$, entonces de acuerdo a (2.30) tenemos el sistema

$$\Phi_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 + i\sqrt{6}u_x \\ -1 + i\sqrt{6}u_x & 0 \end{pmatrix} \Phi \quad (2.39)$$

$$\Phi_t = \begin{pmatrix} i\frac{\sqrt{6}u}{2} & -\frac{1}{4} + 3u^2 + 3\sqrt{6}iu^2u_x \\ \frac{1}{4} - 3u^2 + 3\sqrt{6}iu^2u_x & -i\frac{\sqrt{6}u}{2} \end{pmatrix} \Phi \quad (2.40)$$

Como las matrices asociadas a (2.39) y (2.40) están en

$$su(2) = \{A \in M_2(\mathbb{C})/A = -\bar{A}^t \wedge tr(A) = 0\}$$

podemos encontrar un isomorfismo que nos lleve estas matrices a

$$so(3) = \{A \in M_3(\mathbb{R})/A = -A^t\}.$$

El isomorfismo es el siguiente: si $A \in su(2)$, entonces A es de la forma $A = \begin{pmatrix} bi & c + di \\ -c + di & -bi \end{pmatrix}$

y si $A \in so(3)$, entonces A es de la forma $A = \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ -b & 0 & f \\ -c & -f & 0 \end{pmatrix}$.

Definimos $\phi : su(2) \rightarrow so(3)$, dado por

$$\phi \begin{pmatrix} bi & c + di \\ -c + di & -bi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ -b & 0 & d \\ -c & -d & 0 \end{pmatrix} \quad (2.41)$$

Aplicamos el isomorfismo (2.41) al sistema (2.39) y (2.40)

$$\phi \begin{pmatrix} 0 & 1 + i\sqrt{6}u_x \\ -1 + i\sqrt{6}u_x & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \sqrt{6}u_x \\ -1 & -\sqrt{6}u_x & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$$

$$\phi \begin{pmatrix} i\frac{\sqrt{6}u}{2} & -\frac{1}{4} + 3u^2 + 3\sqrt{6}iu^2u_x \\ \frac{1}{4} - 3u^2 + 3\sqrt{6}iu^2u_x & -i\frac{\sqrt{6}u}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{6}u}{2} & -\frac{1}{4} + 3u^2 \\ -\frac{\sqrt{6}u}{2} & 0 & 3\sqrt{6}u^2u_x \\ \frac{1}{4} - 3u^2 & -3\sqrt{6}u^2u_x & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$$

entonces con este ϕ hallamos matrices de 3×3 con coeficientes reales. Un isomorfismo de esta forma lo usaremos en el capítulo 4, por eso decidimos presentarlo también aquí.

Ahora vamos a mostrar cómo una solución conocida de la ecuación de Sine-Gordon

$z_{yt} = \sin(z)$, nos permite obtener una solución exacta de la ecuación de corto pulso $u_{xt} = u + \frac{(u_{xx})^3}{6}$. Las siguientes transformaciones relacionan la ecuación de corto pulso con la ecuación de Sine-Gordon. La transformación (2.42) aparece en [Sa06] y [Ho17], pero la demostración de la proposición 2.3 que permite probar que esta transformación es correcta, es nueva. Escribimos

$$\begin{aligned} u(x, t) &= z_t(y, t) \\ w_y &= \cos(z) \\ w_t &= \frac{-z_t^2}{2} \end{aligned} \tag{2.42}$$

y definimos la nueva variable independiente como $x := w(y, t)$.

El sistema (2.42) para encontrar x es compatible sólo si $z(y, t)$ satisface la ecuación de Sine-Gordon. Con las transformaciones (2.42) podemos encontrar soluciones exactas de la ecuación de corto pulso desde una solución conocida de Sine-Gordon.

Consideremos la ecuación de Sine-Gordon $z_{yt} = \sin z$ con variables independientes y, t y variable dependiente z y la ecuación de corto pulso $u_{x\tau} = u + \frac{(u^3)_{xx}}{6}$ con variables independientes x, τ y variable dependiente u . Del sistema (2.42) obtenemos

$$dx = w_y dy + w_t dt = \cos z dy - \frac{z_t^2}{2} dt, \quad d\tau = dt.$$

Estas ecuaciones determinan una transformación T que nos lleva de (y, t, z) a (x, τ, u) , es decir, lleva las variables de ecuación de Sine-Gordon a las variables de ecuación de corto pulso. Esta transformación se extiende a transformaciones para $u_x, u_\tau, u_{xx}, u_{x\tau}$, y derivadas de orden superior, como explicamos a continuación.

Proposición 2.3. Si consideramos el sistema (2.42), entonces la extensión de la transformación T a segundas derivadas está dada por

$$\begin{aligned}
u &= z_t \\
dx &= \cos z dy - \frac{z_t^2}{2} dt \\
\tau &= t \\
u_x &= \tan z \\
u_\tau &= z_{tt} + \frac{z_t^2}{2} \tan z \\
u_{xx} &= z_y \sec^3 z \\
u_{x\tau} &= z_t \sec^2 z + z_y \frac{z_t^2}{2} \sec^3 z
\end{aligned} \tag{2.43}$$

Demostración. Sea $z := z(y, t)$ solución de $z_{yt} = \sin z$ y $u := u(x, \tau)$ solución de $u_{x\tau} = u + \frac{(u^3)_{xx}}{6}$. En la siguiente igualdad

$$du - u_x dx - u_\tau d\tau = 0 \tag{2.44}$$

aplicamos pullback T^* y tenemos (usando (2.42))

$$\begin{aligned}
&T^*(du - u_x dx - u_\tau d\tau) = 0 \\
\Rightarrow dT^*(u) - T^*(u_x)T^*(dx) - T^*(u_\tau)T^*(d\tau) &= 0 \\
\Rightarrow dz_t - T^*(u_x)(\cos z dy - \frac{z_t^2}{2} dt) - T^*(u_\tau)dt &= 0 \\
\Rightarrow z_{ty}dy + z_{tt}dt - T^*(u_x) \cos z dy + T^*(u_x)\frac{z_t^2}{2}dt - T^*(u_\tau)dt &= 0 \\
\Rightarrow (z_{ty} - T^*(u_x) \cos z)dy + (z_{tt} + T^*(u_x)\frac{z_t^2}{2} - T^*(u_\tau))dt &= 0
\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
z_{ty} - T^*(u_x) \cos z &= 0 \\
z_{tt} + T^*(u_x)\frac{z_t^2}{2} - T^*(u_\tau) &= 0
\end{aligned} \tag{2.45}$$

De (2.45), calculamos $T^*(u_x)$ y $T^*(u_\tau)$ (tambi3n usando que $z_{ty} = \sin z$)

$$T^*(u_x) = \tan z \quad (2.46)$$

$$T^*(u_\tau) = z_{tt} + \frac{z_t^2}{2} \tan z \quad (2.47)$$

Luego aplicamos T^* a $du_x - u_{xx}dx - u_{x\tau}d\tau = 0$ y tenemos

$$\begin{aligned} dT^*(u_x) - T^*(u_{xx})T^*(dx) - T^*(u_{x\tau})T^*(d\tau) &= 0 \\ \Rightarrow d \tan z - T^*(u_{xx})(\cos z dy - \frac{z_t^2}{2} dt) - T^*(u_{x\tau})dt &= 0 \\ \Rightarrow \sec^2 z z_y dy + \sec^2 z z_t dt - T^*(u_{xx}) \cos z dy + T^*(u_{xx}) \frac{z_t^2}{2} dt - T^*(u_{x\tau})dt &= 0 \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} z_y \sec^2 z - T^*(u_{xx}) \cos z &= 0 \\ z_t \sec^2 z + T^*(u_{xx}) \frac{z_t^2}{2} - T^*(u_{x\tau}) &= 0 \end{aligned} \quad (2.48)$$

obtenemos

$$T^*(u_{xx}) = z_y \sec^3 z \quad (2.49)$$

$$T^*(u_{x\tau}) = z_t \sec^2 z + z_y \frac{z_t^2}{2} \sec^3 z \quad (2.50)$$

□

al aplicar T^* a $du_\tau - u_{\tau x}dx - u_{\tau\tau}d\tau = 0$, se obtiene $T^*(u_{\tau x})$ y $T^*(u_{\tau\tau})$, estos pull-backs no los consideramos en la proposici3n 2.3, pero por otro lado podemos verificar que $T^*(u_{\tau x}) = T^*(u_{x\tau})$, lo que implica que T est3 bien definida. En la secci3n 2.4 usaremos la transformaci3n de la proposici3n 2.3 para encontrar 1-formas asociadas a la ecuaci3n de corto pulso a partir de las 1-formas asociadas a la ecuaci3n de Sine-Gordon y luego concluir que las superficies pseudo-esf3ricas descritas por la ecuaci3n de corto pulso admiten inmersiones de orden finito (esto lo definiremos en secci3n 2.4) en \mathbb{R}^3 .

Notemos que partiendo de la última ecuación de (2.43) y usando la primera y sexta ecuación de (2.43), tenemos

$$\begin{aligned}
 u_{x\tau} &= z_t \sec^2 z + z_y \frac{z_t^2}{2} \sec^3 z \\
 &= u \sec^2 z + \frac{u_{xx}}{\sec^3 z} \frac{u^2}{2} \sec^3 z \\
 &= u + uu_x^2 + \frac{u^2 u_{xx}}{2} \\
 &= u + \frac{(u^3)_{xx}}{6}
 \end{aligned}$$

que es exactamente la ecuación de corto pulso.

Ejemplo 2.10. Una solución de la ecuación de Sine-Gordon es

$$z(y, t) = 4 \arctan(e^{y+t}) \quad (2.51)$$

mediante las transformaciones (2.42), se obtiene el siguiente sistema de EDP

$$\begin{aligned}
 w_y &= \cos(4 \arctan(e^{y+t})) \\
 w_t &= \frac{-8 e^{2(y+t)}}{(e^{2(y+t)} + 1)^2}
 \end{aligned} \quad (2.52)$$

el cual tiene como solución

$$\begin{aligned}
 x := w(y, t) &= y - 2 \tanh(y + t) \\
 u(x, t) &= \frac{2}{\cosh(y(x) + t)}
 \end{aligned} \quad (2.53)$$

En las figuras (2.2) y (2.3) vemos respectivamente la solución de la ecuación Sine-Gordon (2.51) y la solución de ecuación de corto pulso (2.53).

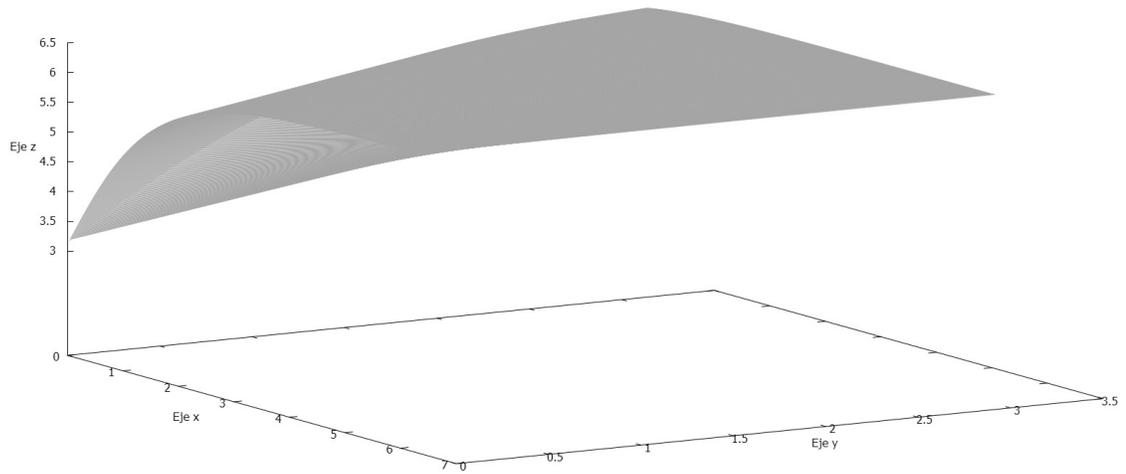


Figura 2.2: Solución (2.51) de Ecuación Sine-Gordon

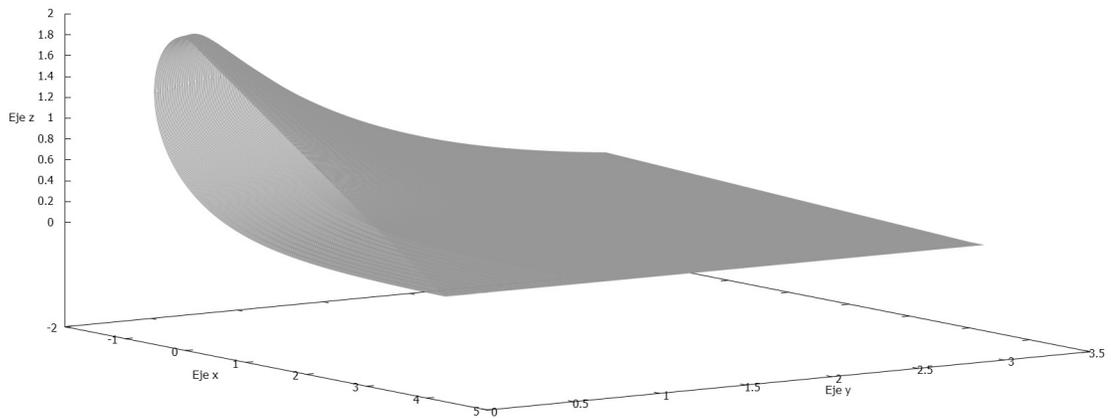


Figura 2.3: Solución (2.53) de Ecuación Corto Pulso

Ejemplo 2.11. Otra solución de la ecuación de Sine-Gordon es

$$z(y, t) = -4 \arctan \left(\frac{m \cosh(\psi)}{n \sinh(\phi)} \right) \quad (2.54)$$

donde $\phi = m(y(x) + t)$, $\psi = n(y(x) - t)$, $n = \sqrt{m^2 - 1}$

mediante las transformaciones (2.42), se obtiene el siguiente sistema de EDP

$$\begin{aligned} w_y &= \cos \left(-4 \arctan \left(\frac{m \cosh(\psi)}{n \sinh(\phi)} \right) \right) \\ w_t &= \frac{-8 m^2 (m \cosh(\psi) \cosh(\phi) + n \sinh(\psi) \sinh(\phi))^2}{n^2 \sinh^4(\phi) \left(1 + \frac{m^2 \cosh^2(\psi)}{n^2 \sinh^2(\phi)} \right)^2} \end{aligned} \quad (2.55)$$

el cual tiene como solución

$$\begin{aligned} x := w(y, t) &= y + 2 mn \frac{m \sinh(2\psi) - n \sinh(2\phi)}{m^2 \cosh^2(\psi) + n^2 \sinh^2(\phi)} \\ u(x, t) &= 4 mn \frac{m \cosh(\psi) \cosh(\phi) + n \sinh(\psi) \sinh(\phi)}{m^2 \cosh^2(\psi) + n^2 \sinh^2(\phi)} \end{aligned} \quad (2.56)$$

En las figuras (2.4) y (2.5) vemos respectivamente la solución de la ecuación Sine-Gordon (2.54) y la solución de ecuación de corto pulso (2.56).

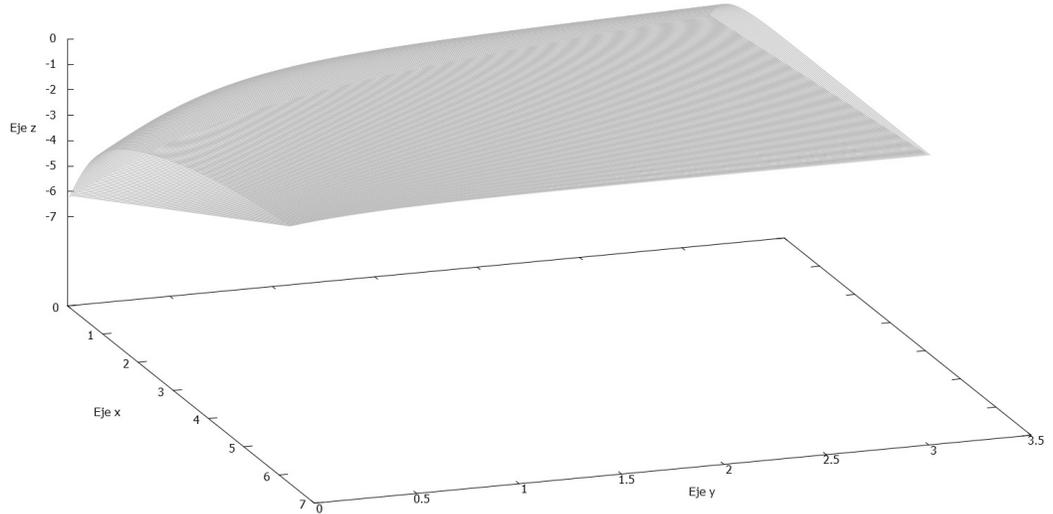


Figura 2.4: Solución (2.54) de Ecuación Sine-Gordon

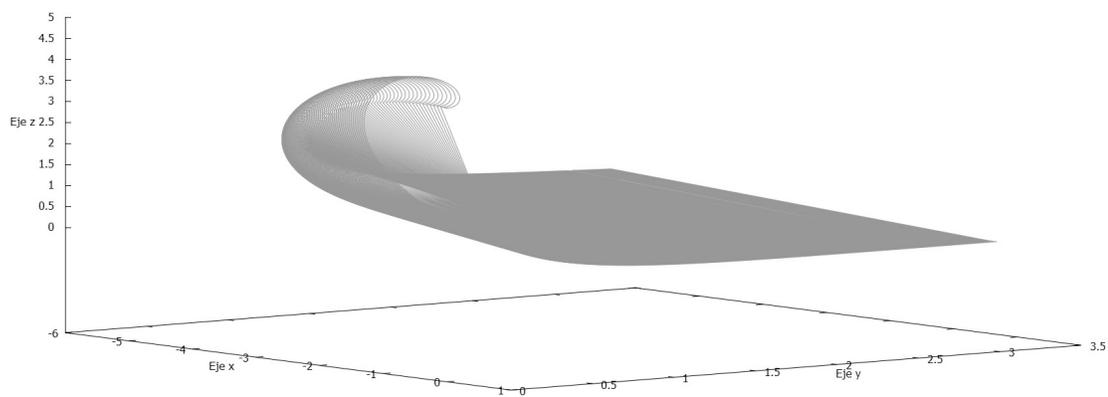


Figura 2.5: Solución (2.56) de Ecuación Corto Pulso

Ahora consideramos la ecuación general (2.31). Puesto que para un caso especial (la ecuación de corto pulso), esta ecuación describe superficies pseudo-esféricas, es natural preguntarse si hay otras ecuaciones en esta familia con la misma con la misma propiedad.

Teorema 2.1. *Sea la ecuación diferencial parcial no lineal de segundo orden*

$$u_{xt} = u + c_0u^2 + c_1uu_x + c_2uu_{xx} + c_3u_x^2 + d_0u^3 + d_1u^2u_x + d_2u^2u_{xx} + d_3uu_x^2$$

con $u := u(x, t)$, $c_i, d_i \in \mathbb{R}$ para $i = 0, 1, 2, 3$. La ecuación es de tipo pseudo-esférico con 1-formas asociadas (con $\eta \in \mathbb{R}$)

$$w_1 = F_{11}(u_x) dx + F_{12}(u, u_x) dt$$

$$w_2 = \eta dx + F_{22}(u) dt$$

$$w_3 = F_{31}(u_x) dx + F_{32}(u, u_x) dt$$

(de acuerdo al lema 2.1 de esta sección) si y solo si

1. Se cumplen

$$d_0 = 0, \quad d_1 = 0, \quad d_3 = 2d_2$$

$$c_0 = c_1 = c_2 = c_3 = 0$$

con 1-formas asociadas

$$\begin{aligned}
w_1 = & \left(A_1 u_x + \frac{\sqrt{-2 d_2 (A_1^2 - \overline{C}_1^2) (-2 d_2 \eta^2 + A_1^2 - \overline{C}_1^2) \overline{C}_1}}{2 d_2 (A_1^2 - \overline{C}_1^2)} \right) dx \\
& + \left(u^2 d_2 \left(A_1 u_x + \frac{\sqrt{-2 d_2 (A_1^2 - \overline{C}_1^2) (-2 d_2 \eta^2 + A_1^2 - \overline{C}_1^2) \overline{C}_1}}{2 d_2 (A_1^2 - \overline{C}_1^2)} \right) \right. \\
& - \frac{\overline{C}_1 (-2 d_2 \eta^2 + A_1^2 - \overline{C}_1^2) u}{(A_1^2 - \overline{C}_1^2) \eta} + \frac{\overline{C}_1 u}{\eta} \\
& \left. + \frac{\sqrt{2 \overline{C}_1} \sqrt{-d_2 (A_1 - \overline{C}_1) (A_1 + \overline{C}_1) (-2 d_2 \eta^2 + A_1^2 - \overline{C}_1^2)}}{(A_1 - \overline{C}_1)^2 (A_1 + \overline{C}_1)^2} \right) dt \\
w_2 = & \eta dx - \left(-\overline{C}_1 d_2 \eta u^2 - \frac{\sqrt{-2 d_2 (A_1^2 - \overline{C}_1^2) (-2 d_2 \eta^2 + A_1^2 - \overline{C}_1^2) \overline{C}_1} u}{A_1^2 - \overline{C}_1^2} \right. \\
& \left. + \frac{\overline{C}_1 (-2 d_2 \eta^2 + A_1^2 - \overline{C}_1^2)}{(A_1^2 - \overline{C}_1^2) \eta} - \frac{\overline{C}_1}{\eta} \right) \frac{dt}{\overline{C}_1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_3 = & \left(\frac{A_1 \sqrt{-2 d_2 (A_1^2 - \overline{C}_1^2) (-2 d_2 \eta^2 + A_1^2 - \overline{C}_1^2)}}{(2A_1^2 - \overline{C}_1^2) d_2} \right) dx \\
& + \left(u^2 d_2 \left(\frac{A_1 \sqrt{-2 d_2 (A_1^2 - \overline{C}_1^2) (-2 d_2 \eta^2 + A_1^2 - \overline{C}_1^2)}}{2 (A_1^2 - \overline{C}_1^2) d_2} \right) \right) \\
& + \frac{1}{\overline{C}_1 \eta} \left(-\frac{(-2 d_2 \eta^2 + A_1^2 - \overline{C}_1^2) \overline{C}_1 A_1 u}{A_1^2 - \overline{C}_1^2} + A_1 \overline{C}_1 u \right. \\
& + \frac{A_1 \sqrt{-2 d_2 (A_1^2 - \overline{C}_1^2) (-2 d_2 \eta^2 + A_1^2 - \overline{C}_1^2)}}{2 (A_1^2 - \overline{C}_1^2) d_2} \\
& \left. \cdot \left(-\frac{(-2 d_2 \eta^2 + A_1^2 - \overline{C}_1^2) \overline{C}_1}{(A_1^2 - \overline{C}_1^2) \eta} + \frac{\overline{C}_1}{\eta} \right) \right) dt
\end{aligned}$$

con $A_1^2 - \overline{C}_1^2, d_2, \eta \neq 0$. En este caso la ecuación es

$$u_{xt} = u + d_2 u^2 u_{xx} + 2d_2 u u_x^2$$

2. se cumplen

$$c_0 = \frac{1}{2}(-c_2 \eta^2 + c_1 \eta), \quad c_3 = c_2, \quad d_0 = \frac{1}{3}(-d_2 \eta^2 + d_1 \eta), \quad d_3 = 2d_2$$

con 1-formas asociadas

$$\begin{aligned}
w_1 = & (\overline{C_1} u_x + \overline{C_2}) dx + \left(u (d_2 u + c_2) (\overline{C_1} u_x + \overline{C_2}) + \frac{\overline{C_2} u^2 (-d_2 \eta^2 + d_1 \eta)}{\eta^2} \right. \\
& + \frac{\overline{C_1} u^2 (-c_2 \eta^2 + c_1 \eta)}{2\eta} - \frac{\overline{C_2} u^2 d_1}{\eta} + \frac{u^3 \overline{C_1} (-d_2 \eta^2 + d_1 \eta)}{3\eta} \\
& + \frac{\overline{C_2} (-c_2 \eta^2 + c_1 \eta) u}{\eta^2} + 2 \frac{\overline{C_2}^2 (-d_2 \eta^2 + d_1 \eta) u}{\overline{C_1} \eta^3} + 2 \frac{\overline{C_2}^2 d_2 u}{\overline{C_1} \eta} \\
& + \frac{\overline{C_2} (\overline{C_2} c_2 \eta^2 - \overline{C_2} c_1 \eta + \overline{C_1} \eta + \overline{C_2} (-c_2 \eta^2 + c_1 \eta))}{\overline{C_1} \eta^3} \\
& \left. - \frac{\overline{C_2} c_1 u}{\eta} - 2 \frac{\overline{C_2}^2 d_1 u}{\overline{C_1} \eta^2} + \frac{\overline{C_1} u}{\eta} \right) dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_2 = & \eta dx - \left(-\overline{C_1} d_2 \eta u^2 + \overline{C_1} d_1 u^2 - \overline{C_1} c_2 \eta u + \overline{C_1} c_1 u - 2 \overline{C_2} d_2 u - \overline{C_2} c_2 \right. \\
& - 2 \frac{\overline{C_2} u (-d_2 \eta^2 + d_1 \eta)}{\eta^2} - \frac{\overline{C_1} u (-c_2 \eta^2 + c_1 \eta)}{\eta} + 2 \frac{\overline{C_2} u d_1}{\eta} \\
& - \frac{\overline{C_1} u^2 (-d_2 \eta^2 + d_1 \eta)}{\eta} - \frac{\overline{C_2} (-c_2 \eta^2 + c_1 \eta)}{\eta^2} \\
& \left. - 2 \frac{\overline{C_2}^2 (-d_2 \eta^2 + d_1 \eta)}{\overline{C_1} \eta^3} - 2 \frac{\overline{C_2}^2 d_2}{\overline{C_1} \eta} + \frac{\overline{C_2} c_1}{\eta} + 2 \frac{\overline{C_2}^2 d_1}{\overline{C_1} \eta^2} - \frac{\overline{C_1}}{\eta} \right) \frac{dt}{\overline{C_1}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_3 = & (\overline{C_1} u_x + \overline{C_2}) dx + (u_x (d_2 u + c_2) (\overline{C_1} u_x + \overline{C_2})) \\
& + \frac{1}{\overline{C_1} \eta} \left(\overline{C_1}^2 (-1/3 d_2 \eta^2 + 1/3 d_1 \eta) u^3 + \overline{C_1}^2 (-1/2 c_2 \eta^2 + 1/2 c_1 \eta) u^2 \right. \\
& - \overline{C_1} \overline{C_2} d_1 u^2 - \overline{C_1} \overline{C_2} c_1 u + 2 \overline{C_2}^2 d_2 u + \overline{C_1}^2 u + \overline{C_2}^2 c_2 \\
& + \overline{C_2} \left(2 \frac{\overline{C_2} u (-d_2 \eta^2 + d_1 \eta)}{\eta^2} + \frac{\overline{C_1} u (-c_2 \eta^2 + c_1 \eta)}{\eta} \right. \\
& - 2 \frac{\overline{C_2} u d_1}{\eta} + \frac{\overline{C_1} u^2 (-d_2 \eta^2 + d_1 \eta)}{\eta} + \frac{\overline{C_2} (-c_2 \eta^2 + c_1 \eta)}{\eta^2} \\
& \left. \left. + 2 \frac{\overline{C_2}^2 (-d_2 \eta^2 + d_1 \eta)}{\overline{C_1} \eta^3} + 2 \frac{\overline{C_2}^2 d_2}{\overline{C_1} \eta} - \frac{\overline{C_2} c_1}{\eta} - 2 \frac{\overline{C_2}^2 d_1}{\overline{C_1} \eta^2} + \frac{\overline{C_1}}{\eta} \right) \right) dt
\end{aligned}$$

con $\overline{C_1}, \eta \neq 0$. En este caso la ecuación es

$$\begin{aligned}
u_{xt} = & u + \frac{1}{3} (-d_2 \eta^2 + d_1 \eta) u^3 + d_1 u^2 u_x + d_2 u^2 u_{xx} + 2 d_2 u u_x^2 \\
& + \frac{1}{2} (-c_2 \eta^2 + c_1 \eta) u^2 + c_1 u u_x + c_2 u u_{xx} + c_2 u_x^2
\end{aligned}$$

De este caso, notemos que si $d_1 = d_2 = c_3 = c_1 = 0$, nos queda la ecuación lineal

$$u_{xt} = u$$

con 1-formas asociadas

$$w_1 = (\overline{C_1} u_x + \overline{C_2}) dx + \left(\frac{\overline{C_1} u}{\eta} + \frac{\overline{C_2}}{\eta^2} \right) dt, \quad w_2 = \eta dx + \frac{1}{\eta} dt, \quad w_3 = w_1$$

3. se cumplen

$$\begin{aligned}
d_0 = 0, \quad d_1 = 0, \quad d_3 = d_2, \\
c_2 = \frac{4d_2\eta}{\overline{C_1}^3} \sqrt{-d_2^2\eta^2 - \overline{C_1}^2 d_2}, \quad c_0 = 0, \quad c_1 = 0, \quad c_3 = \frac{c_2}{2}
\end{aligned}$$

con 1-formas asociadas

$$\begin{aligned}
w_1 = & - \frac{\left(-\overline{C}_1^2 d_2 u_x^2 + 2 d_2 \eta^2 + \overline{C}_1^2\right) dx}{\overline{C}_1} \left(-4 \frac{\sqrt{-d_2^2 \eta^2 - \overline{C}_1^2 d_2 d_2 \eta^2}}{\overline{C}_1^3} \right. \\
& + 2 \frac{\sqrt{-d_2^2 \eta^2 - \overline{C}_1^2 d_2} \left(2 d_2 \eta^2 + \overline{C}_1^2\right)}{\overline{C}_1^3} \left. \right)^{-1} + \left(- \frac{u \left(-\overline{C}_1^2 d_2 u_x^2 + 2 d_2 \eta^2 + \overline{C}_1^2\right)}{\overline{C}_1} \right. \\
& \cdot \left(d_2 u + 4 \frac{\sqrt{-d_2^2 \eta^2 - \overline{C}_1^2 d_2 \eta d_2}}{\overline{C}_1^3} \right) \left(-4 \frac{\sqrt{-d_2^2 \eta^2 - \overline{C}_1^2 d_2 d_2 \eta^2}}{\overline{C}_1^3} \right. \\
& + 2 \frac{\sqrt{-d_2^2 \eta^2 - \overline{C}_1^2 d_2} \left(2 d_2 \eta^2 + \overline{C}_1^2\right)}{\overline{C}_1^3} \left. \right)^{-1} \\
& \left. - \frac{1}{\overline{C}_1} \left(2 d_2 \eta u + 2 \frac{\sqrt{-d_2^2 \eta^2 - \overline{C}_1^2 d_2} \left(2 d_2 \eta^2 + \overline{C}_1^2\right)}{\overline{C}_1^3} \right) \right) dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_2 = & \eta dx + \left(d_2 \eta u^2 + 2 \frac{\sqrt{-d_2^2 \eta^2 - \overline{C}_1^2 d_2} \left(2 d_2 \eta^2 + \overline{C}_1^2\right) u}{\overline{C}_1^3} \right. \\
& + 2 \frac{\sqrt{-d_2^2 \eta^2 - \overline{C}_1^2 d_2 \eta}}{\overline{C}_1^3} \left(-4 \frac{\sqrt{-d_2^2 \eta^2 - \overline{C}_1^2 d_2 d_2 \eta^2}}{\overline{C}_1^3} \right. \\
& \left. \left. + 2 \frac{\sqrt{-d_2^2 \eta^2 - \overline{C}_1^2 d_2} \left(2 d_2 \eta^2 + \overline{C}_1^2\right)}{\overline{C}_1^3} \right) \right) dt
\end{aligned}$$

$$w_3 = \overline{C}_1 u_x dx + u \left(d_2 u + 4 \frac{\sqrt{-d_2^2 \eta^2 - \overline{C}_1^2 d_2 \eta d_2}}{\overline{C}_1^3} \right) \overline{C}_1 u_x dt$$

con $\overline{C_1} \neq 0$. En este caso la ecuación es

$$u_{xt} = u + d_2 u^2 u_{xx} + d_2 u u_x^2 + \frac{4\eta d_2 u u_{xx}}{\overline{C_1}^3} \sqrt{-d_2^2 \eta^2 - \overline{C_1}^2 d_2} + \frac{2\eta d_2 u_x^2}{\overline{C_1}^3} \sqrt{-d_2^2 \eta^2 - \overline{C_1}^2 d_2}$$

Demostración. Haremos la demostración para el caso (1), ya que para los demás, el procedimiento es similar.

A la ecuación (2.31) le equipamos 1-formas w_1, w_2 y w_3 , que dependen de u, u_x y $u_{x,x}$ (como planteamos en el enunciado del teorema). Estas 1-formas deben cumplir las ecuaciones de estructura para superficies pseudo-esféricas (que vimos en la sección 2.1).

Planteamos las ecuaciones de estructura (2.1) de la forma

$$\begin{aligned} a_1 &= dw_1 - w_3 \wedge w_2 \\ a_2 &= dw_2 - w_1 \wedge w_3 \\ a_3 &= dw_3 - w_1 \wedge w_2 \end{aligned}$$

Ahora tenemos que encontrar funciones F_{ij} tales que las ecuaciones de estructura sean cero cuando se satisface la ecuación diferencial (2.31). Calculamos los pullback de a_1, a_2 y a_3 en que se considera la condición de (2.31).

$$\begin{aligned} pa1 &= \left(\frac{\partial}{\partial u_x} F_{12}(u, u_x) \right) u_{x,x} + \left(\frac{\partial}{\partial u} F_{12}(u, u_x) \right) u_x + (-d_0 u^3 + (-d_1 u_x - d_2 u_{x,x} - c_0) u^2 \\ &\quad + (-d_3 u_x^2 - c_1 u_x - c_2 u_{x,x} - 1) u - c_3 u_x^2) \frac{d}{du_x} F_{11}(u_x) - F_{31}(u_x) F_{22}(u) + F_{32}(u, u_x) \eta \end{aligned}$$

$$pa2 = F_{12}(u, u_x) F_{31}(u_x) - F_{11}(u_x) F_{32}(u, u_x) + \left(\frac{d}{du} F_{22}(u) \right) u_x$$

$$pa_3 = \left(\frac{\partial}{\partial u_x} F_{32}(u, u_x) \right) u_{x,x} + \left(\frac{\partial}{\partial u} F_{32}(u, u_x) \right) u_x + (-d_0 u^3 + (-d_1 u_x - d_2 u_{x,x} - c_0) u^2 + (-d_3 u_x^2 - c_1 u_x - c_2 u_{x,x} - 1) u - c_3 u_x^2) \frac{d}{du_x} F_{31}(u_x) - F_{11}(u_x) F_{22}(u) + F_{12}(u, u_x) \eta$$

Nuestro objetivo es que se cumpla

$$pa_1 = pa_2 = pa_3 = 0$$

de $\frac{\partial pa_3}{\partial u_{xx}} = 0$ se obtiene

$$\frac{\partial F_{32}(u, u_x)}{\partial u_x} + (-d_2 u^2 - c_2 u) \frac{d}{du_x} F_{31}(u_x) = 0$$

$$\Rightarrow F_{32}(u, u_x) = u \cdot F_{31}(u_x)(d_2 u + c_2) + G_{32}(u)$$

reemplazamos F_{32} en w_3 .

Luego de $\frac{\partial pa_1}{\partial u_{xx}} = 0$ se obtiene

$$\frac{\partial F_{12}(u, u_x)}{\partial u_x} + (-d_2 u^2 - c_2 u) \frac{d}{du_x} F_{11}(u_x) = 0$$

$$\Rightarrow F_{12}(u, u_x) = u \cdot F_{11}(u_x)(d_2 u + c_2) + G_{12}(u)$$

reemplazamos F_{12} en w_1 .

Luego de $\frac{\partial^6 pa_1}{\partial u^4 \partial u_x^2} = 0$ se obtiene

$$\left(\frac{d^4}{du^4} F_{22}(u) \right) \left(\frac{d^2}{du_x^2} F_{31}(u_x) \right) = 0$$

o sea tenemos dos casos, elegimos $\frac{d^2}{du_x^2} F_{31}(u_x) = 0$ lo que nos da $F_{31}(u_x) = \overline{C}_1 u_x + \overline{C}_2$, reemplazamos F_{31} en w_3 .

De $\frac{\partial^2 pa2}{\partial u_x^2} = 0$ se obtiene

$$\left(\frac{d^2}{du_x^2} F_{11}(u_x) \right) G_{32}(u) = 0$$

tenemos dos subcasos, elegimos $\frac{d^2}{du_x^2} F_{11}(u_x) = 0$ lo que nos da $F_{11}(u_x) = A_1 u_x + A_2$, reemplazamos F_{11} en w_1 .

de $\frac{\partial^3 pa1}{\partial u \partial u_x^2} = 0$ se obtiene

$$\begin{aligned} 4A_1(d_2 - \frac{d_3}{2}) &= 0 \\ \Rightarrow A_1 = 0 \vee d_3 &= 2d_2 \end{aligned}$$

elegimos $d_3 = 2d_2$ (y asumimos $A_1 \neq 0$).

de $\frac{\partial^2 pa1}{\partial u_x^2} = 0$ se obtiene

$$2A_1(c_2 - c_3) = 0 \Rightarrow c_3 = c_2$$

de $\frac{\partial pa1}{\partial u_x} = 0$ se obtiene

$$\frac{d}{du} G_{12}(u) - \overline{C_1} F_{22}(u) + (\overline{C_1} d_2 \eta - A_1 d_1) u^2 + (\overline{C_1} c_2 \eta - A_1 c_1 + 2A_2 d_2) u + A_2 c_2 = 0$$

y obtenemos (suponiendo $\overline{C_1} \neq 0$)

$$F_{22}(u) = \frac{-\overline{C_1} d_2 \eta u^2 + A_1 d_1 u^2 - \overline{C_1} c_2 \eta u + A_1 c_1 u - 2A_2 d_2 u - A_2 c_2 - \frac{d}{du} G_{12}(u)}{\overline{C_1}}$$

reemplazamos F_{22} en w_2 .

Luego $pa1 = 0$ nos da una ecuación para $G_{32}(u)$. Reemplazamos esta expresión en w_3 y efectivamente obtenemos que $pa1 = 0$.

de $\frac{\partial pa3}{\partial u_x} = 0$ se obtiene $G_{12}(u)$, y así ya tenemos todas las funciones asociadas a los w_i .

La función G_{12} queda dada por una gran suma no trivial, que incluye constantes D_1 y D_2 .

de $\frac{\partial^4 pa3}{\partial u^4} = 0$ se obtiene

$$-A_1^3 \eta^4 D_1 (A_1 A_2 - C_1 C_2) e^{\frac{A_1 \eta u C_2^{-1}}{C_2^4 C_1}} = 0$$

lo que da $D_1 = 0$ o $(A_1 A_2 - \overline{C_1 C_2}) = 0$, elegimos $D_1 = 0$ (asumimos $(A_1 A_2 - \overline{C_1 C_2}) \neq 0$)

de $\frac{\partial^3 pa3}{\partial u^3} = 0$ se obtiene

$$2d_1(A_1 - C_1)(A_1 + C_1)\eta = 0$$

lo que da $d_1 = 0$ o $A_1^2 - \overline{C_1^2} = 0$, elegimos $d_1 = 0$ (asumimos $A_1^2 - \overline{C_1^2} \neq 0$)

de $\frac{\partial^4 pa2}{\partial u^3 \partial u_x} = 0$ se obtiene

$$(-12A_1^4 d_0 + 12A_1^2 C_1^2 d_0) = 0 \Rightarrow d_0 = 0$$

de $\frac{\partial^2 pa3}{\partial u^2} = 0$ se obtiene

$$1/2 \frac{(2c_1 A_1^2 - 4A_2 d_2 A_1 - 2(\overline{C_1} c_1 - 2\overline{C_2} d_2) \overline{C_1}) \eta}{A_1} = 0$$

obtenemos una expresion para $\overline{C_2}$

de $\frac{\partial^3 pa2}{\partial u^2 \partial u_x} = 0$ se obtiene

$$-2c_0(A_1^2 - C_1^2) = 0 \Rightarrow c_0 = 0$$

de $\frac{\partial pa3}{\partial u} = 0$ se obtiene

$$1/2 \frac{c_1 (A_1 - \overline{C_1})(A_1 + \overline{C_1})(-\overline{C_1} c_2 \eta + A_1 c_1 - 2A_2 d_2)}{\overline{C_1} A_1 d_2} = 0$$

lo que da $c_1 = 0$ o $-\overline{C}_1 c_2 \eta + A_1 c_1 - 2A_2 d_2 = 0$, elegimos $c_1 = 0$ (asumimos $-\overline{C}_1 c_2 \eta + A_1 c_1 - 2A_2 d_2 \neq 0$)

de $\frac{\partial^2 pa2}{\partial u \partial u_x} = 0$ obtenemos una expresión para A_2 y de $\frac{\partial pa2}{\partial u_x} = 0$ obtenemos una expresión para D_2

De $pa2 = 0$ se obtiene

$$\frac{A_1 \sqrt{2} \sqrt{-d_2 (A_1^2 - \overline{C}_1^2) (-2 d_2 \eta^2 + A_1^2 - \overline{C}_1^2)} c_2}{\overline{C}_1 d_2^2 \eta} = 0$$

da $-2 d_2 \eta^2 + A_1^2 - \overline{C}_1^2 = 0$ o $c_2 = 0$, elegimos $c_2 = 0$ (asumimos $-2 d_2 \eta^2 + A_1^2 - \overline{C}_1^2 = 0$), y se llega a $pa3 = 0$.

Los siguientes casos dan a contradicción (y por ende no son posibles).

(i) Si $c_2 \neq 0$

De $pa3 = 0$ se tiene

$$c_2 (A_1^2 - \overline{C}_1^2) = 0$$

$$\Rightarrow A_1^2 - \overline{C}_1^2 = 0$$

lo que es una contradicción ya que asumimos que $A_1^2 - \overline{C}_1^2 \neq 0$

(ii) Si $c_1 \neq 0$

De $\frac{\partial pa3}{\partial u} = 0$ se obtiene

$$c_1 (A_1 - \overline{C}_1)(A_1 + \overline{C}_1)(-\overline{C}_1 c_2 \eta + A_1 c_1 - 2A_2 d_2) = 0$$

$$\Rightarrow -\overline{C}_1 c_2 \eta + A_1 c_1 - 2A_2 d_2 = 0$$

obtenemos una expresión para A_2 (suponiendo $d_2 \neq 0$).

De $pa3 = 0$ se obtiene

$$2D_2 d_2 \eta^2 + \overline{C}_1 c_2 \eta - A_1 c_1 = 0$$

obtenemos una expresión para D_2 .

De $pa_2=0$ se obtiene

$$\begin{aligned} & (-A_1^2 c_2^2 + \overline{C_1}^2 c_2^2 + 4d_2^2)\eta^2 - 2A_1^2 d_2 + 2\overline{C_1}^2 d_2) u u_x \\ & + (A_1^2 c_2 - \overline{C_1}^2 c_2) u_x - c_1(A_1^2 - \overline{C_1}^2) u = 0 \end{aligned}$$

se deduce que $c_1 = 0$ lo que es una contradicción.

(iii) si $d_2 = 0$

de $\frac{\partial^2 pa_3}{\partial u^2} = 0$ se obtiene

$$2(A_1^2 - \overline{C_1}^2)c_1 \eta = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

de $\frac{\partial^3 pa_2}{\partial u^2 \partial u_x} = 0$ se obtiene

$$-2A_1(A_1^2 - \overline{C_1}^2)c_0 = 0 \Rightarrow c_0 = 0$$

de $\frac{\partial pa_3}{\partial u} = 0$ se obtiene

$$(-A_1 A_2 - \overline{C_1} C_2)c_3 \eta = 0 \Rightarrow c_3 = 0$$

$pa_3=0$ se obtiene $A_2 = D_2 \eta^2$

de $\frac{\partial pa_2}{\partial u} = 0$ se obtiene

$$A_1^2 - \overline{C_1}^2 = 0$$

lo que es una contradicción ya que asumimos que $A_1^2 - \overline{C_1}^2 \neq 0$.

(iv) si $D_1 \neq 0$

de $\frac{\partial^4 pa_3}{\partial u^4} = 0$ se obtiene

$$A_1^3 \eta^4 D_1 (A_1 A_2 - \overline{C_1} C_2) e^{\frac{A_1 \eta u}{C_2}} = 0$$

da $A_1 A_2 - \overline{C_1} C_2 = 0$

de $\frac{\partial^3 pa_3}{\partial u^3} = 0$ se obtiene

$$d_1(6A_1^2 - 6\overline{C_1}^2)\eta = 0$$

$$\Rightarrow d_1 = 0 \vee A_1^2 - \overline{C_1}^2 = 0$$

elegimos $A_1^2 - \overline{C_1}^2 = 0$, tomando $A_1 = \overline{C_1}$

$$\text{de } \frac{\partial^3 pa2}{\partial u^2 \partial u_x} = 0 \text{ se obtiene } \overline{C_1}^2 D_1 \eta^3 e^{\frac{\overline{C_1} \eta u}{C_2}} = 0 \Rightarrow D_1 = 0$$

Lo que es una contradicción ya que asumimos $D_1 \neq 0$.

Si de $\frac{\partial^3 pa3}{\partial u^3} = 0$ elegimos $d_1 = 0$, de manera similar llegamos a una contradicción.

(v) si $d_3 \neq 2d_2$

$$\text{De } \frac{\partial^3 pa2}{\partial u^2 \partial u_x} = 0 \text{ se obtiene}$$

$$4 A_1 (d_2 - d_3/2) = 0 \Rightarrow A_1 = 0$$

$$\text{de } \frac{\partial pa1}{\partial u_x} = 0 \text{ se obtiene una expresión para } F_{22}$$

De $pa1 = 0$ se obtiene una expresión para G_{32}

$$\text{De } \frac{\partial^2 pa3}{\partial u_x^2} = 0 \text{ se obtiene}$$

$$(2(2d_2 - d_3)u + 2c_2 - 2c_3)\overline{C_1} = 0$$

se deduce $d_3 = 2d_2$, lo que es una contradicción ya que asumimos $d_3 \neq 2d_2$.

(vi) Si $G_{32}(u) = 0$

$$\text{de } \frac{\partial pa2}{\partial u_x} = 0 \text{ se obtiene}$$

$$\frac{d}{du} F_{22}(u) + G_{12}(u)\overline{C_1} = 0 \Rightarrow G_{12}(u) = -\frac{\frac{d}{du} F_{22}(u)}{\overline{C_1}}$$

suponiendo $\overline{C_1} \neq 0$

de $pa2 = 0$ se obtiene

$$\left(\frac{d}{du} F_{22}(u) \right) \overline{C_2} = 0$$

$$\text{elegimos } \frac{d}{du} F_{22}(u) = 0$$

de $\frac{\partial^3 pa3}{\partial u^3} = 0$ se obtiene

$$-6\overline{C_1}d_0 = 0 \Rightarrow d_0 = 0$$

de $\frac{\partial^2 pa3}{\partial u^2} = 0$ se obtiene

$$2d_2\eta F_{11}(u_x) - 2\overline{C_1}(d_1u_x + c_0) = 0$$

da $F_{11}(u_x) = \frac{\overline{C_1}(d_1u_x + c_0)}{d_2\eta}$

suponiendo $d_2 \neq 0$.

De $\frac{\partial^3 pa1}{\partial u \partial u_x^2} = 0$ se obtiene

$$4(d_2 - \frac{d_3}{2})d_1\overline{C_1} = 0 \Rightarrow d_3 = 2d_2 \vee d_1 = 0$$

si elegimos $d_1 = 0$

de $\frac{\partial^2 pa1}{\partial u \partial u_x} = 0$ se obtiene

$$2\eta^2 \overline{C_1} d_2^2 u + (\overline{C_1}c_2\eta^2 + 2\overline{C_1}c_0)d_2 = 0$$

se deduce que $\overline{C_1}d_2^2 = 0 \Rightarrow d_2 = 0$, lo que es una contradicción ya que asumimos que $d_2 \neq 0$.

si hubieramos elegido $d_3 = 2d_2$, de igual forma se llega a contradicción.

de $pa2 = 0$ obtuvimos

$$\left(\frac{d}{du}F_{22}(u)\right)\overline{C_2} = 0$$

ahora elegimos $\overline{C_2} = 0$

De $\frac{\partial^4 pa1}{\partial u^2 \partial u_x^2} = 0$ se obtiene

$$\left(-2d_2\eta + \frac{d^2}{du^2}F_{22}(u)\right)\frac{d^2}{du_x^2}F_{11}(u_x) = 0$$

elegimos $\frac{d^2}{du_x^2}F_{11}(u_x) = 0$ que da $F_{11}(u_x) = A_1u_x + A_2$.

De $\frac{\partial^2 pa3}{\partial u_x^2} = 0$ se obtiene

$$((4d_2 - 2d_3)u + 2c_2 - 2c_3)\overline{C_1} = 0$$

$$\Rightarrow d_3 = 2d_2, c_3 = c_2$$

De $\frac{\partial pa3}{\partial u_x} = 0$ se obtiene

$$-A_1 F_{22}(u) + ((-d_1 u - c_1)\overline{C_1} + \eta(d_2 u + c_2)A_1)u = 0$$

$$\Rightarrow F_{22}(u) = \frac{A_1 d_2 \eta u + A_1 c_2 \eta - \overline{C_1} d_1 u - \overline{C_1} c_1 u}{A_1}$$

suponiendo que $A_1 \neq 0$.

De $\frac{\partial^3 pa3}{\partial u^3} = 0$ se obtiene

$$-6d_0 \overline{C_1} = 0 \Rightarrow d_0 = 0$$

De $\frac{\partial^2 pa3}{\partial u^2} = 0$ se obtiene

$$2(A_1 c_0 - A_2 d_1)\overline{C_1} = 0 \Rightarrow c_0 = \frac{A_2 d_1}{A_1}$$

De $\frac{\partial pa3}{\partial u} = 0$ se obtiene

$$-(-A_2 c_1 + A_1)\overline{C_1}^2 + 2\eta d_1 \overline{C_1} - 2A_1 \eta^2 d_2 = 0$$

lo que da una expresión para A_2 , suponiendo que $c_1 \neq 0$.

de $pa3 = 0$ se obtiene

$$\eta(A_1 c_2 \eta - \overline{C_1} c_1) = 0 \Rightarrow c_2 = \frac{\overline{C_1} c_1}{A_1 \eta}$$

de $\frac{\partial^3 pa1}{\partial u^2 \partial u_x} = 0$ se obtiene

$$2(A_1^2 - \overline{C_1}^2)c_1 d_1 = 0 \Rightarrow A_1 = \overline{C_1} \vee d_1 = 0$$

(ya que asumimos que $c_1 \neq 0$)

Si elegimos $A_1 = \overline{C_1}$

$\frac{\partial pa1}{\partial u_x} = 0$ se obtiene

$$(4d_2^2 \eta^3 + 2\overline{C_1}^2 d_2 \eta - 4d_1 d_2 \eta^2)u + \overline{C_1}^2 c_1$$

se deduce $\overline{C_1}^2 c_1 = 0 \Rightarrow \overline{C_1} = 0 \vee c_1 = 0$ ambos dan contradicción ya que asumimos ambos son distintos de 0. Si hubieramos elegido $d_1 = 0$, de igual forma se llega a contradicción.

(vii) Si $\frac{d^4}{du^4} F_{22}(u) = 0$

esto viene de $\frac{\partial^6 pa1}{\partial u^4 \partial u_x^2} = 0$. Se tiene

$$F_{22}(u) = \frac{B_1}{6} u^3 + \frac{B_2}{2} u^2 + B_3 u + B_4$$

de $\frac{\partial^5 pa1}{\partial u^3 \partial u_x^2} = 0$ se obtiene

$$-6d_0 \frac{d^3 F_{11}(u_x)}{du_x^3} - B_1 \frac{d^2 F_{31}(u_x)}{du_x^2} = 0$$

da $F_{31}(u_x) = -\frac{6d_0}{B_1} \frac{dF_{11}(u_x)}{du_x} + \overline{C_1} u_x + \overline{C_2}$, imponiendo $B_1 \neq 0$.

de $\frac{\partial^5 pa3}{\partial u^3 \partial u_x^2} = 0$ se obtiene

$$216 d_0^2 \frac{d^4 F_{11}(u_x)}{du_x^4} - 6B_1^2 \frac{d^2 F_{11}(u_x)}{du_x^2} = 0$$

da $F_{11}(u_x) = A_1 + A_2 u_x + A_3 e^{\frac{-B_1 u_x}{6d_0}} + A_4 e^{\frac{B_1 u_x}{6d_0}}$

de $\frac{\partial^4 pa1}{\partial u^3 \partial u_x} = 0$ se obtiene $G_{12}(u) = \frac{\overline{C_1} B_1}{24} u^4 + \frac{D_1}{6} u^3 + \frac{D_2}{2} u^2 + D_3 u + D_4$

de $\frac{\partial^4 pa3}{\partial u^3 \partial u_x} = 0$ se obtiene $G_{32}(u) = \frac{B_1 A_2}{24} u^4 + \frac{E_1}{6} u^3 + \frac{E_2}{2} u^2 + E_3 u + E_4$

de $\frac{\partial^6 pa2}{\partial u^4 \partial u_x^2} = 0$ se obtiene

$$2B_1^4(A_2 - \overline{C_1})A_3 e^{-\frac{B_1 u_x}{6d_0}} + 2B_1^4 A_4(A_2 + \overline{C_1})e^{\frac{B_1 u_x}{6d_0}} = 0$$

$$\Rightarrow (A_2 - \overline{C_1})A_3 = 0, A_4(A_2 + \overline{C_1}) = 0$$

elegimos $A_2 = \overline{C_1}$ lo que implica $A_4 = 0$ tomando $\overline{C_1} \neq 0$

de $\frac{\partial^5 pa2}{\partial u^3 \partial u_x^2} = 0$ se obtiene

$$B_1^2 A_3(-E_1 + D_1)e^{-\frac{B_1 u_x}{6d_0}} = 0$$

elegimos $D_1 = E_1$ tomando $A_3 \neq 0$

de $\frac{\partial^4 pa2}{\partial u^2 \partial u_x^2} = 0$ se obtiene

$$A_3(-E_2 + D_2)B_1^2 e^{\frac{B_1 u_x}{6d_0}} = 0 \Rightarrow D_2 = E_2$$

de $\frac{\partial^3 pa2}{\partial u \partial u_x^2} = 0$ se obtiene

$$A_3(E_3 - D_3)B_1^2 e^{-\frac{B_1 u_x}{6d_0}} = 0 \Rightarrow D_3 = E_3$$

Podemos notar de de $\frac{\partial^2 pa2}{\partial u \partial u_x} = 0$ se obtiene

$$24 B_1^2 u + 24 B_1 B_2 = 0$$

que implica $B_1 = 0$, lo que es una contradicción ya que asumimos que $B_1 \neq 0$ (para que F_{31} esté definida)

□

Nota: Del segundo caso del teorema 2.1, notemos que podemos obtener una ecuación independiente de η imponiendo las condiciones $c_1 = d_1$, $c_2 = d_2$ y $\eta = \frac{d_1}{d_2}$. Entonces nos queda

$$u_{xt} = d_1 u^2 u_x + d_2 u^2 u_{xx} + 2d_2 u u_x^2 + d_1 u u_x + d_2 u u_{xx} + d_2 u_x^2 + u$$

con 1-formas asociadas

$$w_1 = \left(\overline{C_1} u_x + \overline{C_2} \right) dx + \left(u (d_2 u + d_2) (\overline{C_1} u_x + \overline{C_2}) - \overline{C_2} d_2 u^2 - \overline{C_2} u d_2 + \frac{\overline{C_1} u d_2}{d_1} + \frac{\overline{C_2} d_2^2}{d_1^2} \right) dt$$

$$w_2 = \frac{d_1}{d_2} dx + \frac{d_2}{d_1} dt$$

$$w_3 = \left(\overline{C_1} u_x + \overline{C_2} \right) dx + \left(u (d_2 u + d_2) (\overline{C_1} u_x + \overline{C_2}) + \frac{d_2}{\overline{C_1} d_1} \left(-\overline{C_1} \overline{C_2} d_1 u^2 - \overline{C_1} \overline{C_2} d_1 u + 2 \overline{C_2}^2 d_2 u + \overline{C_1}^2 u + \overline{C_2}^2 d_2 + \overline{C_2} \left(-2 \overline{C_2} u d_2 - \overline{C_2} d_2 + \frac{\overline{C_1} d_2}{d_1} \right) \right) \right) dt$$

Esta ecuación no forma parte del teorema 2.1 porque w_2 no contiene ηdx , pero de todas maneras es una ecuación interesante porque las 1-formas asociadas dependen de parámetros. El siguiente teorema establece condiciones para que la ecuación (2.31) describa superficies esféricas, la demostración es parecida a la del teorema anterior y por lo tanto la omitimos.

Teorema 2.2. *Sea la ecuación diferencial parcial no lineal de segundo orden*

$$u_{xt} = u + c_0 u^2 + c_1 u u_x + c_2 u u_{xx} + c_3 u_x^2 + d_0 u^3 + d_1 u^2 u_x + d_2 u^2 u_{xx} + d_3 u u_x^2$$

con $u := u(x, t)$, $c_i, d_i \in \mathbb{R}$ para $i = 0, 1, 2, 3$. La ecuación es de tipo esférico si y solo si

$$c_i = 0, \text{ para } i = 0, 1, 2, 3, d_0 = d_1 = 0, d_3 = 2d_2$$

con 1-formas asociadas

$$\begin{aligned}
w_1 = & \left(A_1 u_x - \frac{\sqrt{d_2 (A_1^2 + \overline{C}_1^2) (-2 d_2 \eta^2 + A_1^2 + \overline{C}_1^2) \overline{C}_1}}{\sqrt{2} d_2 (A_1^2 + \overline{C}_1^2)} \right) dx \\
& + \left(-\overline{C}_1 \sqrt{2} (A_1^2 u^2 + \overline{C}_1^2 u^2 - 2) \sqrt{d_2 (A_1^2 + \overline{C}_1^2) (-2 d_2 \eta^2 + A_1^2 + \overline{C}_1^2)} \right. \\
& \left. + 2 d_2 u (A_1^2 + \overline{C}_1^2) (A_1^3 u u_x + A_1 \overline{C}_1^2 u u_x - 2 \overline{C}_1 \eta) \right) \frac{1}{2 (A_1^2 + \overline{C}_1^2)^2} dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_2 = & \eta dx + \frac{1}{A_1^2 + \overline{C}_1^2} \left(-\sqrt{2} \sqrt{d_2 (A_1^2 + \overline{C}_1^2) (-2 d_2 \eta^2 + A_1^2 + \overline{C}_1^2)} u \right. \\
& \left. + d_2 \eta (A_1^2 u^2 + \overline{C}_1^2 u^2 - 2) \right) dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_3 = & \left(\overline{C}_1 u_x + \frac{A_1 \sqrt{d_2 (A_1^2 + \overline{C}_1^2) (-2 d_2 \eta^2 + A_1^2 + \overline{C}_1^2)}}{\sqrt{2} d_2 (A_1^2 + \overline{C}_1^2)} \right) dx \\
& + \left(A_1 \sqrt{2} (A_1^2 u^2 + \overline{C}_1^2 u^2 - 2) \sqrt{d_2 (A_1^2 + \overline{C}_1^2) (-2 d_2 \eta^2 + A_1^2 + \overline{C}_1^2)} \right. \\
& \left. + 2 d_2 u (A_1^2 + \overline{C}_1^2) (A_1^2 \overline{C}_1 u u_x + \overline{C}_1^3 u u_x + 2 A_1 \eta) \right) \frac{1}{2 (A_1^2 + \overline{C}_1^2)^2} dt
\end{aligned}$$

En el apéndice A, mostramos el código en Maple que se usó para encontrar las 1-formas diferenciales de los teoremas 2.1 y 2.2.

2.4. Cálculo de Inmersiones

En esta sección revisaremos el teorema de Bonnet, que nos dice que si la primera forma fundamental (I) y segunda forma fundamental (II) son conocidas (o equivalentemente si tenemos las 1-formas $w_1, w_2, w_{12}, w_{13}, w_{23}$ y se satisfacen las ecuaciones de estructura (1.14)), entonces existe una inmersión local de la superficie en \mathbb{R}^3 .

El siguiente teorema explica bajo qué condiciones existe una inmersión de una superficie en \mathbb{R}^3 .

Teorema 2.3. *(de Bonnet)*

Las 1-formas diferenciales en dos variables $w_1, w_2, w_{12}, w_{13}, w_{23}$ determinan una superficie local salvo movimiento euclideo si y solo si $w_1 \wedge w_2 \neq 0$ y se satisfacen las ecuaciones de estructura (1.14).

La demostración de este teorema está en el libro [Gug77] (sección 10-3), una demostración sin usar 1-formas diferenciales está en [Ca76D].

Existe una manera alternativa para encontrar inmersiones, usando esta observación:

Observación 2.1. *Si tenemos una superficie S con primera forma fundamental $I = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$, podemos buscar una inmersión $\Phi(u, v) = (\Phi_1(u, v), \Phi_2(u, v), \Phi_3(u, v))$ tal que $\Phi^*(ds^2) = I$, donde $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$. Tenemos*

$$\begin{aligned} \Phi^*(ds^2) &= \Phi^*(dx^2 + dy^2 + dz^2) \\ &= d\Phi_1^2 + d\Phi_2^2 + d\Phi_3^2 \\ &= (\Phi_{1,u}du + \Phi_{1,v}dv)^2 + (\Phi_{2,u}du + \Phi_{2,v}dv)^2 + (\Phi_{3,u}du + \Phi_{3,v}dv)^2 \\ &= (\Phi_{1,u}^2 + \Phi_{2,u}^2 + \Phi_{3,u}^2)du^2 + \\ &\quad 2(\Phi_{1,u}\Phi_{1,v} + \Phi_{2,u}\Phi_{2,v} + \Phi_{3,u}\Phi_{3,v})dudv + (\Phi_{1,v}^2 + \Phi_{2,v}^2 + \Phi_{3,v}^2)dv^2 \end{aligned}$$

y si $\Phi^*(ds^2) = I$, entonces tenemos que Φ está determinada por el sistema de EDP

$$\begin{aligned} \Phi_{1,u}^2 + \Phi_{2,u}^2 + \Phi_{3,u}^2 &= E \\ \Phi_{1,u}\Phi_{1,v} + \Phi_{2,u}\Phi_{2,v} + \Phi_{3,u}\Phi_{3,v} &= F \\ \Phi_{1,v}^2 + \Phi_{2,v}^2 + \Phi_{3,v}^2 &= G \end{aligned} \tag{2.57}$$

Esta forma de encontrar inmersiones no toma en cuenta la segunda forma fundamental. Esta observación es la primera parte del teorema de Cartan-Janet [IvLand03].

Para algunas ecuaciones de tipo pseudo-esférico existen inmersiones explícitas, para otras no. Se puede estudiar y analizar cómo construir inmersiones partiendo de las funciones f_{i1} y f_{i2} de $w_i = f_{i1}dx + f_{i2}dt$ con $i = 1, 2, 3$. Ver [CD17]. Recordemos que las funciones f_{ij} dependen de x, t, u y un número finito de derivadas de u . Si podemos encontrar 1-formas w_{13} y w_{23} que dependen de x, t, u y a lo más un número finito de derivadas de u , diremos que existe una inmersión isométrica de “orden finito”. Por ejemplo ver [CD22].

Como ejemplo de esta teoría consideremos la ecuación de Sine-Gordon $z_{yt} = \sin z$ y la ecuación de corto pulso $u_{x\tau} = u + \frac{(u^3)_{xx}}{6}$. En la proposición 2.3 encontramos una transformación T que nos lleva de (y, t, z) a (x, τ, u) , dada por

$$\begin{aligned} u &= z_t \\ dx &= \cos z dy - \frac{z_t^2}{2} dt \\ \tau &= t \\ u_x &= \tan z \\ u_\tau &= z_{tt} + \frac{z_t^2}{2} \tan z \\ u_{xx} &= z_y \sec^3 z \\ u_{x\tau} &= z_t \sec^2 z + z_y \frac{z_t^2}{2} \sec^3 z \end{aligned}$$

Usaremos esta transformación para encontrar 1-formas asociadas a la ecuación de corto pulso a partir de las 1-formas asociadas a la ecuación de Sine-Gordon $z_{yt} = \sin z$. Recordemos que estas 1-formas son :

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{1}{\eta} \operatorname{sen}(z) dt, & w_2 &= \eta dy + \frac{1}{\eta} \operatorname{cos}(z) dt, & w_3 &= z_y dy, \\ w_{13} &= -\eta dy + \frac{1}{\eta} \operatorname{cos}(z) dt, & w_{23} &= -w_1 \end{aligned}$$

Necesitamos encontrar la inversa de $T : (y, t, z) \rightarrow (x, \tau, u)$.

como $u_x = \tan z \Rightarrow z = \arctan u_x$

de $dx = \cos z dy - \frac{z_t^2}{2} dt$ y $d\tau = dt$, encontramos dy

$$\begin{aligned} dy &= \frac{1}{\cos \arctan u_x} \left(dx + \frac{u^2}{2} d\tau \right) \\ &= \sqrt{1 + u_x^2} \left(dx + \frac{u^2}{2} d\tau \right) \end{aligned}$$

de $u_{xx} = z_y \sec^3 z \Rightarrow z_y = u_{xx} \cos^3 z = \frac{u_{xx}}{\sqrt{1 + u_x^2}}$ y $z_t = u$

Calculamos 1-formas $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_{13}$ y σ_{23} asociadas a la ecuación de corto pulso usando el pullback de T^{-1} . Entonces

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= (T^{-1})^*(w_1) \\ &= (T^{-1})^*\left(\frac{1}{\eta} \operatorname{sen}(z) dt\right) \\ &= \frac{1}{\eta} \operatorname{sen}(\arctan u_x) d\tau \\ &= \frac{u_x}{\eta \sqrt{1 + u_x^2}} d\tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_2 &= (T^{-1})^*(w_2) \\ &= (T^{-1})^*\left(\eta dy + \frac{1}{\eta} \cos(z) dt\right) \\ &= \eta(\sqrt{1 + u_x^2}) \left(dx + \frac{u^2}{2} d\tau\right) + \frac{1}{\eta} \cos(\arctan u_x) d\tau \\ &= \eta \sqrt{1 + u_x^2} dx + \left(\eta \sqrt{1 + u_x^2} \frac{u^2}{2} + \frac{1}{\eta \sqrt{1 + u_x^2}}\right) d\tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_3 &= (T^{-1})^*(w_3) \\
&= (T^{-1})^*(z_y dy) \\
&= \frac{u_{xx}}{\sqrt{1+u_x^2}} \cdot \sqrt{1+u_x^2} \left(dx + \frac{u^2}{2} d\tau\right) \\
&= \frac{u_{xx}}{1+u_x^2} dx + \frac{u_{xx} u^2}{2(1+u_x^2)} d\tau
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{13} &= (T^{-1})^*(w_{13}) \\
&= (T^{-1})^*\left(-\eta dy + \frac{1}{\eta} \cos(z) dt\right) \\
&= -\eta \sqrt{1+u_x^2} \left(dx + \frac{u^2}{2} d\tau\right) + \frac{1}{\eta \sqrt{1+u_x^2}} d\tau \\
&= -\eta \sqrt{1+u_x^2} dx + \left(-\eta \sqrt{1+u_x^2} \frac{u^2}{2} + \frac{1}{\eta \sqrt{1+u_x^2}}\right) d\tau
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{23} &= (T^{-1})^*(w_{23}) \\
&= (T^{-1})^*(-w_1) \\
&= -\frac{u_x}{\eta \sqrt{1+u_x^2}} d\tau = -\sigma_1
\end{aligned}$$

Entonces para la ecuación de corto pulso $u_{xt} = u + \frac{(u^3)_{xx}}{6}$ equipada con las 1-formas σ_1 , σ_2 y σ_3 , se satisfacen las ecuaciones (2.1), es decir $u_{xt} = u + \frac{(u^3)_{xx}}{6}$ describe superficies pseudo-esféricas con 1-formas asociadas σ_1 , σ_2 y σ_3 . Mostraremos la comprobación de la primera ecuación de (2.1).

$$\begin{aligned}
d\sigma_1 &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u_x}{\eta\sqrt{1+u_x^2}} \right) dx \wedge d\tau \\
&= \frac{u_{xx}\sqrt{1+u_x^2} - u_x^2 u_{xx} \sqrt{1+u_x^2}^{-1}}{\eta(1+u_x^2)} dx \wedge d\tau \\
&= \frac{u_{xx}}{\eta\sqrt{1+u_x^2}^3} dx \wedge d\tau
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_3 \wedge \sigma_2 &= \frac{u_{xx}}{1+u_x^2} \left(\frac{\eta u^2}{2} \sqrt{1+u_x^2} + \frac{1}{\eta\sqrt{1+u_x^2}} \right) dx \wedge d\tau + \frac{u^2 u_{xx}}{2(1+u_x^2)} \cdot \eta\sqrt{1+u_x^2} d\tau \wedge dx \\
&= \frac{u_{xx}}{\eta\sqrt{1+u_x^2}^3} dx \wedge d\tau
\end{aligned}$$

Por lo que se cumple $d\sigma_1 = \sigma_3 \wedge \sigma_2$. También las 1-formas σ_1 , σ_2 , σ_3 , σ_{13} y σ_{23} , con $\sigma_3 := \sigma_{12}$ satisfacen las ecuaciones de estructura (1.14) de la proposición 1.3 (ecuaciones de estructura para una superficie en \mathbb{R}^3) y también la ecuación $d\sigma_3 = \sigma_1 \wedge \sigma_2$ que nos dice que la curvatura gaussiana es -1 .

Esta derivación de 1-formas para la ecuación de corto pulso es distinta a la expuesta en [CD22]. Notemos que estas 1-formas nos garantizan que existe una inmersión (teorema de Bonnet) de orden finito.

Como $u_{xt} = u + \frac{(u^3)_{xx}}{6}$ es ecuación de tipo pseudo-esférico, verifiquemos que la curvatura gaussiana K vale -1 usando la proposición 1.4 (de la sección 1.1).

σ_{13} lo podemos expresar como

$$\sigma_{13} = a\sigma_1 + b\sigma_2 = b\eta\sqrt{1+u_x^2} dx + \left[a \frac{u_x}{\eta\sqrt{1+u_x^2}} + b \left(\frac{\eta u^2 \sqrt{1+u_x^2}}{2} + \frac{1}{\eta\sqrt{1+u_x^2}} \right) \right] d\tau$$

comparando con el σ_{13} que acabamos de encontrar, nos da que $b = -1$ y $a = \frac{2}{u_x}$.

También $\sigma_{23} = b\sigma_1 + c\sigma_2$ y como obtuvimos $\sigma_{23} = -\sigma_1$ entonces $c = 0$. Luego

$$K = ac - b^2 = -1$$

Ecuaciones de Rosenau y Hyman

La ecuación de Rosenau y Hyman (RH) es

$$\frac{\partial}{\partial t}u + \frac{\partial}{\partial x}u^m + \frac{\partial}{\partial xxx}u^n = 0 \quad (3.1)$$

Esta ecuación con $n = 1$ y $m = 2$ o $m = 3$ describe solitones que son ondas viajeras solitarias que después de chocar con otro solitón eventualmente sale ileso, efectivamente los solitones son soluciones de ecuaciones diferenciales parciales que modelan fenómenos como ondas de agua. Como las ondas solitarias tienen colas infinitas, se busca modelos de ecuaciones diferenciales que generen ondas solitarias de duración finita [Ro05]. Rosenau y Hyman probaron en 1993 que la ecuación (3.1) con $n = m = 2$ admite ondas solitarias con soporte compacto. Un resumen de su trabajo aparece en [Ro05]. En este capítulo (basado parcialmente en el artículo [BeReDiEDiJ24]) consideramos el contenido geométrico de las ecuaciones integrables de tipo (3.1).

Para la ecuación (3.1) hacemos la transformación $x \rightarrow -x$, $t \rightarrow \frac{t}{n}$ y obtenemos

$$u_t = \frac{1}{n} \frac{\partial}{\partial xxx}u^n + \frac{1}{n} \frac{\partial}{\partial x}u^m \quad (3.2)$$

Los casos de integrabilidad¹ de familia de ecuaciones Rosenau y Hyman los mencionamos en el siguiente teorema [HerRe20].

Teorema 3.1. *Para la ecuación (3.2), los casos integrables son los siguientes :*

¹Decimos que una ecuación $u_t = F(u, u_x, \dots)$ es integrable si existe una cantidad infinita de ecuaciones $u_{t_i} = F_i$ que conmutan con la ecuación dada. Es decir el digrama siguiente conmuta:

Con $n = 1$ y $m = 0, 1, 2, 3$ corresponden respectivamente a las ecuaciones ($n = 1$ y $m = 0, 1$ corresponde a (3.3))

$$u_t = u_{xxx} + \alpha u_x + \beta \quad (3.3)$$

$$u_t = u_{xxx} + 2uu_x \quad (3.4)$$

$$u_t = u_{xxx} + 3u^2u_x \quad (3.5)$$

Con $n = -2$ y $m = -2, -1, 0, 1$ corresponden respectivamente a las ecuaciones

$$u_t = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u_x}{u^3} \right) - \frac{1}{2u^2} \right] \quad (3.6)$$

$$u_t = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u_x}{u^3} \right) - \frac{1}{2u} \right] \quad (3.7)$$

$$u_t = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial xxx} u^{-2} \quad (3.8)$$

$$u_t = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u_x}{u^3} \right) - \frac{u}{2} \right] \quad (3.9)$$

Con $n = -\frac{1}{2}$ y $m = \frac{3}{2}, 1, 0, -\frac{1}{2}$ corresponden respectivamente a las ecuaciones

$$u_t = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u_x}{u^{\frac{3}{2}}} \right) - 2u^{\frac{3}{2}} \right] \quad (3.10)$$

$$\begin{array}{ccccc}
 & & u_{t_i} = F_i & & \\
 & & \rightarrow & & \\
 u_t = F & \begin{array}{c} u(x, t) \\ \uparrow \\ u(x, 0) \end{array} & & \begin{array}{c} u(x, t, t_i) \\ \uparrow \\ u(x, t_i) \end{array} & u_t = F \\
 & & \rightarrow & & \\
 & & u_{t_i} = F_i & &
 \end{array}$$

El lector puede ver la formalización de este concepto en el artículo [HerRe20].

$$u_t = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u_x}{u^{\frac{3}{2}}} \right) - 2u \right] \quad (3.11)$$

$$u_t = \frac{\partial}{\partial xx} \left[\frac{u_x}{u^{\frac{3}{2}}} \right] \quad (3.12)$$

$$u_t = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u_x}{u^{\frac{3}{2}}} \right) - \frac{2}{\sqrt{u}} \right] \quad (3.13)$$

Vamos a probar que todas las ecuaciones de este teorema son de tipo pseudo-esférico. Como ya se sabe que las ecuaciones (3.3), (3.4) y (3.5) describen superficies pseudo-esféricas [TenCher86], no las consideraremos.

Supongamos que tenemos una ecuación diferencial parcial de la forma

$$u_t = F(u, u_x, u_{xx}, u_{xxx}) \quad (3.14)$$

en que $u := u(x, t)$ es solución de (3.14). Introducimos las notaciones

$$z_0 = u, \quad z_1 = u_x, \quad z_2 = u_{xx}, \quad z_3 = u_{xxx}$$

Entonces (3.14) queda

$$z_{0,t} = F(z_0, z_1, z_2, z_3) \quad (3.15)$$

Asumamos que la ecuación (3.15) la podemos equipar con 1-formas diferenciales $w_i = f_{i1}dx + f_{i2}dt$, con $i = 1, 2, 3$, de modo que la ecuación describa superficies pseudo-esféricas. El siguiente lema da condiciones necesarias sobre las funciones f_{i1} y f_{i2} [TenCher86].

De los ejemplos de ecuaciones pseudo-esféricas de la sección 2.1 podemos notar que f_{21} es constante, por lo que asignamos $f_{21} = \eta \in \mathbb{R}$.

Lema 3.1. *Consideremos la ecuación (3.15), la cual describe superficies pseudo-esféricas con 1-formas asociadas $w_i = f_{i1}dx + f_{i2}dt$, con $i = 1, 2, 3$ y $f_{21} = \eta$. Si f_{ij} son funciones diferenciables de z_0, z_1, z_2, z_3 , entonces*

$$\begin{aligned}
f_{11,z_i} = f_{31,z_i} = 0, 1 \leq i \leq 3 \\
f_{12,z_3} = f_{22,z_3} = f_{32,z_3} = 0 \\
f_{22,z_2} = 0 \\
f_{11,z_0}^2 + f_{31,z_0}^2 \neq 0
\end{aligned} \tag{3.16}$$

$$\begin{aligned}
-Ff_{11,z_0} + \sum_{i=0}^2 z_{i+1}f_{12,z_i} + \eta f_{32} - f_{22}f_{31} = 0 \\
\sum_{i=0}^1 z_{i+1}f_{22,z_i} + f_{12}f_{31} - f_{11}f_{32} = 0 \\
-Ff_{31,z_0} + \sum_{i=0}^2 z_{i+1}f_{32,z_i} + \eta f_{12} - f_{22}f_{11} = 0
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Demostración. Tenemos las relaciones

$$\begin{aligned}
dz_i \wedge dt &= (z_{i,x}dx + z_{i,t}dt) \wedge dt \\
&= z_{i,x}dx \wedge dt \\
&= z_{i+1}dx \wedge dt
\end{aligned}$$

con $0 \leq i \leq 2$

$$\begin{aligned}
dz_0 \wedge dx &= z_{0,t}dt \wedge dx \\
&= -Fdx \wedge dt
\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}
dw_1 - w_3 \wedge w_2 &= (f_{11,z_0} dz_0 + f_{11,z_1} dz_1 + f_{11,z_2} dz_2 + f_{11,z_3} dz_3) \wedge dx \\
&\quad + (f_{12,z_0} dz_0 + f_{12,z_1} dz_1 + f_{12,z_2} dz_2 + f_{12,z_3} dz_3) \wedge dt \\
&\quad - (f_{31} dx + f_{32} dt) \wedge (\eta dx + f_{22} dt) \\
&= f_{11,z_0} dz_0 \wedge dx + \sum_{i=1}^3 f_{11,z_i} dz_i \wedge dx + \sum_{i=0}^2 f_{12,z_i} dz_i \wedge dt + f_{12,z_3} dz_3 \wedge dt \\
&\quad - (f_{31} f_{22} - \eta f_{32}) dx \wedge dt \\
&= -F f_{11,z_0} dx \wedge dt + \sum_{i=1}^3 f_{11,z_i} dz_i \wedge dx + \sum_{i=0}^2 f_{12,z_i} z_{i+1} dx \wedge dt + f_{12,z_3} dz_3 \wedge dt \\
&\quad - (f_{31} f_{22} - \eta f_{32}) dx \wedge dt \\
&= (-F f_{11,z_0} + \sum_{i=0}^2 f_{12,z_i} z_{i+1} + \eta f_{32} - f_{31} f_{22}) dx \wedge dt + \sum_{i=1}^3 f_{11,z_i} dz_i \wedge dx \\
&\quad + f_{12,z_3} dz_3 \wedge dt
\end{aligned}$$

Como $dw_1 - w_3 \wedge w_2 = 0$, obtenemos la primera ecuación de (3.17) y que $f_{11,z_i} = 0$, $1 \leq i \leq 3$ y $f_{12,z_3} = 0$

Luego

$$\begin{aligned}
dw_2 - w_1 \wedge w_3 &= \sum_{i=0}^2 f_{22,z_i} dz_i \wedge dt + f_{22,z_3} dz_3 \wedge dt - (f_{11} f_{32} - f_{31} f_{12}) dx \wedge dt \\
&= \sum_{i=0}^2 f_{22,z_i} z_{i+1} dx \wedge dt + f_{22,z_3} dz_3 \wedge dt - (f_{11} f_{32} - f_{31} f_{12}) dx \wedge dt
\end{aligned}$$

Como $dw_2 - w_1 \wedge w_3 = 0$, obtenemos que $f_{22,z_3} = 0$ y también obtenemos una suma de expresiones que luego mostraremos que $f_{22,z_2} = 0$ y así la sumatoria es hasta 1, y entonces tendremos la segunda ecuación de (3.17).

Luego

$$\begin{aligned}
dw_3 - w_1 \wedge w_2 &= f_{31,z_0} dz_0 \wedge dx + \sum_{i=1}^3 f_{31,z_i} dz_i \wedge dx + \sum_{i=0}^2 f_{32,z_i} dz_i \wedge dt + f_{32,z_3} dz_3 \wedge dt \\
&\quad - (f_{11}f_{22} - \eta f_{22}) dx \wedge dt \\
&= -F f_{31,z_0} dx \wedge dt + \sum_{i=1}^3 f_{31,z_i} dz_i \wedge dx + \sum_{i=0}^2 f_{32,z_i} z_{i+1} dx \wedge dt + f_{32,z_3} dz_3 \wedge dt \\
&\quad - (f_{11}f_{22} - \eta f_{12}) dx \wedge dt
\end{aligned}$$

Como $dw_3 - w_1 \wedge w_2 = 0$, obtenemos la tercera ecuación de (3.17) y que $f_{31,z_i} = 0, 1 \leq i \leq 3$ y $f_{32,z_3} = 0$

Notemos que $f_{11}, f_{12}, f_{22}, f_{31}, f_{32}$ no dependen de z_3 , entonces

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^2 f_{22,z_i} \cdot z_{i+1} - f_{11}f_{32} + f_{31}f_{12} &= 0 / \frac{\partial}{\partial z_3} \\
\frac{\partial}{\partial z_3} \sum_{i=0}^2 f_{22,z_i} \cdot z_{i+1} &= 0 \\
f_{22,z_2} &= 0
\end{aligned}$$

Supongamos que $f_{11,z_0} = f_{31,z_0} = 0$, osea que f_{11} y f_{31} son constantes, entonces

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^2 z_{i+1} f_{12,z_i} + \eta f_{32} - f_{22} f_{31} &= 0 \\
\sum_{i=0}^2 z_{i+1} f_{32,z_i} + \eta f_{12} - f_{22} f_{11} &= 0
\end{aligned}$$

$\Rightarrow z_{0,t} = F(z_0, z_1, z_2, z_3)$ no es una condición necesaria ni suficiente para que w_1, w_2 y w_3 cumplan las ecuaciones de estructura (2.1) y esto nos lleva a una contradicción.

Entonces $f_{11,z_0} \neq 0$ o $f_{31,z_0} \neq 0 \Rightarrow f_{11,z_0}^2 + f_{31,z_0}^2 \neq 0$.

□

En este capítulo usaremos el lema 3.1 como base para construir 1-formas w_1 , w_2 y w_3 para las ecuaciones del teorema 3.1 y así determinamos que estas ecuaciones describen superficies pseudo-esféricas ($K = -1$).

Como las ecuaciones del teorema 3.1 son de la forma $u_t = F(u, u_x, u_{xx}, u_{xxx})$, entonces de acuerdo al lema 3.1, las 1-formas que construiremos, quedan dadas por

$$\begin{aligned} w_1 &= f_{11}(z_0) dx + f_{12}(z_0, z_1, z_2) dt \\ w_2 &= \eta dx + f_{22}(z_0, z_1) dt \\ w_3 &= f_{31}(z_0) dx + f_{32}(z_0, z_1, z_2) dt \end{aligned} \tag{3.18}$$

y estas deben satisfacer las ecuaciones

$$\begin{aligned} dw_1 - w_3 \wedge w_2 &= 0 \\ dw_2 - w_1 \wedge w_3 &= 0 \\ dw_3 - w_1 \wedge w_2 &= 0 \end{aligned} \tag{3.19}$$

(3.19) se cumple al evaluar en soluciones de $u_t = F(u, u_x, u_{xx}, u_{xxx})$.

De acuerdo a la primera y tercera ecuación de (3.17), notamos que si $f_{31} = \lambda f_{11}$ con $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$, al operar estas ecuaciones, podemos encontrar condiciones para f_{12} , f_{22} y f_{32} . Tenemos el siguiente corolario :

Corolario 3.0.1. *Sean f_{ij} son funciones diferenciables de z_0, z_1, z_2, z_3 con $i = 1, 2, 3$, $j = 1, 2$ y $f_{21} = \eta \in \mathbb{R}$. Supongamos que $f_{31} = \lambda f_{11}$ donde $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$. Si $z_{0,t} = F(z_0, z_1, z_2, z_3)$ describe superficies pseudo-esféricas con 1-formas asociadas $w_i = f_{i1}dx + f_{i2}dt$ entonces*

- (a) Si $\lambda^2 - 1 = 0$, entonces
 f_{22} es constante y $f_{12} = \lambda f_{32}$
- (b) Si $\lambda^2 - 1 \neq 0$ y $\eta \neq 0$, entonces

$$f_{22,z_1} = 0$$

$$f_{12} = -\frac{\lambda z_1 f_{22, z_0}}{f_{11}(\lambda^2 - 1)} + \frac{1}{\eta(\lambda^2 - 1)} \left[\sum_{i=0}^2 z_{i+1} \frac{\partial}{\partial z_i} \left(\frac{z_1 f_{22, z_0}}{f_{11}} \right) + f_{22} f_{11}(\lambda^2 - 1) \right] \quad (3.20)$$

$$f_{32} = \frac{\lambda}{\eta(\lambda^2 - 1)} \left[\sum_{i=0}^2 z_{i+1} \frac{\partial}{\partial z_i} \left(\frac{z_1 f_{22, z_0}}{f_{11}} \right) + f_{22} f_{11}(\lambda^2 - 1) \right] - \frac{z_1 f_{22, z_0}}{f_{11}(\lambda^2 - 1)} \quad (3.21)$$

Demostración. (a) Si $\lambda^2 - 1 = 0$

Como $z_{0,t} = F(z_0, z_1, z_2, z_3)$ describe superficies pseudo-esféricas con 1-formas asociadas w_i se cumple (3.17) del lema 3.1 y como $f_{31} = \lambda f_{11}$, se tiene

$$-F f_{11, z_0} + \sum_{i=0}^2 z_{i+1} f_{12, z_i} + \eta f_{32} - \lambda f_{22} f_{11} = 0 \quad (3.22)$$

$$\sum_{i=0}^1 z_{i+1} f_{22, z_i} + \lambda f_{12} f_{11} - f_{11} f_{32} = 0 \quad (3.23)$$

$$-\lambda F f_{11, z_0} + \sum_{i=0}^2 z_{i+1} f_{32, z_i} + \eta f_{12} - f_{22} f_{11} = 0 \quad (3.24)$$

Al hacer $\lambda \cdot (3.24) - (3.22)$, se tiene

$$\lambda \sum_{i=0}^2 z_{i+1} f_{32, z_i} - \sum_{i=0}^2 z_{i+1} f_{12, z_i} + \eta(\lambda f_{12} - f_{32}) = 0 \quad (3.25)$$

derivamos respecto a z_3 (recordemos que se cumple (3.16) del lema 3.1)

$$\begin{aligned} \lambda f_{32, z_2} - f_{12, z_2} &= 0 \\ \Rightarrow f_{12} &= \lambda f_{32} + h(z_0, z_1) \end{aligned}$$

Remplazamos en (3.25) y se tiene

$$\begin{aligned}
\lambda \sum_{i=0}^2 z_{i+1} f_{32, z_i} - \sum_{i=0}^2 z_{i+1} (\lambda f_{32, z_i} + h_{z_i}) + \eta (\lambda^2 f_{32} + \lambda h - f_{32}) &= 0 \\
-\sum_{i=0}^1 z_{i+1} h_{z_i} + \lambda \eta h &= 0 / \frac{\partial}{\partial z_2} \\
h_{z_1} &= 0
\end{aligned} \tag{3.26}$$

osea que $h := h(z_0)$, lo reemplazamos en la segunda ecuación de (3.26) y se tiene

$$\begin{aligned}
z_1 h_{z_0} + \lambda \eta h &= 0 / \frac{\partial}{\partial z_1} \\
h_{z_0} &= 0
\end{aligned} \tag{3.27}$$

osea que h es constante y si lo reemplazamos en la primera ecuación de (3.27) queda que $h = 0$. Por lo tanto $f_{12} = \lambda f_{32}$.

De (3.23) con $f_{12} = \lambda f_{32}$ se tiene

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^1 z_{i+1} f_{22, z_i} + f_{11} f_{32} (\lambda^2 - 1) &= 0 \\
\sum_{i=0}^1 z_{i+1} f_{22, z_i} &= 0 / \frac{\partial}{\partial z_2} \\
f_{22, z_1} &= 0
\end{aligned} \tag{3.28}$$

osea que $f_{22} := f_{22}(z_0)$, lo reemplazamos en la segunda ecuación de (3.28) y si derivamos respecto a z_1 se llega a que f_{22} es constante.

(b) Si $\lambda^2 - 1 \neq 0$ y $\eta \neq 0$

$\lambda \cdot$ (3.22) - (3.24):

$$\begin{aligned}
\lambda \sum_{i=0}^2 z_{i+1} f_{12, z_i} - \sum_{i=0}^2 z_{i+1} f_{32, z_i} + \eta (\lambda f_{32} - f_{12}) - (\lambda^2 - 1) f_{22} f_{11} &= 0 / \frac{\partial}{\partial z_3} \\
\lambda f_{12, z_2} - f_{32, z_2} &= 0
\end{aligned}$$

en (3.23)

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^1 z_{i+1} f_{22, z_i} + \lambda f_{12} f_{11} - f_{11} f_{32} &= 0 / \frac{\partial}{\partial z_2} \\
f_{22, z_1} + f_{11} (\lambda f_{12, z_2} - f_{32, z_2}) &= 0 \\
f_{22, z_1} &= 0
\end{aligned}$$

entonces $f_{22} := f_{22}(z_0)$. Luego de (3.23)

$$\lambda f_{12} - f_{32} = -\frac{z_1 f_{22, z_0}}{f_{11}} \quad (3.29)$$

De $\lambda \cdot$ (3.22) -(3.24), despejamos $\eta(\lambda f_{32} - f_{12})$:

$$\begin{aligned}
\eta(\lambda f_{32} - f_{12}) &= -\lambda \sum_{i=0}^2 z_{i+1} f_{12, z_i} + \sum_{i=0}^2 z_{i+1} f_{32, z_i} + f_{22} f_{11} (\lambda^2 - 1) \\
&= -\sum_{i=0}^2 z_{i+1} (\lambda f_{12, z_i} - f_{32, z_i}) + f_{22} f_{11} (\lambda^2 - 1) \\
&= \sum_{i=0}^2 z_{i+1} \frac{\partial}{\partial z_i} \left(\frac{z_1 f_{22, z_0}}{f_{11}} \right) + f_{22} f_{11} (\lambda^2 - 1)
\end{aligned}$$

entonces

$$\lambda^2 f_{32} - \lambda f_{12} = \frac{\lambda}{\eta} \left[\sum_{i=0}^2 z_{i+1} \frac{\partial}{\partial z_i} \left(\frac{z_1 f_{22, z_0}}{f_{11}} \right) + f_{22} f_{11} (\lambda^2 - 1) \right] \quad (3.30)$$

sumando (3.29) con (3.30) se obtiene f_{32} dado por (3.21), de (3.29) reemplazando lo que obtuvimos de f_{32} , encontramos que f_{12} está dado por (3.20).

□

El siguiente teorema es el resultado principal de este capítulo.

Teorema 3.2. Para la ecuaciones de RH del teorema 3.1 se tiene

1. La ecuación $u_t = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u_x}{u^3} \right) - \frac{1}{2u^2} \right]$ describe superficies pseudo-esféricas con 1-formas asociadas

$$\begin{aligned}\omega_1 &= u dx + \left(\frac{u_{xx}}{u^3} - \frac{3u_x^2}{u^4} + 1 \right) dt \\ \omega_2 &= \eta dx + \left(-\frac{\sqrt{\eta^2 + 1} u_x}{u^3} + \frac{\eta}{u} \right) dt \\ \omega_3 &= \sqrt{\eta^2 + 1} dx + \left(-\frac{\eta u_x}{u^3} + \frac{\sqrt{\eta^2 + 1}}{u} \right) dt.\end{aligned}$$

donde $\eta \in \mathbb{R}$.

2. La ecuación $u_t = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u_x}{u^3} \right) - \frac{1}{2u} \right]$ describe superficies pseudo-esféricas con 1-formas asociadas

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \frac{(3E_1^2 - u)}{3E_1} dx - \frac{(9E_1^4 u^2 - 9E_1^2 u^3 + 18E_1^2 u u_{xx} - 54E_1^2 u_x^2 + 2u^4)}{54E_1^3 u^4} dt \\ \omega_2 &= \eta dx - \frac{(3E_1^2 \eta u - 6\sqrt{E_1^2 + \eta^2} u_x E_1 - 2\eta u^2)}{18E_1^2 u^3} dt \\ \omega_3 &= \sqrt{E_1^2 + \eta^2} dx - \frac{(3\sqrt{E_1^2 + \eta^2} E_1^2 u - 6\eta u_x E_1 - 2\sqrt{E_1^2 + \eta^2} u^2)}{18E_1^2 u^3} dt.\end{aligned}$$

donde $\eta, E_1 \in \mathbb{R}$ con $E_1 \neq 0$.

3. La ecuación $u_t = -\frac{1}{2} \frac{\partial^3}{\partial x^3} [u^{-2}]$ describe superficies pseudo-esféricas con 1-formas

asociadas

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= (M_2 u + M_1) dx + \\
&\quad (M_2^3 - M_2 N_1^2 + \frac{M_1 M_2^2 - M_1 N_1^2}{u} + \frac{-N_1 k u_x + M_2 u_{xx}}{u^3} - \frac{3M_2 u_x^2}{u^4}) dt \\
\omega_2 &= k dx + (\frac{M_2^2 k - N_1^2 k}{u} + \frac{(M_1 N_1 - M_2 N_2) u_x}{u^3}) dt \\
\omega_3 &= (N_1 u + N_2) dx + \\
&\quad (M_2^2 N_1 - N_1^3 + \frac{-M_1 M_2 N_1 + M_2^2 N_2}{u} + \frac{-M_2 k u_x + N_1 u_{xx}}{u^3} - \frac{3N_1 u_x^2}{u^4}) dt
\end{aligned}$$

donde $k, M_1, M_2, N_1, N_2 \in \mathbb{R}$ y se cumple

$$-(M_1^2 + k^2) + N_2^2 = 0, \quad -M_1 M_2 + N_1 N_2 = 0.$$

4. La ecuación $u_t = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u_x}{u^3} \right) - \frac{1}{2} u \right]$ describe superficies pseudo-esféricas con 1-formas asociadas

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= u dx + \frac{(-u^5 + 2u^4 + 2u_{xx}u - 6u_x^2)}{2u^4} dt \\
\omega_2 &= \eta dx - \frac{\eta(u^3 - 2u^2 + 2u_x)}{2u^3} dt \\
\omega_3 &= \omega_2.
\end{aligned}$$

donde $\eta \neq 0$.

5. La ecuación $u_t = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u_x}{u^{\frac{3}{2}}} \right) - 2u^{\frac{3}{2}} \right]$ describe superficies pseudo-esféricas con 1-formas asociadas

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= \left(u + \sqrt{N_1^2 - \eta^2} \right) dx + \frac{(4N_1^2 u^2 - 4u^2 \eta^2 - 4u^4 + 2u u_{xx} - 3u_x^2)}{2u^{\frac{5}{2}}} dt \\
\omega_2 &= \eta dx - \frac{(-2\eta u \sqrt{N_1^2 - \eta^2} + 2\eta u^2 + N_1 u_x)}{u^{\frac{3}{2}}} dt \\
\omega_3 &= N_1 dx + \frac{(4N_1 u^2 \sqrt{N_1^2 - \eta^2} - 4N_1 u^3 - 2\eta u_x u)}{2u^{\frac{5}{2}}} dt.
\end{aligned}$$

donde $N_1, \eta \in \mathbb{R}$ y $N_1^2 \geq \eta^2$.

6. La ecuación $u_t = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u_x}{u^{\frac{3}{2}}} \right) - 2u \right]$ describe superficies pseudo-esféricas con 1-formas asociadas

$$\begin{aligned}\omega_1 &= M_2 u dx + \frac{\left(-4M_2 u^{\frac{7}{2}} - 4M_2^2 \eta u^3 - 2M_2 \eta u_x u + 2M_2 u_{xx} u - 3M_2 u_x^2 \right)}{2u^{\frac{5}{2}}} dt \\ \omega_2 &= \eta dx + \frac{\left(-2\eta u^{\frac{3}{2}} - 2u M_2 \eta^2 - M_2 \eta u_x \right)}{u^{\frac{3}{2}}} dt \\ \omega_3 &= (M_2 u + \eta) dx - \\ &\quad \frac{2 \left(\left(\eta^2 u^2 - \frac{u_{xx} u}{2} + \frac{3u_x^2}{4} + u^{\frac{7}{2}} \right) M_2 + \left(M_2^2 u^3 + u^{\frac{5}{2}} \right) \eta + \frac{M_2 \eta u u_x}{2} \right)}{u^{\frac{5}{2}}} dt .\end{aligned}$$

donde $M_2, \eta \in \mathbb{R}$, con $\eta \neq 0$.

7. La ecuación $u_t = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\frac{u_x}{u^{\frac{3}{2}}} \right]$ describe superficies pseudo-esféricas con 1-formas asociadas

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \left(\sqrt{N_1^2 - \eta^2} + N_3 u \right) dx + \\ &\quad \frac{1}{u^{\frac{5}{2}}} \left(2 \left(N_3^2 u^3 - N_1 N_3 u^2 \right) \sqrt{N_1^2 - \eta^2} + \right. \\ &\quad \left. 2 \left(-N_1 N_3 u^3 + (N_1^2 - \eta^2) u^2 + \frac{u u_{xx}}{2} - \frac{3u_x^2}{4} \right) N_3 - \eta N_3 u_x u \right) dt \\ \omega_2 &= \eta dx + \frac{\left(-2N_1 N_3 u \eta + 2\sqrt{N_1^2 - \eta^2} N_3 \eta u - N_1 N_3 u_x + N_3 \sqrt{N_1^2 - \eta^2} u_x \right)}{u^{\frac{3}{2}}} dt \\ \omega_3 &= (N_3 u + N_1) dx - \\ &\quad \frac{2}{u^{\frac{5}{2}}} \left(-u^2 N_3 (N_3 u + N_1) \sqrt{N_1^2 - \eta^2} + \frac{N_3 \eta u u_x}{2} + \right. \\ &\quad \left. N_3 \left(N_1 N_3 u^3 + N_1^2 u^2 - \frac{1}{2} u u_{xx} + \frac{3}{4} u_x^2 \right) \right) dt .\end{aligned}$$

donde $N_1, N_3, \eta \in \mathbb{R}$ y $N_1^2 \geq \eta^2$, con $\eta \neq 0$.

8. La ecuación $u_t = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u_x}{u^{\frac{3}{2}}} \right) - 2u^{\frac{1}{2}} \right]$ describe superficies pseudo-esféricas con

1-formas asociadas

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= (L_1 u + L_2) dx + \\
&\quad \frac{L_1}{2u^{\frac{5}{2}}} \left(4L_1 L_2 u^3 - 4L_1 \sqrt{L_2^2 + \eta^2 + 1} u^3 + \right. \\
&\quad \left. 4L_2^2 u^2 - 4L_2 \sqrt{L_2^2 + \eta^2 + 1} u^2 - 2\eta u u_x + 2u u_{xx} - 3u_x^2 \right) dt \\
\omega_2 &= \eta dx + \frac{2L_1 \left(L_2 - \sqrt{L_2^2 + \eta^2 + 1} \right) \left(\eta u + \frac{u_x}{2} \right)}{u^{\frac{3}{2}}} dt \\
\omega_3 &= \left(\sqrt{L_2^2 + \eta^2 + 1} + L_1 u \right) dx + \\
&\quad \frac{L_1}{2u^{\frac{5}{2}}} \left(4L_1 L_2 u^3 - 4L_1 \sqrt{L_2^2 + \eta^2 + 1} u^3 - 4L_2^2 u^2 + \right. \\
&\quad \left. 4L_2 \sqrt{L_2^2 + \eta^2 + 1} u^2 - 4\eta^2 u^2 - 2\eta u u_x - 4u^2 + 2u u_{xx} - 3u_x^2 \right) dt .
\end{aligned}$$

donde $L_1, L_2, \eta \in \mathbb{R}$.

Demostración. Esta demostración es de tipo interactiva, se utiliza Maple (versión 2021) para encontrar las 1-formas diferenciales asociadas a cada ecuación. Resumiremos la demostración para la ecuación 1: $u_t = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u_x}{u^3} \right) - \frac{1}{2u^2} \right]$, ya que para las demás ecuaciones el procedimiento es similar.

Como trabajamos con ecuaciones de la forma $u_t = F(u, u_x, u_{xx}, u_{xxx})$, en Maple hacemos las asignaciones

$$u[] := u, \quad u[2] := u_t, \quad u[1] := u_x, \quad u[1, 1] := u_{xx}, \quad u[1, 1, 1] := u_{xxx}$$

Se establece en Maple, los paquetes a utilizar:

```

restart;
with(PDEtools);
with(DifferentialGeometry);
with(JetCalculus);
with(LinearAlgebra);

```

se define la base $E \subset \mathbb{R}^3$ de variables x, t y u donde $u := u(x, t)$

```
DGsetup([x, t], [u], E, 3);
```

Se define la ecuación diferencial parcial (que corresponde a la ecuación 1 del teorema 4.1)

$$DE := DifferentialEquationData([u[2] = TotalDiff(TotalDiff(u[1]/u[]^3, x) - 1/(2*u[]^2), x)], [u[2]]);$$

Se define una transformación T_1 usando la ecuación anterior para evaluar las 1-formas que encontremos en soluciones

$$DE1 := Prolong(DE, 3);$$

$$T1 := Transformation(DE1);$$

Por ejemplo $u[2]$ se reemplaza por $TotalDiff(TotalDiff(u[1]/u[]^3, x) - 1/(2 * u[]^2), x)$

De acuerdo al lema 3.1, se definen las 1-formas diferenciales

$$omega1 := evalDG \left(F11(u[]) * Dx \textit{ plus } F12(u[], u[1], u[1, 1]) * Dt \right)$$

$$omega2 := evalDG \left(eta * Dx \textit{ plus } F22(u[], u[1]) * Dt \right)$$

$$omega3 := evalDG \left(F31(u[]) * Dx \textit{ plus } F32(u[], u[1], u[1, 1]) * Dt \right)$$

Nuestro problema es encontrar las funciones $F11(u[])$, $F12(u[], u[1], u[1, 1])$, $F22(u[], u[1])$, $F31(u[])$ y $F32(u[], u[1], u[1, 1])$. Planteamos las ecuaciones de estructura (2.1) de la forma

$$\begin{aligned}
 a_1 &= dw_1 - w_3 \wedge w_2 \\
 a_2 &= dw_2 - w_1 \wedge w_3 \\
 a_3 &= dw_3 - w_1 \wedge w_2
 \end{aligned}
 \tag{3.31}$$

$$a1 := evalDG \left(HorizontalExteriorDerivative(omega1) \text{ minus } (omega3 \text{ wedge } omega2) \right);$$

$$a2 := evalDG \left(HorizontalExteriorDerivative(omega2) \text{ minus } (omega1 \text{ wedge } omega3) \right);$$

$$a3 := evalDG \left(HorizontalExteriorDerivative(omega3) \text{ minus } (omega1 \text{ wedge } omega2) \right);$$

Ahora tenemos que calcular el pullback de la transformación T_1 aplicado a $a1$, $a2$ y $a3$.

$$S := [Dx \text{ wedge } Dt]$$

$$a11 := GetComponents(a1, S);$$

$$a22 := GetComponents(a2, S);$$

$$a33 := GetComponents(a3, S);$$

$$a111 := a11[1];$$

$$a222 := a22[1];$$

$$a333 := a33[1];$$

$$pa1 := simplify \left(Pullback(T1, a111) \right);$$

$$pa2 := simplify \left(Pullback(T1, a222) \right);$$

$$pa3 := simplify \left(Pullback(T1, a333) \right);$$

Para hallar las 1-formas w_1 , w_2 y w_3 de modo que la ecuación describa superficies pseudo-esféricas, se deben cumplir las ecuaciones de estructura (2.1), ósea que

$$a_1 = a_2 = a_3 = 0$$

entonces tenemos que encontrar funciones F_{ij} tal que

$$pa_1 = pa_2 = pa_3 = 0$$

A partir de $pa_1 = 0$ o $pa_2 = 0$ o $pa_3 = 0$ se deriva con respecto a la derivada de orden más grande, es decir por $\frac{\partial}{\partial u_{xxx}}$, esto nos da restricciones sobre las funciones F_{ij} . De ahí se vuelve a derivar por u_{xxx} o u_{xx} y se continúa así hasta hallar expresiones para las funciones F_{ij} . \square

Consideremos la ecuación 3 del teorema 3.2: $u_t = -\frac{1}{2} \frac{\partial^3}{\partial x^3} [u^{-2}]$, con sus respectivas 1-formas asociadas w_1 , w_2 y w_3 , donde $f_{11} = M_2u + M_1$, $f_{21} = k$, $f_{31} = N_1u + N_2$ donde se cumplen las condiciones $-(M_1^2 + k^2) + N_2^2 = 0$ y $-M_1M_2 + N_1N_2 = 0$. Nos preguntamos si las 1-formas que encontramos en el teorema 3.2 podrían venir del corolario 3.0.1. A continuación veremos que no es así.

Supongamos que $f_{31} = \lambda f_{11}$ con $\lambda \neq 0$ para aplicar el corolario 3.0.1, entonces de $f_{11} = M_2u + M_1$ y $f_{31} = N_1u + N_2$ obtenemos

$$\begin{aligned} N_1 &= \lambda M_2, & N_2 &= \lambda M_1 \\ \Rightarrow \frac{N_1}{M_2} &= \frac{N_2}{M_1} \end{aligned}$$

de $-M_1M_2 + N_1N_2 = 0 \Rightarrow -M_1 + \frac{N_1}{M_2}N_2 = 0$, como $\lambda = \frac{N_1}{M_2}$, entonces

$$\lambda = \frac{M_1}{N_2}$$

Como $\lambda = \frac{N_2}{M_1} \Rightarrow M_1^2 = N_2^2$. De $-(M_1^2 + k^2) + N_2^2 = 0$ se llega a $k = 0$ y esto implica que $w_2 = 0$ lo cual no sirve ya que w_2 es un elemento de la cobase, por lo tanto $f_{31} \neq \lambda f_{11}$ y entonces no se puede aplicar el corolario 3.0.1.

Superficies Inmersas en la Tres-Esfera S^3

En este capítulo introduciremos las ecuaciones de tipo Lund-Regge las cuales describen superficies inmersas en la tres-esfera S^3 , veremos ejemplos y probaremos unos teoremas de clasificación.

4.1. Ecuaciones de tipo Lund-Regge, definición y ejemplos

Definición 4.1. *Un sistema de ecuaciones diferenciales es de tipo Lund-Regge si sus soluciones genéricas describen superficies inmersas en S^3 .*

Esta definición viene del trabajo de Lund y Regge sobre generalizaciones de la ecuación de Sine-Gordon de interés para la física [Lu77] [Lu78]. Creemos que es una generalización interesante de las ecuaciones de tipo pseudo-esférico, este capítulo está parcialmente basado en el artículo [BeHiRe24].

Si tenemos una superficie S inmersa en S^3 , podemos tomar una cobase local $\{w_1, w_2\}$ y sus correspondientes formas de conexión w_{12}, w_{13} y w_{23} . Estas 1-formas satisfacen las

siguientes ecuaciones de estructura

$$\begin{aligned}
dw_1 &= w_{12} \wedge w_2 \\
dw_2 &= w_1 \wedge w_{12} \\
0 &= w_1 \wedge w_{13} + w_2 \wedge w_{23} \\
dw_{12} &= w_{23} \wedge w_{13} - w_1 \wedge w_2 \\
dw_{13} &= w_{12} \wedge w_{23} \\
dw_{23} &= w_{13} \wedge w_{12}
\end{aligned} \tag{4.1}$$

en que $w_{13} = aw_1 + bw_2$, $w_{23} = bw_1 + cw_2$, con a, b y c funciones diferenciables. Estas ecuaciones nos permiten encontrar la primera y segunda forma fundamental de la superficie S y por lo tanto podemos modelar inmersiones de superficies en S^3 .

La primera ecuación de tipo Lund-Regge que apareció en la literatura es [LR76]

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \theta}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial \sigma^2} - \cos(\theta) \sin(\theta) + \frac{\cos(\theta)}{\sin^3(\theta)} \left[\left(\frac{\partial \lambda}{\partial \tau} \right)^2 - \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \sigma} \right)^2 \right] &= 0 \\
\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\cot^2(\theta) \frac{\partial \lambda}{\partial \tau} \right) &= \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\cot^2(\theta) \frac{\partial \lambda}{\partial \sigma} \right)
\end{aligned} \tag{4.2}$$

donde $\theta := \theta(\sigma, \tau)$ y $\lambda := \lambda(\sigma, \tau)$. Notamos que estas ecuaciones generalizan la ecuación

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial \sigma^2} = \cos(\theta) \sin(\theta)$$

que se puede transformar en la ecuación de Sine-Gordon usando el cambio de coordenadas

$$x = \frac{\tau + \sigma}{2}, \quad t = \frac{\tau - \sigma}{2}$$

En efecto, tenemos $\theta := \theta(x, t) := \theta(x(\tau, \sigma), t(\tau, \sigma))$, entonces

$$\theta_\tau = \frac{\theta_x + \theta_t}{2}, \quad \theta_\sigma = \frac{\theta_x - \theta_t}{2}$$

$$\theta_{\tau\tau} = \frac{1}{4}(\theta_{xx} + \theta_{xt} + \theta_{tx} + \theta_{tt}), \quad \theta_{\sigma\sigma} = \frac{1}{4}(\theta_{xx} - \theta_{xt} - \theta_{tx} + \theta_{tt})$$

Luego

$$\begin{aligned}\theta_{\tau\tau} - \theta_{\sigma\sigma} &= \cos(\theta) \sin(\theta) \\ \Rightarrow \frac{1}{2}(\theta_{xt} + \theta_{tx}) &= \frac{\sin(2\theta)}{2} \\ &\Rightarrow 2\theta_{xt} = \sin(2\theta)\end{aligned}$$

Hacemos el cambio $\varphi = 2\theta$, lo que nos queda $\varphi_{xt} = \sin(\varphi)$.

Podemos ver que las cinco 1-formas diferenciales

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \cos \theta d\sigma, & \omega_2 &= \sin \theta d\tau, \\ \omega_{12} &= \theta_\tau d\sigma + \theta_\sigma d\tau, & \omega_{13} &= \frac{\lambda_\sigma}{\sin \theta} d\sigma + \frac{\lambda_\tau}{\sin \theta} d\tau, & \omega_{23} &= \frac{\lambda_\tau \cos \theta}{\sin^2 \theta} d\sigma + \frac{\lambda_\sigma \cos \theta}{\sin^2 \theta} d\tau\end{aligned}$$

satisfacen las ecuaciones de estructura (4.1) si y sólo si $\theta(\sigma, \tau)$ y $\lambda(\sigma, \tau)$ son solución de (4.2). La derivación de estas 1-formas está en [BeHR24].

La curvatura gaussiana K y curvatura media H de una superficie inmersa en S^3 , están dadas por [Ten98]

$$dw_{12} = -Kw_1 \wedge w_2 \tag{4.3}$$

$$w_1 \wedge w_{23} + w_{13} \wedge w_2 = 2Hw_1 \wedge w_2 \tag{4.4}$$

Notemos de la cuarta ecuación de (4.1)

$$\begin{aligned}dw_{12} &= w_{23} \wedge w_{13} - w_1 \wedge w_2 \\ &= (bw_1 + cw_2) \wedge (aw_1 + bw_2) - w_1 \wedge w_2 \\ &= (b^2 - ac - 1)w_1 \wedge w_2\end{aligned}$$

comparando con (4.3) se obtiene

$$K = ac - b^2 + 1$$

Esta fórmula para K difiere un poco de la que mostramos en la proposición 1.4 (de la sección 1.3), recordemos que en esa sección trabajamos en \mathbb{R}^3 y en esta sección en S^3 . Además, de (4.4) usando $w_{13} = aw_1 + bw_2$ y $w_{23} = bw_1 + cw_2$, se obtiene $H = \frac{a+c}{2}$, al igual que en la proposición 1.4.

Calculemos K y H usando (4.3) y (4.4). Para las 1-formas diferenciales descritas anteriormente, se tiene

$$\begin{aligned} dw_{12} &= (\theta_{\tau\sigma}d\sigma + \theta_{\tau\tau}d\tau) \wedge d\sigma + (\theta_{\sigma\sigma}d\sigma + \theta_{\sigma\tau}d\tau) \wedge d\tau \\ &= (\theta_{\sigma\sigma} - \theta_{\tau\tau})d\sigma \wedge d\tau \end{aligned}$$

$$w_1 \wedge w_2 = \cos(\theta) \sin(\theta) d\sigma \wedge d\tau$$

Entonces con la ecuación (4.3) nos queda

$$(\theta_{\sigma\sigma} - \theta_{\tau\tau})d\sigma \wedge d\tau = -K \cos(\theta) \sin(\theta) d\sigma \wedge d\tau$$

$$K = \frac{\theta_{\tau\tau} - \theta_{\sigma\sigma}}{\cos(\theta) \sin(\theta)} \quad (4.5)$$

usando la primera ecuación de (4.2) en (4.5), nos queda

$$K = 1 - \frac{\lambda_\tau^2 - \lambda_\sigma^2}{\sin^4(\theta)} \quad (4.6)$$

Por otra parte, tenemos:

$$\begin{aligned} w_1 \wedge w_{23} + w_{13} \wedge w_2 &= \cos(\theta) d\sigma \wedge \left(\frac{\lambda_\tau \cos \theta}{\sin^2 \theta} d\sigma + \frac{\lambda_\sigma \cos \theta}{\sin^2 \theta} d\tau \right) + \\ &\quad \left(\frac{\lambda_\sigma}{\sin \theta} d\sigma + \frac{\lambda_\tau}{\sin \theta} d\tau \right) \wedge \sin(\theta) d\tau \\ &= \lambda_\sigma \left(\frac{\cos^2(\theta)}{\sin^2(\theta)} + 1 \right) d\sigma \wedge d\tau \end{aligned}$$

$$w_1 \wedge w_2 = \cos(\theta) \sin(\theta) d\sigma \wedge d\tau$$

Entonces con la ecuación (4.4) nos queda

$$\lambda_\sigma \left(\frac{\cos^2(\theta)}{\sin^2(\theta)} + 1 \right) d\sigma \wedge d\tau = 2H \cos(\theta) \sin(\theta) d\sigma \wedge d\tau$$

$$H = \frac{\lambda_\sigma}{2 \cos(\theta) \sin^3(\theta)} \quad (4.7)$$

También podemos calcular K y H mediante las funciones a , b y c , como mostramos antes. Podemos expresar w_{13} y w_{23} de la siguiente manera

$$w_{13} = \frac{\lambda_\sigma}{\sin \theta} d\sigma + \frac{\lambda_\tau}{\sin \theta} d\tau = aw_1 + bw_2$$

$$= a \cos \theta d\sigma + b \sin \theta d\tau$$

$$\Rightarrow a = \frac{\lambda_\sigma}{\cos \theta \sin \theta}, \quad b = \frac{\lambda_\sigma}{\sin^2 \theta}$$

$$w_{23} = \frac{\lambda_\tau \cos \theta}{\sin^2 \theta} d\sigma + \frac{\lambda_\sigma \cos \theta}{\sin^2 \theta} d\tau = bw_1 + cw_2$$

$$= b \cos \theta d\sigma + c \sin \theta d\tau$$

$$\Rightarrow c = \frac{\lambda_\sigma \cos \theta}{\sin^3 \theta}$$

Entonces

$$K = ac - b^2 + 1 = 1 - \frac{\lambda_\tau^2 - \lambda_\sigma^2}{\sin^4(\theta)}$$

que coincide con (4.6). También

$$H = \frac{a + c}{2} = \frac{\lambda_\sigma}{2 \cos(\theta) \sin^3(\theta)}$$

que coincide con (4.7). Por lo tanto tenemos 2 maneras distintas para calcular K y H . En

los ejemplos siguientes calcularemos K y H solo usando (4.3) y (4.4).

Si λ no depende de τ y $H = 0$, entonces

$$\lambda_\sigma = 0 \Rightarrow \lambda = \text{const}$$

Al tener λ constante, la ecuación (4.2) se convierte en

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial \sigma^2} = \cos(\theta) \sin(\theta) \quad (4.8)$$

\therefore Esta ecuación describe superficies mínimas inmersas en S^3 con $K = 1$, o sea describe superficies esféricas en S^3 .

Sin embargo en [LR76] mencionan que la ecuación de Sine-Gordon corresponde a

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \sigma^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial \tau^2} = \cos(\theta) \sin(\theta) \quad (4.9)$$

De (4.8) a (4.9), se intercambian σ y τ , además al reemplazar (4.9) en (4.5) nos da $K = -1$.

A continuación presentamos otros ejemplos de ecuaciones de tipo Lund-Regge.

Ejemplo 4.1. *Sea la superficie con métrica riemanniana $ds^2 = q(x, y)dx^2 + p(x, y)dy^2$ en coordenadas ortogonales (x, y) , descrita por el sistema*

$$\begin{aligned} f(p, q) \frac{p}{q_y} (f_q q_y + f_p p_y) + pq + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p_x}{q} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{q_y}{p} \right) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p}{q_y} \frac{\partial f(q, p)}{\partial y} \right) - \frac{f(q, p) p_x}{q} &= 0 \end{aligned} \quad (4.10)$$

Si los coeficientes $q(x, y)$ y $p(x, y)$ cumplen (4.10), donde $f(q, p)$ es una función que depende de q y p , entonces (4.10) describe una superficie inmersa en S^3 , con 1-formas:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= q dx, & \omega_2 &= p dy, \\ \omega_{12} &= -\frac{q_y}{p} dx + \frac{p_x}{q} dy, & \omega_{13} &= f(q, p) dx, & \omega_{23} &= \frac{p}{q_y} \left(p_y \frac{\partial f(q, p)}{\partial p} + q_y \frac{\partial f(q, p)}{\partial q} \right) dy \end{aligned}$$

Mediante la ecuación (4.3) obtenemos que la curvatura gaussiana es

$$K = \frac{-1}{qp} \left(\frac{\partial}{\partial y} \frac{q_y}{p} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{p_x}{q} \right) \quad (4.11)$$

y con la ecuación (4.4) obtenemos que la curvatura media es

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{f}{q} + \frac{1}{q_y(p_y f_p + q_y f_q)} \right) \quad (4.12)$$

Si $f(q) = \frac{A}{q}$, con A constante se llega que $H = 0$, y reemplazando esta función en (4.10) se tiene

$$\begin{aligned} -A^2 p q^{-3} + p q + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p_x}{q} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{q_y}{p} \right) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} \frac{p}{q} &= 0 \end{aligned}$$

Entonces este sistema describe superficies mínimas inmersas en S^3 . Un caso especial interesante es cuando $p = q$.

En este caso obtenemos la ecuación

$$-A^2 p^{-2} + p^2 + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p_x}{p} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{p_y}{p} \right) = 0 \quad (4.13)$$

es decir

$$p^4 + p(p_{xx} + p_{yy}) - p_x^2 - p_y^2 = A^2 \quad (4.14)$$

y si calculamos K usando (4.11) junto a (4.13), nos queda

$$\begin{aligned} K &= \frac{-1}{p^2} \left(\frac{\partial}{\partial y} \frac{p_y}{p} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{p_x}{p} \right) \\ &= \frac{-1}{p^2} (A^2 p^{-2} - p^2) \\ &= 1 - \frac{A^2}{p^4} \end{aligned}$$

Notemos que $K < 0 \Leftrightarrow p \in (-\sqrt{A}, \sqrt{A})$ y $K > 0 \Leftrightarrow p \in (-\infty, -\sqrt{A}) \cup (\sqrt{A}, \infty)$.

La ecuación (4.14) no ha aparecido antes en la literatura. Presentamos gráficos de sus ondas viajeras para distintas condiciones iniciales que muestran que esta ecuación puede ser interesante de estudiar por si misma.

Si designamos $s = x + cy$ y $p(x, y) = f(x + cy)$, con $c \in \mathbb{R}$, entonces reemplazando $p(x, y) = f(s)$ en (4.14), obtenemos la ecuación de onda viajera, la cual es

$$f^4 + f(f'' + c^2 f'') - f'^2 - c^2 f' = A^2$$

Tomamos $c = 1$ y $A = 1$ y con condiciones iniciales $f(0)$ y $f'(0)$.

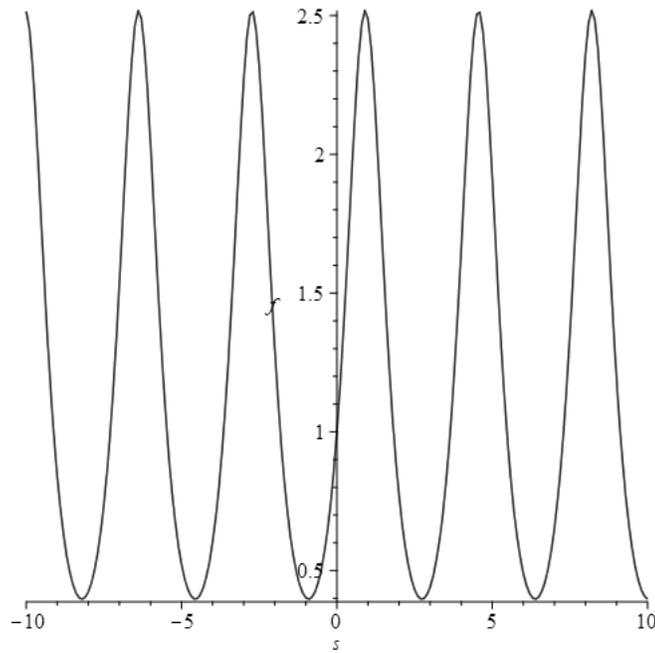


Figura 4.1: Onda viajera con $f(0) = 1$ y $f'(0) = 1,5$

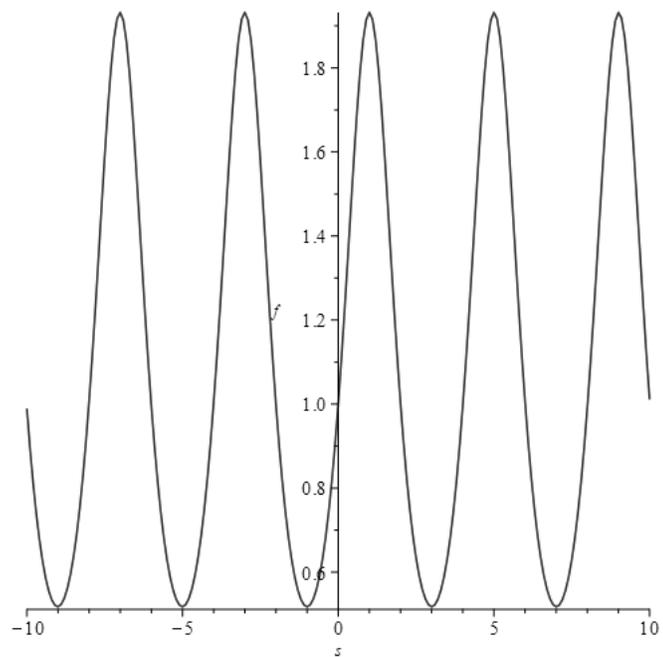


Figura 4.2: Onda viajera con $f(0) = 1$ y $f'(0) = 1$

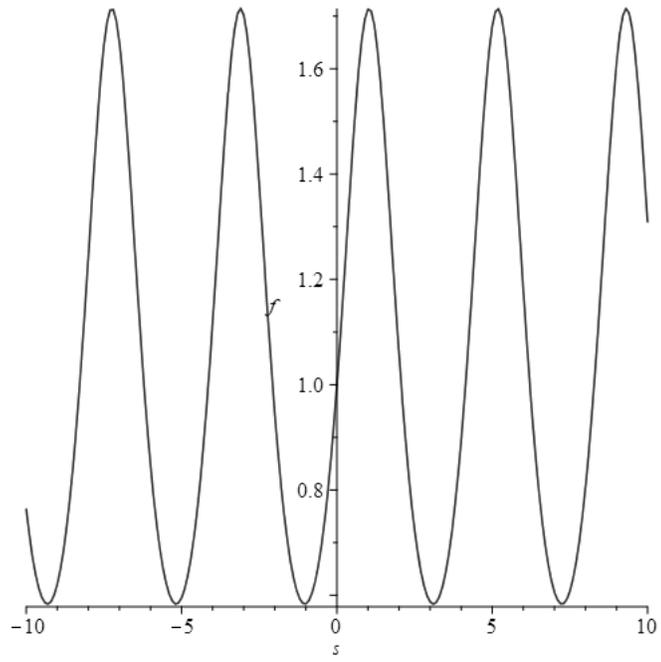


Figura 4.3: Onda viajera con $f(0) = 1$ y $f'(0) = 0,8$

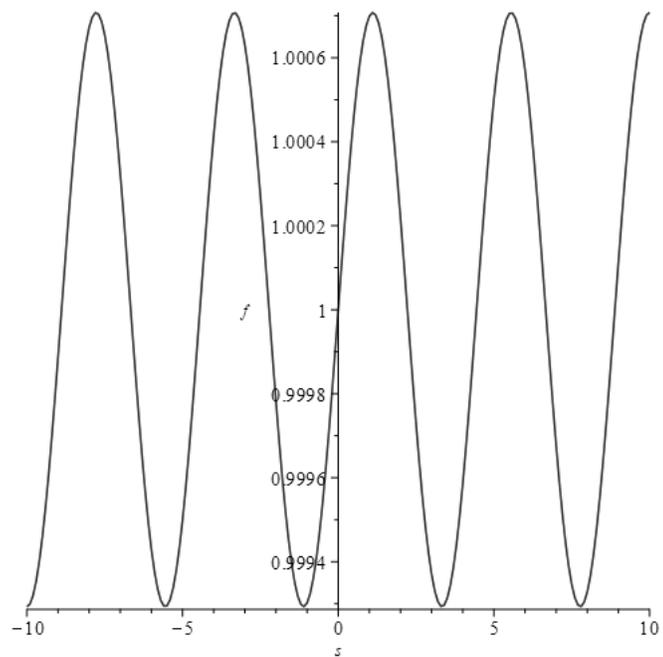


Figura 4.4: Onda viajera con $f(0) = 1$ y $f'(0) = \frac{1}{1000}$

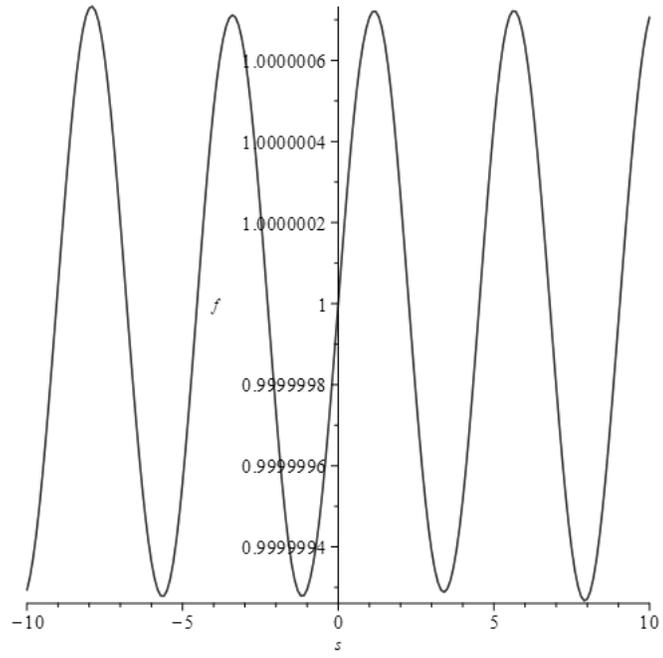


Figura 4.5: Onda viajera con $f(0) = 1$ y $f'(0) = \frac{1}{1000000}$

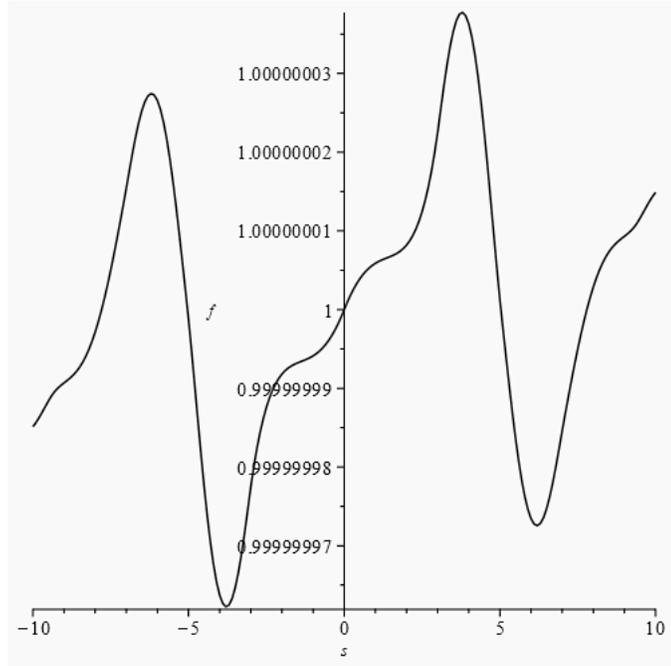


Figura 4.6: Onda viajera con $f(0) = 1$ y $f'(0) = \frac{1}{100000000}$

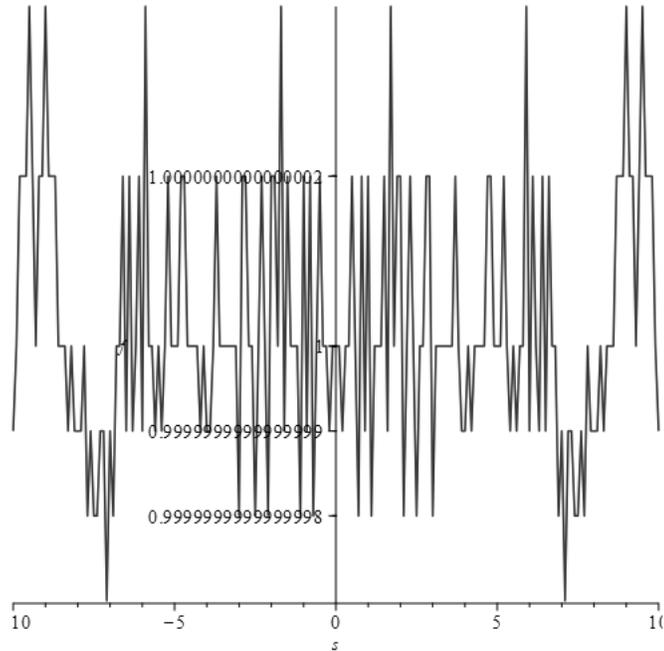


Figura 4.7: Onda viajera con $f(0) = 1$ y $f'(0) = 0$

El comportamiento que se muestran en estas figuras es muy distinto al que se ve en ecuaciones de tipo pseudo-esférico. Para comparar, presentamos gráficos de ondas viajeras de la ecuación Sine-Gordon $u_{xt} = \sin u$ y corto pulso $u_{xt} = u + \frac{(u^3)_{xx}}{6}$ para las mismas condiciones iniciales.

Si designamos $s = x + ct$ y $u(x, t) = f(x + ct)$, con $c \in \mathbb{R}$, entonces reemplazando $u(x, t) = f(s)$ en $u_{xt} = \sin u$, obtenemos la ecuación de onda viajera para Sine-Gordon, la cual es

$$c f'' = \sin f$$

Tomamos $c = 1$ y con condiciones iniciales $f(0)$ y $f'(0)$.

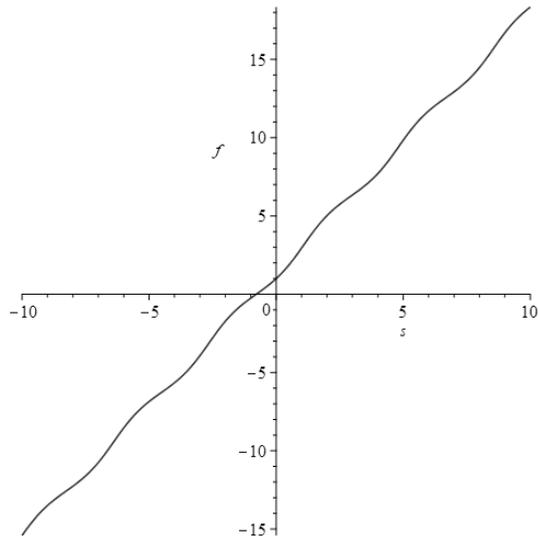


Figura 4.8: Onda viajera de Sine-Gordon con $f(0) = 1$ y $f'(0) = 1,5$, compare con (4.1)

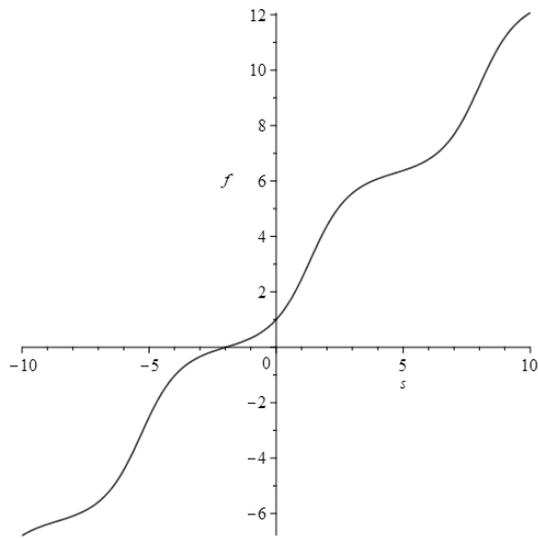


Figura 4.9: Onda viajera de Sine-Gordon con $f(0) = 1$ y $f'(0) = 1$, compare con (4.2)

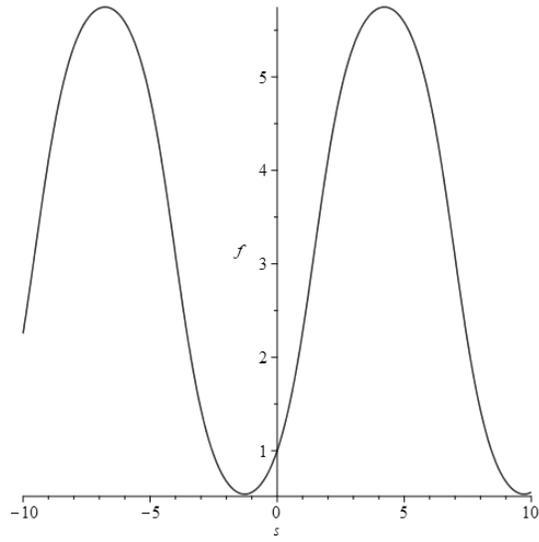


Figura 4.10: Onda viajera de Sine-Gordon con $f(0) = 1$ y $f'(0) = 0,8$, compare con (4.3)

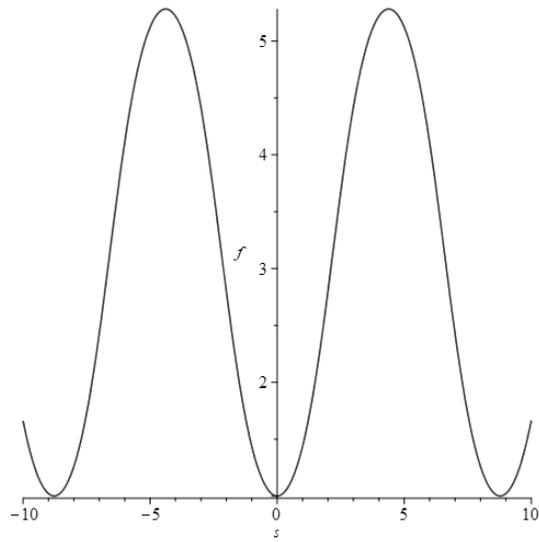


Figura 4.11: Onda viajera de Sine-Gordon con $f(0) = 1$ y $f'(0) = \frac{1}{1000}$, compare con (4.4)

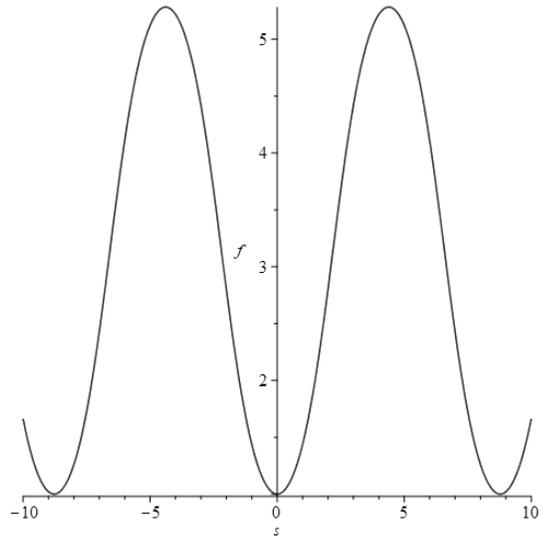


Figura 4.12: Onda viajera de Sine-Gordon con $f(0) = 1$ y $f'(0) = \frac{1}{1000000}$, compare con (4.5)

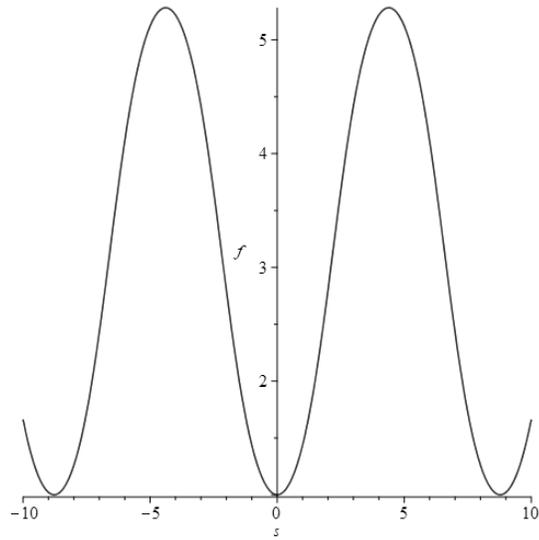


Figura 4.13: Onda viajera de Sine-Gordon con $f(0) = 1$ y $f'(0) = \frac{1}{100000000}$, compare con (4.6)

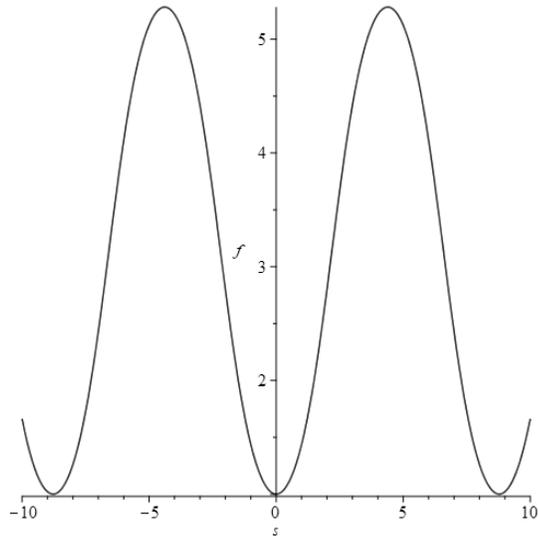


Figura 4.14: Onda viajera de Sine-Gordon con $f(0) = 1$ y $f'(0) = 0$, compare con (4.7)

De igual forma, si designamos $s = x + ct$ y $u(x, t) = f(x + ct)$, con $c \in \mathbb{R}$, entonces reemplazando $u(x, t) = f(s)$ en $u_{xt} = u + \frac{(u^3)_{xx}}{6}$, obtenemos la ecuación de onda viajera para Corto Pulso, la cual es

$$c f'' = f + \frac{(f^3)''}{6}$$

Tomamos $c = 1$ y con condiciones iniciales $f(0)$ y $f'(0)$.

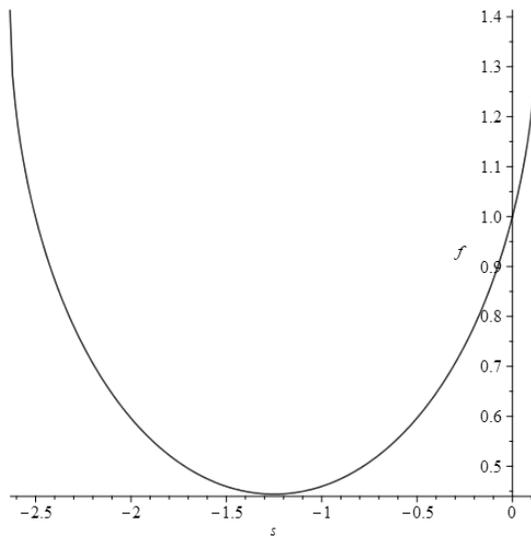


Figura 4.15: Onda viajera de Corto Pulso con $f(0) = 1$ y $f'(0) = 1,5$, compare con (4.1)

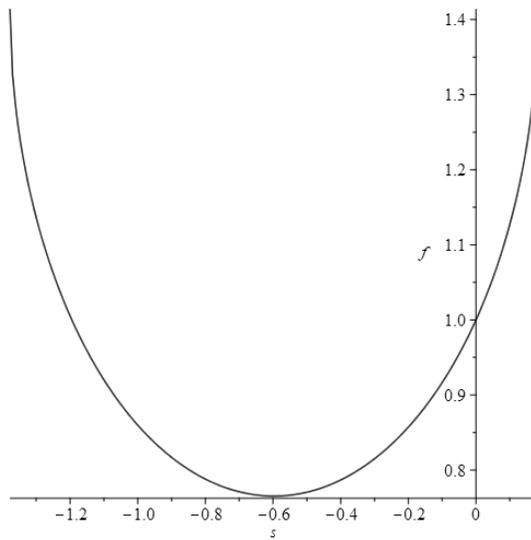


Figura 4.16: Onda viajera de Corto Pulso con $f(0) = 1$ y $f'(0) = 1$, compare con (4.2)

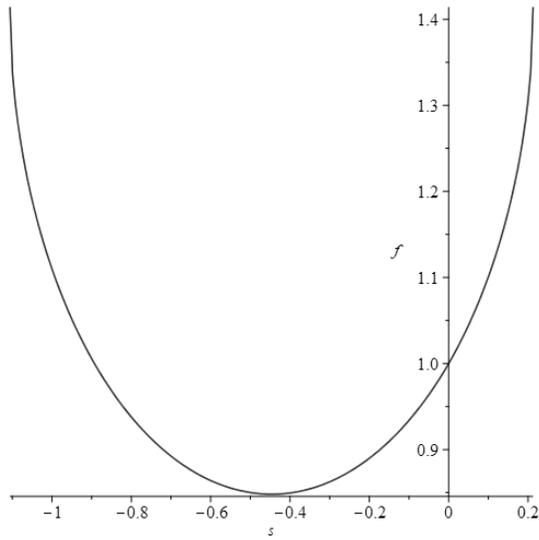


Figura 4.17: Onda viajera de Corto Pulso con $f(0) = 1$ y $f'(0) = 0,8$, compare con (4.3)

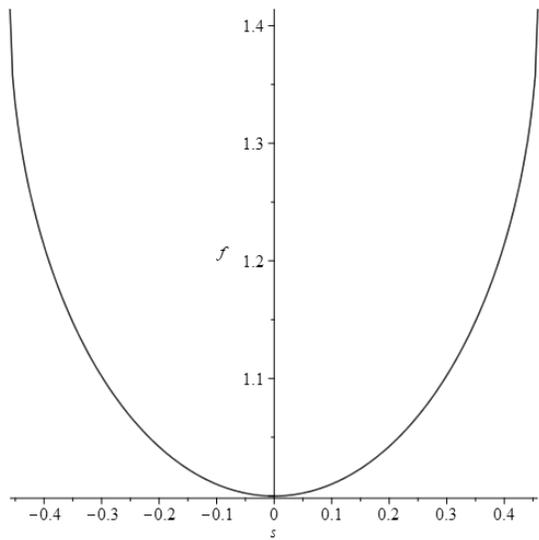


Figura 4.18: Onda viajera de Corto Pulso con $f(0) = 1$ y $f'(0) = \frac{1}{1000}$, compare con (4.4)

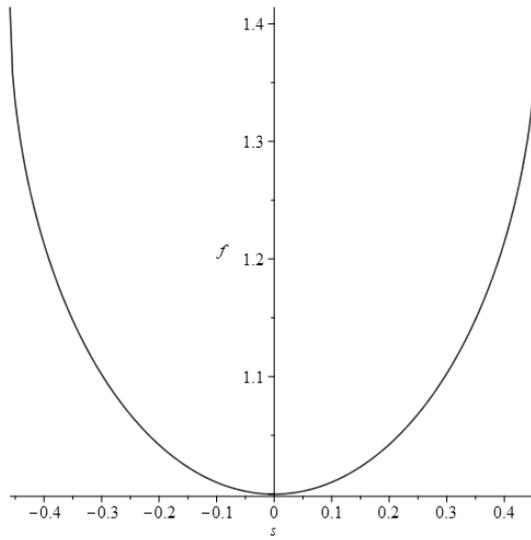


Figura 4.19: Onda viajera de Corto Pulso con $f(0) = 1$ y $f'(0) = \frac{1}{1000000}$, compare con (4.5)

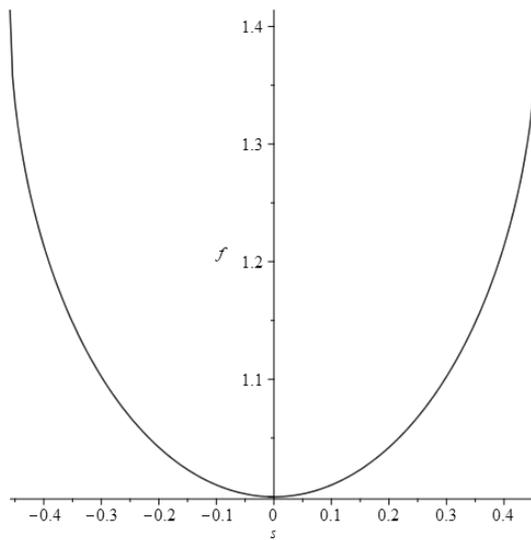


Figura 4.20: Onda viajera de Corto Pulso con $f(0) = 1$ y $f'(0) = \frac{1}{100000000}$, compare con (4.6)

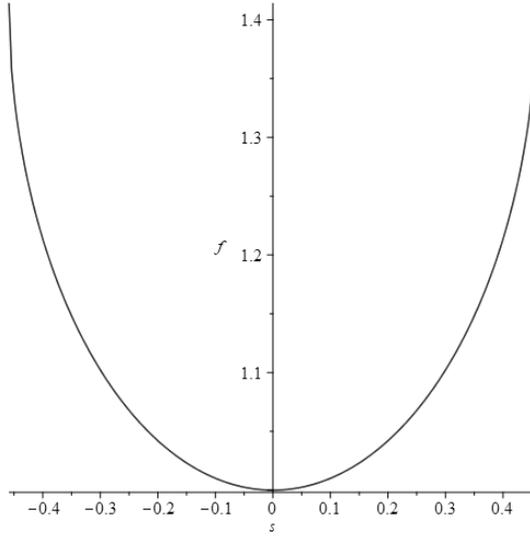


Figura 4.21: Onda viajera de Corto Pulso con $f(0) = 1$ y $f'(0) = 0$, compare con (4.7)

Ejemplo 4.2. *Sea*

$$\begin{aligned}
 q_t + 2rr_x &= 0 \\
 r_{xt} - 2qr - 4r\delta_x\delta_t &= 0 \\
 \delta_{xt}r + r_t\delta_x + r_x\delta_t &= 0
 \end{aligned}
 \tag{4.15}$$

Las cinco 1-formas diferenciales

$$\begin{aligned}
 \omega_1 &= -2r dt, & \omega_2 &= -2\lambda q dx + \frac{1}{\lambda} dt, \\
 \omega_{12} &= -2\lambda r_x dx, & \omega_{13} &= -2\delta_x dx - 2\delta_t dt, & \omega_{23} &= -4\lambda\delta_x r dx
 \end{aligned}$$

satisfacen las ecuaciones de estructura (4.1) si y sólo si $r(x, t)$, $q(x, t)$, $\delta(x, t)$ son soluciones del sistema (4.15). El sistema (4.15) es una generalización del sistema Konno-Onno, el cual corresponde a un sistema de de ecuaciones acopladas sin dispersión. La ecuación de Konno-Onno se estudió analíticamente en [KO94].

Notemos que $K = \frac{r_{xt}}{2rq}$ y $H = \delta_x \left(\frac{r}{q} + \frac{1}{4r\lambda^2q} + \frac{1}{2r} \right)$ (usando (4.3) y (4.4) respectivamente).

Si $\delta = cte$, entonces $H = 0$ y reemplazando en (4.15) se tiene

$$\begin{aligned} q_t + 2rr_x &= 0 \\ r_{xt} - 2qr &= 0 \end{aligned}$$

Entonces este sistema describe superficies mínimas inmersas en S^3 y a su vez corresponde al sistema Konno-Onno descrito anteriormente.

Además de la segunda ecuación tenemos que $K = \frac{r_{xt}}{2rq} = 1$, o sea este sistema describe superficies esféricas en S^3 .

Ejemplo 4.3. Sea

$$(\cot(\theta) + \theta)_{yy} + (\tan(\theta) - \theta)_{xx} + \frac{\epsilon^2 + 1}{\sin(\theta) \cos(\theta)} = 0 \quad (4.16)$$

en que $\theta := \theta(x, y)$. Las cinco 1-formas diferenciales

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \operatorname{cosec}(\theta) dx, & \omega_2 &= \sec(\theta) dy, \\ \omega_{12} &= \theta_y \cot^2(\theta) dx + \theta_x \tan^2(\theta) dy; , & \omega_{13} &= \epsilon \omega^1, & \omega_{23} &= \epsilon \omega^2 \end{aligned}$$

satisfacen las ecuaciones de estructura (4.1) si y sólo si $\theta(x, y)$ es solución de (4.16).

Notemos que $K = \epsilon^2 + 1$ y $H = \epsilon$ (usando (4.3) y (4.4) respectivamente). Si $\epsilon = 0$ entonces $H = 0$ y $K = 1$, entonces la ecuación (4.16) con $\epsilon = 0$ describe superficies mínimas inmersas en S^3 y también superficies esféricas en S^3 .

Además $K(p) > 0$, para cualquier punto p de la superficie, o sea que (4.16) equipada con ω_1, ω_2 y $\omega_3 := \omega_{12}$, nunca describirá superficie pseudo-esférica en \mathbb{R}^3 (ya que no existe p tal que $K(p) = -1$).

Una versión más precisa de la definición de ecuaciones de tipo Lund-Regge es la siguiente:

Definición 4.2. Un sistema de ecuaciones diferenciales parciales en dos variables independientes τ, σ y dos variables dependientes u, v dado por

$$\begin{aligned} F(\tau, \sigma, u, v, \dots) &= 0 \\ G(\tau, \sigma, u, v, \dots) &= 0 \end{aligned} \quad (4.17)$$

en que $u := u(\tau, \sigma)$ y $v := v(\tau, \sigma)$, es de tipo Lund-Regge si existen funciones f_{ij} y g_{ikj} , con $g_{ikj} = g_{kij}$, $i, j = 1, 2$, $k = 1, 2, 3$ que dependan de τ, σ, u, v y de una cantidad finita de derivadas de u, v tal que las 1-formas

$$\omega_i = f_{i1}d\sigma + f_{i2}d\tau, \quad \omega_{ik} = g_{ik1}d\sigma + g_{ik2}d\tau, i \neq k$$

cumplen las ecuaciones de estructura (4.1) y la condición $w_1 \wedge w_2 \neq 0$ cuando $u(\tau, \sigma)$, $v(\tau, \sigma)$ sean solución de (4.17).

Teorema 4.1. Sea el sistema (4.17) de la definición 4.2, con variables independientes τ, σ y variables dependientes u, v . Supongamos que existen 1-formas w_1, w_2, w_{12}, w_{13} y w_{23} dependiendo de τ, σ, u, v y en un número finito de derivadas de u, v , tal que las ecuaciones

$$dw_1 = w_{12} \wedge w_2$$

$$dw_2 = w_1 \wedge w_{12}$$

$$w_1 \wedge w_{13} + w_2 \wedge w_{23} = 0$$

se cumplen siempre que $u(\tau, \sigma)$ y $v(\tau, \sigma)$ sean solución de (4.17). Entonces (4.17) es de tipo Lund-Regge si y solo si la matriz

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & w_{12} & w_{13} + w_2 \\ -w_{12} & 0 & w_{23} - w_1 \\ -w_{13} - w_2 & -w_{23} + w_1 & 0 \end{pmatrix}$$

satisface la ecuación $d\Omega = \Omega \wedge \Omega$.

Demostración. Considerando la matriz Ω dada en el teorema, tenemos que

$$d\Omega = \begin{pmatrix} 0 & dw_{12} & dw_{13} + dw_2 \\ -dw_{12} & 0 & dw_{23} - dw_1 \\ -dw_{13} - dw_2 & -dw_{23} + dw_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Omega \wedge \Omega = \begin{pmatrix} 0 & (w_{13} + w_2) \wedge (w_1 - w_{23}) & w_{12} \wedge (w_{23} - w_1) \\ (w_{13} + w_2) \wedge (-w_1 + w_{23}) & 0 & -w_{12} \wedge (w_2 + w_{13}) \\ w_{12} \wedge (-w_{23} + w_1) & w_{12} \wedge (w_2 + w_{13}) & 0 \end{pmatrix}$$

$d\Omega = \Omega \wedge \Omega$ si y solo si se cumplen

$$dw_{12} = (w_{13} + w_2) \wedge (w_1 - w_{23}) = w_{23} \wedge w_{13} - w_1 \wedge w_2$$

$$dw_{13} + dw_2 = w_{12} \wedge (w_{23} - w_1) \Rightarrow dw_{13} = w_{12} \wedge w_{23}$$

$$dw_{23} - dw_1 = -w_{12} \wedge (w_2 + w_{13}) \Rightarrow dw_{23} = w_{13} \wedge w_{12}$$

ósea que $d\Omega = \Omega \wedge \Omega \Leftrightarrow w_1, w_2, w_{12}, w_{13}$ y w_{23} cumplen las ecuaciones de estructura (4.1). \square

Las ecuaciones de estructura de tipo esférico (que vimos en la sección 2.2)

son equivalentes a $d\Omega = \Omega \wedge \Omega$, donde

$$\Omega = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i\bar{w}_2 & \bar{w}_1 + iw_3 \\ -\bar{w}_1 + iw_3 & -i\bar{w}_2 \end{pmatrix}$$

En la sección 2.3 contruimos un isomorfismo $\phi : su(2) \rightarrow so(3)$ para un problema lineal proveniente de una ecuación de tipo esférico, si asignamos un isomorfismo $\bar{\phi} : su(2) \rightarrow so(3)$ dado por

$$\bar{\phi}(\Omega) = \begin{pmatrix} 0 & \bar{w}_2 & -\bar{w}_1 \\ -\bar{w}_2 & 0 & \bar{w}_3 \\ \bar{w}_1 & -\bar{w}_3 & 0 \end{pmatrix}$$

Comparando la matriz $\bar{\phi}(\Omega)$ con el teorema 4.1, obtenemos

$$\bar{w}_1 = -w_{13} - w_2$$

$$\bar{w}_2 = w_{12}$$

$$\bar{w}_3 = w_{23} - w_1$$

Si w_1, w_2, w_{12}, w_{13} y w_{23} cumplen las ecuaciones de estructura (4.1), entonces

$$\bar{w}_3 \wedge \bar{w}_2 = (w_{23} - w_1) \wedge w_{12} = -dw_{13} - dw_2 = d\bar{w}_1$$

$$\bar{w}_1 \wedge \bar{w}_3 = (-w_{13} - w_2) \wedge (w_{23} - w_1) = w_{23} \wedge w_{13} - w_1 \wedge w_2 = dw_{12} = d\bar{w}_2$$

$$-\overline{w_1} \wedge \overline{w_2} = w_{13} \wedge w_{12} + w_2 \wedge w_{12} = dw_{23} - dw_1 = d\overline{w_3}$$

Por lo tanto una ecuación tipo Lund-Regge con 1-formas asociadas w_1, w_2, w_{12}, w_{13} y w_{23} , describe superficies esféricas con 1-formas $\overline{w_1}, \overline{w_2}$ y $\overline{w_3}$.

4.2. Clasificación de Ecuaciones de tipo Lund-Regge

En esta sección se clasifican ecuaciones diferenciales que describan superficies inmersas en S^3 . Consideremos un sistema de ecuaciones diferenciales parciales de la forma

$$\begin{aligned}\theta_{xy} &= F(\theta, \lambda, \theta_x, \lambda_x, \theta_y, \lambda_y) \\ \lambda_{xy} &= G(\theta, \lambda, \theta_x, \lambda_x, \theta_y, \lambda_y)\end{aligned}$$

en que $\theta := \theta(x, y)$ y $\lambda := \lambda(x, y)$. Introducimos las notaciones

$$\begin{aligned}z_0 &= \theta, & z_1 &= \theta_x, & p &= \theta_y \\ r_0 &= \lambda, & r_1 &= \lambda_x, & q &= \lambda_y\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}p_x &= F(z_0, r_0, z_1, r_1, p, q) \\ q_x &= G(z_0, r_0, z_1, r_1, p, q)\end{aligned}\tag{4.18}$$

Teorema 4.2. *Consideremos el sistema (4.18), el cual describe superficies inmersas en la esfera S^3 con 1-formas asociadas $w_i = f_{i1} dx + f_{i2} dy$, con $i = 1, 2, 3$ y w_{13}, w_{23} , donde $w_{12} := w_3, w_{13} = aw_1 + bw_2, w_{23} = bw_1 + cw_2$.*

Si f_{ij}, a, b, c son funciones diferenciables de z_0, r_0, z_1, r_1, p, q , entonces

$$-pf_{11,z_0} - Ff_{11,z_1} - qf_{11,r_0} - Gf_{11,r_1} + z_1f_{12,z_0} + r_1f_{12,r_0} + Ff_{12,p} + Gf_{12,q} + f_{21}f_{32} - f_{31}f_{22} = 0\tag{4.19}$$

$$-pf_{21,z_0} - Ff_{21,z_1} - qf_{21,r_0} - Gf_{21,r_1} + z_1f_{22,z_0} + r_1f_{22,r_0} + Ff_{22,p} + Gf_{22,q} + f_{12}f_{31} - f_{11}f_{32} = 0\tag{4.20}$$

$$\begin{aligned}
& -pf_{31,z_0} - Ff_{31,z_1} - qf_{31,r_0} - Gf_{31,r_1} + z_1f_{32,z_0} + r_1f_{32,r_0} + Ff_{32,p} + Gf_{32,q} + \\
& \qquad \qquad \qquad K(f_{11}f_{22} - f_{21}f_{12}) = 0
\end{aligned} \tag{4.21}$$

$$\begin{aligned}
& f_{11}(-pa_{z_0} - Fa_{z_1}) + f_{12}z_1a_{z_0} + f_{11}(-qa_{r_0} - Ga_{r_1}) + f_{12}r_1a_{r_0} + a_pf_{12}F + a_qf_{12}G + \\
& f_{21}(-pb_{z_0} - Fb_{z_1}) + f_{22}z_1b_{z_0} + f_{21}(-qb_{r_0} - Gb_{r_1}) + f_{22}r_1b_{r_0} + Ff_{22}b_p + Gf_{22}b_q + \\
& \qquad \qquad \qquad 2b(f_{11}f_{32} - f_{12}f_{31}) + (a - c)(f_{31}f_{22} - f_{32}f_{21}) = 0 \\
& \qquad \qquad \qquad f_{12}a_{z_1} + f_{22}b_{z_1} = 0 \\
& \qquad \qquad \qquad f_{12}a_{r_1} + f_{22}b_{r_1} = 0 \\
& \qquad \qquad \qquad f_{11}a_p + f_{21}b_p = 0 \\
& \qquad \qquad \qquad f_{11}a_q + f_{21}b_q = 0
\end{aligned} \tag{4.22}$$

$$\begin{aligned}
& f_{11}(-pb_{z_0} - Fb_{z_1}) + f_{12}z_1b_{z_0} + f_{11}(-qb_{r_0} - Gb_{r_1}) + f_{12}r_1b_{r_0} + b_pf_{12}F + b_qf_{12}G + \\
& f_{21}(-pc_{z_0} - Fc_{z_1}) + f_{22}z_1c_{z_0} + f_{21}(-qc_{r_0} - Gc_{r_1}) + f_{22}r_1c_{r_0} + Ff_{22}c_p + Gf_{22}c_q + \\
& \qquad \qquad \qquad 2b(f_{31}f_{22} - f_{32}f_{21}) + (c - a)(f_{11}f_{32} - f_{12}f_{31}) = 0 \\
& \qquad \qquad \qquad f_{12}b_{z_1} + f_{22}c_{z_1} = 0 \\
& \qquad \qquad \qquad f_{12}b_{r_1} + f_{22}c_{r_1} = 0 \\
& \qquad \qquad \qquad f_{11}b_p + f_{21}c_p = 0 \\
& \qquad \qquad \qquad f_{11}b_q + f_{21}c_q = 0
\end{aligned} \tag{4.23}$$

$$\begin{aligned}
& f_{11,p} = f_{11,q} = f_{12,z_1} = f_{12,r_1} = 0 \\
& f_{21,p} = f_{21,q} = f_{22,z_1} = f_{22,r_1} = 0 \\
& f_{31,p} = f_{31,q} = f_{32,z_1} = f_{32,r_1} = 0
\end{aligned} \tag{4.24}$$

$$\begin{aligned}
& f_{11,z_1}^2 + f_{12,p}^2 + f_{21,z_1}^2 + f_{22,p}^2 + f_{31,z_1}^2 + f_{32,p}^2 + a_{z_1}^2 + a_p^2 + b_{z_1}^2 + b_p^2 + c_{z_1}^2 + c_p^2 \neq 0 \\
& f_{11,r_1}^2 + f_{12,q}^2 + f_{21,r_1}^2 + f_{22,q}^2 + f_{31,r_1}^2 + f_{32,q}^2 + a_{r_1}^2 + a_q^2 + b_{r_1}^2 + b_q^2 + c_{r_1}^2 + c_q^2 \neq 0
\end{aligned} \tag{4.25}$$

Demostración.

$$\begin{aligned} dp \wedge dy &= d(\theta_y) \wedge dy \\ &= \theta_{yx} dx \wedge dy \\ &= F dx \wedge dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dq \wedge dy &= d(\lambda_y) \wedge dy \\ &= \lambda_{yx} dx \wedge dy \\ &= G dx \wedge dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dz_1 \wedge dx &= d(\theta_x) \wedge dx \\ &= \theta_{xy} dy \wedge dx \\ &= -F dx \wedge dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dr_1 \wedge dx &= d(\lambda_x) \wedge dx \\ &= \lambda_{xy} dy \wedge dx \\ &= -G dx \wedge dy \end{aligned}$$

$$dz_0 \wedge dx = -p dx \wedge dy$$

$$dz_0 \wedge dy = z_1 dx \wedge dy$$

$$dr_0 \wedge dx = -q dx \wedge dy$$

$$dr_0 \wedge dy = r_1 dx \wedge dy$$

En $dw_1 - w_{12} \wedge w_2 = 0$, se tiene

$$\sum_{i=0}^1 f_{11,z_i} dz_i \wedge dx + \sum_{i=0}^1 f_{11,r_i} dr_i \wedge dx + f_{11,p} dp \wedge dx + f_{11,q} dq \wedge dx + \sum_{i=0}^1 f_{12,z_i} dz_i \wedge dy + \sum_{i=0}^1 f_{12,r_i} dr_i \wedge dy + f_{12,p} dp \wedge dy + f_{12,q} dq \wedge dy - (f_{31}f_{22} - f_{21}f_{32})dx \wedge dy = 0$$

Remplazando los productos cuñas obtenidos, se tiene

$$\begin{aligned} &(-pf_{11,z_0} - Ff_{11,z_1})dx \wedge dy + (-qf_{11,r_0} - Gf_{11,r_1})dx \wedge dy + f_{11,p}dp \wedge dx + f_{11,q}dq \wedge dx + \\ &\quad (z_1f_{12,z_0}dx \wedge dy + f_{12,z_1}dz_1 \wedge dy)(r_1f_{12,r_0}dx \wedge dy + f_{12,r_1}dr_1 \wedge dy) + \\ &\quad Ff_{12,p}dx \wedge dy + Gf_{12,q}dx \wedge dy - (f_{31}f_{22} - f_{21}f_{32})dx \wedge dy = 0 \end{aligned}$$

Se agrupa términos

$$\begin{aligned} &(-pf_{11,z_0} - Ff_{11,z_1} - qf_{11,r_0} - Gf_{11,r_1} + z_1f_{12,z_0} + r_1f_{12,r_0} + Ff_{12,p} + Gf_{12,q} - \\ &\quad f_{31}f_{22} + f_{21}f_{32})dx \wedge dy + f_{11,p}dp \wedge dx + f_{11,q}dq \wedge dx + f_{12,z_1}dz_1 \wedge dy + f_{12,r_1}dr_1 \wedge dy = 0 \end{aligned}$$

Cada expresión de los productos cuñas equivale a 0, así obtenemos (4.19) y la primera ecuación de (4.24).

En $dw_2 - w_1 \wedge w_{12} = 0$, se tiene

$$\sum_{i=0}^1 f_{21,z_i} dz_i \wedge dx + \sum_{i=0}^1 f_{21,r_i} dr_i \wedge dx + f_{21,p} dp \wedge dx + f_{21,q} dq \wedge dx + \sum_{i=0}^1 f_{22,z_i} dz_i \wedge dy + \sum_{i=0}^1 f_{22,r_i} dr_i \wedge dy + f_{22,p} dp \wedge dy + f_{22,q} dq \wedge dy - (f_{11}f_{32} - f_{12}f_{31})dx \wedge dy = 0$$

Remplazando los productos cuñas obtenidos, se tiene

$$\begin{aligned} &(-pf_{21,z_0} - Ff_{21,z_1})dx \wedge dy + (-qf_{21,r_0} - Gf_{21,r_1})dx \wedge dy + f_{21,p}dp \wedge dx + f_{21,q}dq \wedge dx + \\ &\quad (z_1f_{22,z_0}dx \wedge dy + f_{22,z_1}dz_1 \wedge dy) + (r_1f_{22,r_0}dx \wedge dy + f_{22,r_1}dr_1 \wedge dy) + \\ &\quad Ff_{22,p}dx \wedge dy + Gf_{22,q}dx \wedge dy - (f_{11}f_{32} - f_{12}f_{31})dx \wedge dy = 0 \end{aligned}$$

Agrupando términos y como cada expresión de los productos cuñas equivaldrá a 0, así obtenemos (4.20) y la segunda ecuación de (4.24).

En $dw_{12} + Kw_1 \wedge w_2 = 0$, se tiene

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^1 f_{31,z_i} dz_i \wedge dx + \sum_{i=0}^1 f_{31,r_i} dr_i \wedge dx + f_{31,p} dp \wedge dx + f_{31,q} dq \wedge dx + \sum_{i=0}^1 f_{32,z_i} dz_i \wedge dy + \\ & + \sum_{i=0}^1 f_{32,r_i} dr_i \wedge dy + f_{32,p} dp \wedge dy + f_{32,q} dq \wedge dy + K(f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21})dx \wedge dy = 0 \end{aligned}$$

Remplazando los productos cuñas obtenidos, se tiene

$$\begin{aligned} & (-pf_{31,z_0} - Ff_{31,z_1})dx \wedge dy + (-qf_{31,r_0} - Gf_{31,r_1})dx \wedge dy + f_{31,p}dp \wedge dx + \\ & f_{31,q}dq \wedge dx + (z_1f_{32,z_0}dx \wedge dy + f_{32,z_1}dz_1 \wedge dy) + (r_1f_{32,r_0}dx \wedge dy + f_{32,r_1}dr_1 \wedge dy) + \\ & Ff_{32,p}dx \wedge dy + Gf_{32,q}dx \wedge dy + K(f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21})dx \wedge dy = 0 \end{aligned}$$

Agrupando términos y como cada expresión de los productos cuñas equivaldrá a 0, obtenemos (4.21) y la tercera ecuación de (4.24).

En $dw_{13} - w_{12} \wedge w_{23} = 0$, se tiene

$$\begin{aligned} dw_{13} &= d(aw_1 + bw_2) \\ &= adw_1 + da \wedge w_1 + bdw_2 + db \wedge w_2 \\ &= aw_{12} \wedge w_2 + da \wedge w_1 + bw_1 \wedge w_{12} + db \wedge w_2 \end{aligned}$$

$$\text{y } w_{12} \wedge w_{23} = w_{12} \wedge (bw_1 + cw_2) = bw_{12} \wedge w_1 + cw_{12} \wedge w_2$$

Luego nos queda $da \wedge w_1 + db \wedge w_2 + 2bw_1 \wedge w_{12} + (a - c)w_{12} \wedge w_2 = 0$, entonces

$$\begin{aligned} & f_{11} \sum_{i=0}^1 a_{z_i} dz_i \wedge dx + f_{12} \sum_{i=0}^1 a_{z_i} dz_i \wedge dy + f_{11} \sum_{i=0}^1 a_{r_i} dr_i \wedge dx + f_{12} \sum_{i=0}^1 a_{r_i} dr_i \wedge dy + \\ & a_p f_{11} dp \wedge dx + a_p f_{12} dp \wedge dy + a_q f_{11} dq \wedge dx + a_q f_{12} dq \wedge dy + f_{21} \sum_{i=0}^1 b_{z_i} dz_i \wedge dx + \\ & f_{22} \sum_{i=0}^1 b_{z_i} dz_i \wedge dy + f_{21} \sum_{i=0}^1 b_{r_i} dr_i \wedge dx + f_{22} \sum_{i=0}^1 b_{r_i} dr_i \wedge dy + b_p f_{21} dp \wedge dx + \\ & b_p f_{22} dp \wedge dy + b_q f_{21} dq \wedge dx + b_q f_{22} dq \wedge dy + 2b(f_{11}f_{32} - f_{12}f_{31})dx \wedge dy + \\ & (a - c)(f_{31}f_{22} - f_{32}f_{21})dx \wedge dy = 0 \end{aligned}$$

Remplazando los productos cuñas obtenidos, se tiene

$$\begin{aligned}
& f_{11}(-pa_{z_0} - Fa_{z_1})dx \wedge dy + f_{12}(z_1a_{z_0}dx \wedge dy + a_{z_1}dz_1 \wedge dy) + \\
& f_{11}(-qa_{r_0} - Ga_{r_1})dx \wedge dy + f_{12}(r_1a_{r_0}dx \wedge dy + a_{r_1}dr_1 \wedge dy) + a_p f_{11}dp \wedge dx + \\
& a_p f_{12}Fdx \wedge dy + a_q f_{11}dq \wedge dx + a_q f_{12}Gdx \wedge dy + \\
& f_{21}(-pb_{z_0} - Fb_{z_1})dx \wedge dy + f_{22}(z_1b_{z_0}dx \wedge dy + \\
& b_{z_1}dz_1 \wedge dy) + f_{21}(-qb_{r_0} - Gb_{r_1})dx \wedge dy + f_{22}(r_1b_{r_0}dx \wedge dy + b_{r_1}dr_1 \wedge dy) + \\
& b_p f_{21}dp \wedge dx + b_p f_{22}Fdx \wedge dy + b_q f_{21}dq \wedge dx + b_q f_{22}Gdx \wedge dy + \\
& 2b(f_{11}f_{32} - f_{12}f_{31})dx \wedge dy + (a - c)(f_{31}f_{22} - f_{32}f_{21})dx \wedge dy = 0
\end{aligned}$$

Agrupando términos y como cada expresión de los productos cuñas equivaldrá a 0, tenemos (4.22).

En $dw_{23} - w_{13} \wedge w_{12} = 0$, se tiene

$$\begin{aligned}
dw_{23} &= d(bw_1 + cw_2) \\
&= bw_{12} \wedge w_2 + db \wedge w_1 + cw_1 \wedge w_{12} + dc \wedge w_2
\end{aligned}$$

y $w_{13} \wedge w_{12} = aw_1 \wedge w_{12} + bw_2 \wedge w_{12}$

Luego nos queda $db \wedge w_1 + dc \wedge w_2 + 2bw_{12} \wedge w_2 + (c - a)w_1 \wedge w_{12} = 0$, entonces

$$\begin{aligned}
& f_{11} \sum_{i=0}^1 b_{z_i} dz_i \wedge dx + f_{12} \sum_{i=0}^1 b_{z_i} dz_i \wedge dy + f_{11} \sum_{i=0}^1 b_{r_i} dr_i \wedge dx + f_{12} \sum_{i=0}^1 b_{r_i} dr_i \wedge dy + \\
& b_p f_{11} dp \wedge dx + b_p f_{12} dp \wedge dy + b_q f_{11} dq \wedge dx + b_q f_{12} dq \wedge dy + f_{21} \sum_{i=0}^1 c_{z_i} dz_i \wedge dx + \\
& f_{22} \sum_{i=0}^1 c_{z_i} dz_i \wedge dy + f_{21} \sum_{i=0}^1 c_{r_i} dr_i \wedge dx + f_{22} \sum_{i=0}^1 c_{r_i} dr_i \wedge dy + c_p f_{21} dp \wedge dx + c_p f_{22} dp \wedge dy + \\
& c_q f_{21} dq \wedge dx + c_q f_{22} dq \wedge dy + 2b(f_{31}f_{22} - f_{32}f_{21})dx \wedge dy + \\
& (c - a)(f_{11}f_{32} - f_{12}f_{31})dx \wedge dy = 0
\end{aligned}$$

reemplazando los productos cuñas obtenidos, se tiene

$$\begin{aligned}
& f_{11}(-pb_{z_0} - Fb_{z_1})dx \wedge dy + f_{12}(z_1b_{z_0}dx \wedge dy + b_{z_1}dz_1 \wedge dy) + f_{11}(-qb_{r_0} - Gb_{r_1})dx \wedge dy + \\
& f_{12}(r_1b_{r_0}dx \wedge dy + b_{r_1}dr_1 \wedge dy) + b_p f_{11}dp \wedge dx + b_p f_{12}Fdx \wedge dy + b_q f_{11}dq \wedge dx + \\
& b_q f_{12}Gdx \wedge dy + f_{21}(-pc_{z_0} - Fc_{z_1})dx \wedge dy + f_{22}(z_1c_{z_0}dx \wedge dy + c_{z_1}dz_1 \wedge dy) + \\
& f_{21}(-qc_{r_0} - Gc_{r_1})dx \wedge dy + f_{22}(r_1c_{r_0}dx \wedge dy + c_{r_1}dr_1 \wedge dy) + c_p f_{21}dp \wedge dx + \\
& c_p f_{22}Fdx \wedge dy + c_q f_{21}dq \wedge dx + c_q f_{22}Gdx \wedge dy + 2b(f_{31}f_{22} - f_{32}f_{21})dx \wedge dy + \\
& (c - a)(f_{11}f_{32} - f_{12}f_{31})dx \wedge dy = 0
\end{aligned}$$

Agrupando términos y como cada expresión de los productos cuñas equivaldrá a 0, tenemos (4.23).

Si $f_{11,z_1} = f_{12,p} = f_{21,z_1} = f_{22,p} = f_{31,z_1} = f_{32,p} = a_{z_1} = a_p = b_{z_1} = b_p = c_{z_1} = c_p = 0$ entonces en las ecuaciones (4.19), (4.20), (4.21), (4.22) y (4.23) no queda nada en términos de F .

$\Rightarrow p_x = F(z_0, r_0, z_1, r_1, p, q)$ no es una condición necesaria ni suficiente para que w_1, w_2, w_{12}, w_{13} y w_{23} cumplan las ecuaciones de estructura (4.1) y esto nos lleva a una contradicción.

Entonces $f_{11,z_1} \neq 0$ o $f_{12,p} \neq 0$ o $f_{21,z_1} \neq 0$ o $f_{22,p} \neq 0$ o $f_{31,z_1} \neq 0$ o $f_{32,p} \neq 0$ o $a_{z_1} \neq 0$ o $a_p \neq 0$ o $b_{z_1} \neq 0$ o $b_p \neq 0$ o $c_{z_1} \neq 0$ o $c_p \neq 0$.

$\Rightarrow f_{11,z_1}^2 + f_{12,p}^2 + f_{21,z_1}^2 + f_{22,p}^2 + f_{31,z_1}^2 + f_{32,p}^2 + a_{z_1}^2 + a_p^2 + b_{z_1}^2 + b_p^2 + c_{z_1}^2 + c_p^2 \neq 0$ y así tenemos la primera condición de (4.25). De igual forma, si $f_{11,r_1} = f_{12,q} = f_{21,r_1} = f_{22,q} = f_{31,r_1} = f_{32,q} = a_{r_1} = a_q = b_{r_1} = b_q = c_{r_1} = c_q = 0$ entonces en las ecuaciones (4.19), (4.20), (4.21), (4.22) y (4.23) no queda nada en términos de G .

$\Rightarrow q_x = G(z_0, r_0, z_1, r_1, p, q)$ no es una condición necesaria ni suficiente para que w_1, w_2, w_{12}, w_{13} y w_{23} cumplan las ecuaciones de estructura (4.1) y esto nos lleva a una contradicción.

Entonces $f_{11,r_1} \neq 0$ o $f_{12,q} \neq 0$ o $f_{21,r_1} \neq 0$ o $f_{22,q} \neq 0$ o $f_{31,r_1} \neq 0$ o $f_{32,q} \neq 0$ o $a_{r_1} \neq 0$ o $a_q \neq 0$ o $b_{r_1} \neq 0$ o $b_q \neq 0$ o $c_{r_1} \neq 0$ o $c_q \neq 0$ y así tenemos la segunda condición de (4.25). \square

Corolario 4.2.1. *Sea el sistema*

$$\begin{aligned}
p_x &= F(z_0, r_0, z_1, r_1, p, q) \\
q_x &= G(z_0, r_0, z_1, r_1, p, q)
\end{aligned}$$

que describe superficies inmersas en S^3 con 1-formas asociadas $w_i = f_{i1} dx + f_{i2} dy$, con $i = 1, 2, 3$ y w_{13}, w_{23} , donde $w_{12} := w_3$, $w_{13} = aw_1 + bw_2$, $w_{23} = bw_1 + cw_2$. Si f_{ij} , a , b , c

son funciones diferenciables de z_0, r_0, z_1, r_1, p, q y curvatura media H es cero entonces

$$\begin{aligned}
& f_{11}(-pa_{z_0} - Fa_{z_1} - qa_{r_0} - Ga_{r_1} - pb_{z_0} - Fb_{z_1} - qb_{r_0} - Gb_{r_1}) + \\
& f_{12}(z_1a_{z_0} + r_1a_{r_0} + a_pF + a_qG + z_1b_{z_0}) + r_1b_{r_0} + b_pF + b_qG + \\
& f_{21}(-pb_{z_0} - Fb_{z_1} - qb_{r_0} - Gb_{r_1} + pa_{z_0} + Fa_{z_1} + qa_{r_0} + Ga_{r_1}) + \\
& f_{22}(z_1b_{z_0} + r_1b_{r_0} + Fb_p + Gb_q - z_1a_{z_0} - r_1a_{r_0} - Fa_p - Ga_q) + \\
& 2b(f_{11}f_{32} - f_{12}f_{31} + f_{31}f_{22} - f_{32}f_{21}) + \\
& 2a(f_{31}f_{22} - f_{32}f_{21} + f_{12}f_{31} - f_{11}f_{32}) = 0 \\
& a_{z_1}(f_{12} - f_{22}) + b_{z_1}(f_{22} + f_{12}) = 0 \\
& a_{r_1}(f_{12} - f_{22}) + b_{r_1}(f_{22} + f_{12}) = 0 \\
& a_p(f_{11} - f_{21}) + b_p(f_{11} + f_{21}) = 0 \\
& a_q(f_{11} - f_{21}) + b_q(f_{11} + f_{21}) = 0
\end{aligned} \tag{4.26}$$

Demostración. Como el sistema describe superficies inmersas en S^3 con 1-formas asociadas $w_1, w_2, w_{12}, w_{13} = aw_1 + bw_2$ y $w_{23} = bw_1 + cw_2$, y como f_{ij}, a, b, c son funciones diferenciables de z_0, r_0, z_1, r_1, p, q , entonces se cumplen las ecuaciones (4.22) y (4.23) del teorema 4.2.

Si $H = 0$ entonces por la ecuación

$w_1 \wedge w_{23} + w_{13} \wedge w_2 = 2Hw_1 \wedge w_2$, se tiene

$$\begin{aligned}
w_1 \wedge w_{23} + w_{13} \wedge w_2 &= 0 \\
w_1 \wedge (bw_1 + cw_2) + (aw_1 + bw_2) \wedge w_2 &= 0 \\
(a + c)w_1 \wedge w_2 &= 0 \\
c &= -a
\end{aligned}$$

ya que $w_1 \wedge w_2 \neq 0$. Entonces al remplazar $c = -a$ en las ecuaciones de (4.23), y luego sumarlas (respectivamente) con las ecuaciones de (4.22) se llega a (4.26).

□

Corolario 4.2.2. *Sea el sistema*

$$\begin{aligned}
p_x &= F(z_0, r_0, z_1, r_1, p, q) \\
q_x &= G(z_0, r_0, z_1, r_1, p, q)
\end{aligned}$$

que describe superficies inmersas en S^3 con 1-formas asociadas $w_i = f_{i1} dx + f_{i2} dy$, con $i = 1, 2, 3$ y w_{13}, w_{23} , donde $w_{12} := w_3$, $w_{13} = aw_1 + bw_2$, $w_{23} = bw_1 + cw_2$. Si F y G no dependen de p y q , $K = -\delta$, con $\delta = \pm 1$, y si f_{ij} , a , b , c son funciones diferenciables de z_0, r_0, z_1, r_1 entonces

$$\begin{aligned} -Ff_{11,z_1} - Gf_{11,r_1} + z_1f_{12,z_0} + r_1f_{12,r_0} + f_{21}f_{32} - f_{31}f_{22} &= 0 \\ -Ff_{21,z_1} - Gf_{21,r_1} + z_1f_{22,z_0} + r_1f_{22,r_0} + f_{12}f_{31} - f_{11}f_{32} &= 0 \\ -Ff_{31,z_1} - Gf_{31,r_1} + z_1f_{32,z_0} + r_1f_{32,r_0} - \delta(f_{11}f_{22} - f_{21}f_{12}) &= 0 \end{aligned} \quad (4.27)$$

$$\begin{aligned} f_{11,z_1}^2 + f_{21,z_1}^2 + f_{31,z_1}^2 &\neq 0 \\ f_{11,r_1}^2 + f_{21,r_1}^2 + f_{31,r_1}^2 &\neq 0 \end{aligned} \quad (4.28)$$

Demostración. Si F y G no dependen de p y q , el sistema (4.18) queda como

$$\begin{aligned} z_{1,y} &= F(z_0, r_0, z_1, r_1) \\ r_{1,y} &= G(z_0, r_0, z_1, r_1) \end{aligned} \quad (4.29)$$

como (4.29) describe superficies inmersas en S^3 con 1-formas asociadas $w_i = f_{i1} dx + f_{i2} dy$, con $i = 1, 2, 3$ y w_{13}, w_{23} , donde $w_{12} := w_3$, $w_{13} = aw_1 + bw_2$, $w_{23} = bw_1 + cw_2$, y como f_{ij} , a , b , c son funciones diferenciables de z_0, r_0, z_1, r_1 entonces se obtienen las ecuaciones (4.19), (4.20) y (4.21) del teorema 4.2.

Pero como F , G , f_{ij} , a , b y c no dependen de p y q , obtenemos la primera y segunda ecuación de (4.27). De la ecuación (4.21) se obtiene

$$-Ff_{31,z_1} - Gf_{31,r_1} + z_1f_{32,z_0} + r_1f_{32,r_0} + K(f_{11}f_{22} - f_{21}f_{12}) = 0$$

Como $K = -\delta$ entonces se obtiene la tercera ecuación de (4.27).

Si $f_{11,z_1} = f_{21,z_1} = f_{31,z_1} = 0$ entonces las ecuaciones (4.27) quedan como

$$\begin{aligned} -Gf_{11,r_1} + z_1f_{12,z_0} + r_1f_{12,r_0} + f_{21}f_{32} - f_{31}f_{22} &= 0 \\ -Gf_{21,r_1} + z_1f_{22,z_0} + r_1f_{22,r_0} + f_{12}f_{31} - f_{11}f_{32} &= 0 \\ -Gf_{31,r_1} + z_1f_{32,z_0} + r_1f_{32,r_0} - \delta(f_{11}f_{22} - f_{21}f_{12}) &= 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow z_{1,y} = F(z_0, r_0, z_1, r_1)$ no es una condición necesaria ni suficiente para que w_1 , w_2 y w_{12} cumplan la primera, segunda y cuarta ecuación de (4.1) y esto nos lleva a una contradicción.

Entonces $f_{11,z_1} \neq 0$ o $f_{21,z_1} \neq 0$ o $f_{31,z_1} \neq 0 \Rightarrow f_{11,z_1}^2 + f_{21,z_1}^2 + f_{31,z_1}^2 \neq 0$ y así tenemos la primera condición de (4.28).

De igual forma si $f_{11,r_1} = f_{21,r_1} = f_{31,r_1} = 0$ entonces $r_{1,y} = G(z_0, r_0, z_1, r_1)$ no es una condición necesaria ni suficiente para que w_1 , w_2 y w_{12} cumplan la primera, segunda y cuarta ecuación de (4.1) y esto nos lleva a una contradicción. Así tenemos la segunda condición de (4.28). \square

Este corolario corresponde al teorema 3.10 de [KeTen21] realizado por Keti Tenenblat y Filipe Kelmer.

De los ejemplos de ecuaciones de tipo Lund-Regge de la sección 4.1 podemos notar que al menos f_{11} o f_{21} es constante, si tenemos un sistema como (4.18) equipado con 1-formas diferenciales w_1 , w_2 , w_3 , w_{13} y w_{23} que satisfacen las ecuaciones de estructura, y estas formas diferenciales dependen de las soluciones de (4.18) y de las derivadas presentes en (4.18), entonces podemos hallar una expresión explícita para F y G de (4.18) y para la curvatura gaussiana K , por lo que tenemos el siguiente teorema.

Teorema 4.3. *Un sistema de ecuaciones en derivadas parciales de la forma*

$$\begin{aligned} p_x &= F(z_0, r_0, z_1, r_1, p, q) \\ q_x &= G(z_0, r_0, z_1, r_1, p, q) \end{aligned}$$

describe superficies inmersas en S^3 con 1-formas asociadas $w_i = f_{i1}dx + f_{i2}dy$, $i = 1, 2, 3$ y $w_{12} := w_3$, $w_{13} = aw_1 + bw_2$, $w_{23} = bw_1 + cw_2$ tal que $f_{11} = \eta \in \mathbb{R}$ y f_{ij} , a , b , c son funciones diferenciables de z_0 , r_0 , z_1 , r_1 , p , q , entonces

$$\begin{aligned} F &= \frac{-f_{12,q} \cdot f_{21,z_0} \cdot p - f_{12,z_0} \cdot z_1 \cdot (f_{22,q} - f_{12,r_1})}{D_1} + \\ &\quad \frac{f_{12,q} \cdot (f_{12} \cdot f_{31} - \eta \cdot f_{32} - f_{21,r_0} \cdot q + f_{22,r_0} \cdot r_1 + f_{22,z_0} \cdot z_1)}{D_1} - \\ &\quad \frac{(f_{22,q} - f_{12,r_1}) \cdot (f_{21} \cdot f_{31} - f_{22} \cdot f_{31} + f_{12,r_0} \cdot r_1)}{D_1} \end{aligned} \quad (4.30)$$

$$\begin{aligned}
G = & \frac{f_{12,p} \cdot f_{21,z_0} \cdot p + f_{12,z_0} \cdot z_1 \cdot (f_{22,p} - f_{21,z_1})}{D_1} + \\
& \frac{(f_{22,p} - f_{21,z_1}) \cdot (f_{21} \cdot f_{31} - f_{22} \cdot f_{31} + f_{12,r_0} \cdot r_1)}{D_1} - \\
& \frac{f_{12,p} \cdot (f_{12} \cdot f_{31} - \eta \cdot f_{32} - f_{21,r_0} \cdot q + f_{22,r_0} \cdot r_1 + f_{22,z_0} \cdot z_1)}{D_1}
\end{aligned} \tag{4.31}$$

donde $D_1 = f_{12,p} \cdot f_{22,q} - f_{12,q} \cdot f_{22,p} - f_{12,p} \cdot f_{12,r_1} + f_{12,q} \cdot f_{21,z_1}$

$$\begin{aligned}
K = & \frac{f_{31,z_0} \cdot p - \eta \cdot f_{22} + f_{12} \cdot f_{21} + f_{31,r_0} \cdot q - f_{32,r_0} \cdot r_1 - f_{32,z_0} \cdot z_1}{\eta \cdot f_{22} - f_{12} \cdot f_{21}} \\
& - \frac{E_1 + E_2 - E_3 + E_4}{J_1}
\end{aligned} \tag{4.32}$$

Donde

$$\begin{aligned}
E_1 = & f_{12,z_0} \cdot z_1 \cdot (f_{22,p} \cdot f_{32,q} - f_{22,q} \cdot f_{32,p} + f_{32,p} \cdot f_{12,r_1} - f_{32,q} \cdot f_{21,z_1} \\
& - f_{22,p} \cdot f_{31,r_1} + f_{22,q} \cdot f_{31,z_1} - f_{12,r_1} \cdot f_{31,z_1} + f_{21,z_1} \cdot f_{31,r_1})
\end{aligned}$$

$$E_2 = f_{21,z_0} \cdot p \cdot (f_{12,p} \cdot f_{32,q} - f_{12,q} \cdot f_{32,p} - f_{12,p} \cdot f_{31,r_1} + f_{12,q} \cdot f_{31,z_1})$$

$$\begin{aligned}
E_3 = & (f_{12,p} \cdot f_{32,q} - f_{12,q} \cdot f_{32,p} - f_{12,p} \cdot f_{31,r_1} + f_{12,q} \cdot f_{31,z_1}) \cdot (f_{12} \cdot f_{31} - \eta \cdot f_{32} \\
& - f_{21,r_0} \cdot q + f_{22,r_0} \cdot r_1 + f_{22,z_0} \cdot z_1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_4 = & (f_{21} \cdot f_{31} - f_{22} \cdot f_{31} + f_{12,r_0} \cdot r_1) \cdot (f_{22,p} \cdot f_{32,q} - f_{22,q} \cdot f_{32,p} + f_{32,p} \cdot f_{12,r_1} \\
& - f_{32,q} \cdot f_{21,z_1} - f_{22,p} \cdot f_{31,r_1} + f_{22,q} \cdot f_{31,z_1} - f_{12,r_1} \cdot f_{31,z_1} + f_{21,z_1} \cdot f_{31,r_1})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_1 &= \eta \cdot f_{22} \cdot f_{12,p} \cdot f_{22,q} - \eta \cdot f_{22} \cdot f_{12,q} \cdot f_{22,p} - \eta \cdot f_{22} \cdot f_{12,p} \cdot f_{12,r_1} + \eta \cdot f_{22} \cdot f_{12,q} \cdot f_{21,z_1} \\
&\quad - f_{12} \cdot f_{21} \cdot f_{12,p} \cdot f_{22,q} + f_{12} \cdot f_{21} \cdot f_{12,q} \cdot f_{22,p} + f_{12} \cdot f_{21} \cdot f_{12,p} \cdot f_{12,r_1} \\
&\quad - f_{12} \cdot f_{21} \cdot f_{12,q} \cdot f_{21,z_1}
\end{aligned}$$

Demostración. Sea el sistema de EDP descrito en el teorema que describe superficies inmersas en S^3 con 1-formas asociadas $w_i = f_{i1} dx + f_{i2} dy$, $i = 1, 2, 3$, w_{13} , w_{23} . Como f_{ij} , a , b , c son funciones diferenciables de z_0 , r_0 , z_1 , r_1 , p , q , entonces por el teorema 4.2 se cumplen las ecuaciones (4.19), (4.20), (4.21).

Como $f_{11} = \eta$, del teorema 4.2 se tiene

$$\begin{aligned}
& z_1 f_{12,z_0} + r_1 f_{12,r_0} + F f_{12,p} + G f_{12,q} + f_{21} f_{32} - f_{31} f_{22} = 0 \\
& -p f_{21,z_0} - F f_{21,z_1} - q f_{21,r_0} - G f_{21,r_1} + z_1 f_{22,z_0} + r_1 f_{22,r_0} + F f_{22,p} + G f_{22,q} + \\
& \qquad \qquad \qquad f_{12} f_{31} - \eta f_{32} = 0 \\
& -p f_{31,z_0} - F f_{31,z_1} - q f_{31,r_0} - G f_{31,r_1} + z_1 f_{32,z_0} + r_1 f_{32,r_0} + F f_{32,p} + G f_{32,q} + \\
& \qquad \qquad \qquad K (\eta f_{22} - f_{21} f_{12}) = 0
\end{aligned}$$

De la primera y segunda ecuación se obtiene F y G , luego reemplazando en la tercera ecuación se obtiene K . □

Teorema 4.4. *Un sistema de ecuaciones en derivadas parciales de la forma*

$$\begin{aligned}
p_x &= F(z_0, r_0, z_1, r_1, p, q) \\
q_x &= G(z_0, r_0, z_1, r_1, p, q)
\end{aligned}$$

describe superficies inmersas en S^3 con 1-formas asociadas $w_i = f_{i1} dx + f_{i2} dy$, $i = 1, 2, 3$ y $w_{13} = a w_1 + b w_2$, $w_{23} = b w_1 + c w_2$ tal que $f_{21} = \eta \in \mathbb{R}$ y f_{ij} , a , b , c son funciones diferenciables de z_0 , r_0 , z_1 , r_1 , p , q , entonces

$$\begin{aligned}
F = & \frac{f_{22,q} \cdot f_{11,z_0} \cdot p + f_{22,z_0} \cdot z_1 \cdot (f_{12,q} - f_{11,r_1})}{D_2} + \\
& \frac{(f_{12,q} - f_{11,r_1}) \cdot (f_{12} \cdot f_{31} - f_{11} \cdot f_{32} + f_{22,r_0} \cdot r_1)}{D_2} - \\
& \frac{f_{22,q} \cdot (\eta \cdot f_{32} - f_{22} \cdot f_{31} - f_{11,r_0} \cdot q + f_{12,r_0} \cdot r_1 + f_{12,z_0} \cdot z_1)}{D_2}
\end{aligned} \tag{4.33}$$

$$\begin{aligned}
G = & \frac{-f_{22,p} \cdot f_{11,z_0} \cdot p - f_{22,z_0} \cdot z_1 \cdot (f_{12,p} - f_{11,z_1})}{D_2} + \\
& \frac{f_{22,p} \cdot (\eta \cdot f_{32} - f_{22} \cdot f_{31} - f_{11,r_0} \cdot q + f_{12,r_0} \cdot r_1 + f_{12,z_0} \cdot z_1)}{D_2} - \\
& \frac{f_{11} \cdot f_{32} + f_{22,r_0} \cdot r_1}{D_2} - \frac{f_{12,p} - f_{11,z_1}}{f_{12} \cdot f_{31}}
\end{aligned} \tag{4.34}$$

donde $D_2 = f_{12,p} \cdot f_{22,q} - f_{12,q} \cdot f_{22,p} + f_{22,p} \cdot f_{11,r_1} - f_{22,q} \cdot f_{11,z_1}$

$$\begin{aligned}
K = & -\frac{f_{31,z_0} \cdot p}{\eta \cdot f_{12} - f_{11} \cdot f_{22}} \\
& + \frac{f_{11} \cdot f_{22} - \eta \cdot f_{12} - f_{31,r_0} \cdot q + f_{32,r_0} \cdot r_1 + f_{32,z_0} \cdot z_1}{\eta \cdot f_{12} - f_{11} \cdot f_{22}} \\
& - \frac{L_1 + L_2 - L_3 + L_4}{J_2}
\end{aligned} \tag{4.35}$$

Donde

$$\begin{aligned}
L_1 = & f_{22,z_0} \cdot z_1 \cdot (f_{12,p} \cdot f_{32,q} - f_{12,q} \cdot f_{32,p} + f_{32,p} \cdot f_{11,r_1} - f_{32,q} \cdot f_{11,z_1} \\
& - f_{12,p} \cdot f_{31,r_1} + f_{12,q} \cdot f_{31,z_1} - f_{11,r_1} \cdot f_{31,z_1} + f_{11,z_1} \cdot f_{31,r_1})
\end{aligned}$$

$$L_2 = f_{11,z_0} \cdot p \cdot (f_{22,p} \cdot f_{32,q} - f_{22,q} \cdot f_{32,p} - f_{22,p} \cdot f_{31,r_1} + f_{22,q} \cdot f_{31,z_1})$$

$$L_3 = (f_{22,p} \cdot f_{32,q} - f_{22,q} \cdot f_{32,p} - f_{22,p} \cdot f_{31,r_1} + f_{22,q} \cdot f_{31,z_1}) \cdot (\eta \cdot f_{32} - f_{22} \cdot f_{31} - f_{11,r_0} \cdot q + f_{12,r_0} \cdot r_1 + f_{12,z_0} \cdot z_1)$$

$$L_4 = (f_{12} \cdot f_{31} - f_{11} \cdot f_{32} + f_{22,r_0} \cdot r_1) \cdot (f_{12,p} \cdot f_{32,q} - f_{12,q} \cdot f_{32,p} + f_{32,p} \cdot f_{11,r_1} - f_{32,q} \cdot f_{11,z_1} - f_{12,p} \cdot f_{31,r_1} + f_{12,q} \cdot f_{31,z_1} - f_{11,r_1} \cdot f_{31,z_1} + f_{11,z_1} \cdot f_{31,r_1})$$

$$J_2 = \eta \cdot f_{12} \cdot f_{12,p} \cdot f_{22,q} - \eta \cdot f_{12} \cdot f_{12,q} \cdot f_{22,p} + \eta \cdot f_{12} \cdot f_{22,p} \cdot f_{11,r_1} - \eta \cdot f_{12} \cdot f_{22,q} \cdot f_{11,z_1} - f_{11} \cdot f_{22} \cdot f_{12,p} \cdot f_{22,q} + f_{11} \cdot f_{22} \cdot f_{12,q} \cdot f_{22,p} - f_{11} \cdot f_{22} \cdot f_{22,p} \cdot f_{11,r_1} + f_{11} \cdot f_{22} \cdot f_{22,q} \cdot f_{11,z_1}$$

Demostración. De igual manera que en la demostración del teorema 4.3, si el sistema de EDP descrito en el teorema describe superficies inmersas en S^3 con 1-formas asociadas $w_i = f_{i1}dx + f_{i2}dy$, $i = 1, 2, 3$, w_{13} , w_{23} . Como f_{ij} , a , b , c son funciones diferenciables de z_0 , r_0 , z_1 , r_1 , p , q , entonces por el teorema 4.2 se cumplen las ecuaciones (4.19), (4.20), (4.21).

Como $f_{21} = \eta$, del teorema 4.2 se tiene

$$\begin{aligned} -pf_{11,z_0} - Ff_{11,z_1} - qf_{11,r_0} - Gf_{11,r_1} + z_1f_{12,z_0} + r_1f_{12,r_0} + Ff_{12,p} + Gf_{12,q} + \eta f_{32} - f_{31}f_{22} &= 0 \\ z_1f_{22,z_0} + r_1f_{22,r_0} + Ff_{22,p} + Gf_{22,q} + f_{12}f_{31} - f_{11}f_{32} &= 0 \\ -pf_{31,z_0} - Ff_{31,z_1} - qf_{31,r_0} - Gf_{31,r_1} + z_1f_{32,z_0} + r_1f_{32,r_0} + Ff_{32,p} + Gf_{32,q} + K(f_{11}f_{22} - \eta f_{12}) &= 0 \end{aligned}$$

De la primera y segunda ecuación se obtiene F y G , luego reemplazando en la tercera ecuación se obtiene K .

□

Del teorema 4.3 y 4.4 obtenemos los siguientes corolarios, y estos a su vez corresponden al

teorema 3.13 y teorema 3.12 (respectivamente) de [KeTen21] realizado por Keti Tenenblat y Filipe Kelmer.

Corolario 4.2.3. *Si el sistema*

$$\begin{aligned} p_x &= F(z_0, r_0, z_1, r_1, p, q) \\ q_x &= G(z_0, r_0, z_1, r_1, p, q) \end{aligned}$$

describe superficies inmersas en la esfera S^3 con 1-formas asociadas $w_i = f_{i1} dx + f_{i2} dy$, con $i = 1, 2, 3$ y w_{13}, w_{23} . Si F y G no dependen de p y q , $K = -1$ y f_{ij} son funciones diferenciables de z_0, r_0, z_1, r_1 y $f_{11} = \eta$, entonces

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{W_1} (z_1 f_{21, r_1} f_{32, z_0} - z_1 f_{22, z_0} f_{31, r_1} - \eta f_{21, r_1} f_{22} + \eta f_{31, r_1} f_{32} + f_{12} f_{21} f_{21, r_1} - f_{12} f_{31} f_{31, r_1} \\ &\quad + f_{21, r_1} f_{32, r_0} r_1 - f_{22, r_0} f_{31, r_1} r_1) \end{aligned} \tag{4.36}$$

$$\begin{aligned} G &= \frac{1}{W_1} (-z_1 f_{21, z_2} f_{32, z_0} + z_1 f_{22, z_0} f_{31, z_1} + \eta f_{21, z_2} f_{22} - \eta f_{31, z_1} f_{32} - f_{12} f_{21} f_{21, z_2} + f_{12} f_{31} f_{31, z_1} \\ &\quad - f_{21, z_2} f_{32, r_0} r_1 + f_{22, r_0} f_{31, z_1} r_1) \end{aligned} \tag{4.37}$$

con $W_1 = f_{21, r_1} f_{31, z_1} - f_{21, z_2} f_{31, r_1} \neq 0$.

Demostración. El sistema de EDP cumple las hipotesis del teorema 4.2, entonces se cumplen las ecuaciones (4.20) y (4.21), como $f_{11} = \eta$, $K = -1$ y F, G, f_{ij} no dependen de p y q , se tiene

$$\begin{aligned} -F f_{21, z_1} - G f_{21, r_1} + z_1 f_{22, z_0} + r_1 f_{22, r_0} + f_{12} f_{31} - \eta f_{32} &= 0 \\ -F f_{31, z_1} - G f_{31, r_1} + z_1 f_{32, z_0} + r_1 f_{32, r_0} - \eta f_{22} + f_{21} f_{12} &= 0 \end{aligned}$$

De estas ecuaciones, hallamos una expresión para F y G que corresponden a las ecuaciones (4.36) y (4.37) respectivamente.

□

Corolario 4.2.4. *Sea el sistema*

$$\begin{aligned} p_x &= F(z_0, r_0, z_1, r_1, p, q) \\ q_x &= G(z_0, r_0, z_1, r_1, p, q) \end{aligned}$$

que describe superficies inmersas en la esfera S^3 con 1-formas asociadas $w_i = f_{i1} dx + f_{i2} dy$, con $i = 1, 2, 3$ y w_{13}, w_{23} . Si F y G no dependen de p y q , $K = -1$ y f_{ij} son funciones diferenciables de z_0, r_0, z_1, r_1 y $f_{21} = \eta$, entonces

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{W_2} (z_1 f_{11, r_1} f_{32, z_0} - z_1 f_{12, z_0} f_{31, r_1} + \eta f_{11, r_1} f_{12} - \eta f_{31, r_1} f_{32} - f_{11} f_{11, r_1} f_{22} + f_{11, r_1} f_{32, r_0} r_1 \\ &\quad - f_{12, r_0} f_{31, r_1} r_1 + f_{22} f_{31} f_{31, r_1}) \end{aligned} \quad (4.38)$$

$$\begin{aligned} G &= \frac{1}{W_2} (-z_1 f_{11, z_1} f_{32, z_0} + z_1 f_{12, z_0} f_{31, z_1} - \eta f_{11, z_1} f_{12} + \eta f_{31, z_1} f_{32} + f_{11} f_{11, z_1} f_{22} - f_{11, z_1} f_{32, r_0} r_1 \\ &\quad + f_{12, r_0} f_{31, z_1} r_1 - f_{22} f_{31} f_{31, z_1}) \end{aligned} \quad (4.39)$$

Con $W_2 = f_{11, r_1} f_{31, z_1} - f_{11, z_1} f_{31, r_1} \neq 0$.

Demostración. Análogo a la demostración del corolario 4.2.3 . □

Teorema 4.5. *Un sistema de ecuaciones en derivadas parciales de la forma*

$$\begin{aligned} p_x &= F(z_0, r_0, z_1, r_1, p, q) \\ q_x &= G(z_0, r_0, z_1, r_1, p, q) \end{aligned}$$

describe superficies inmersas en S^3 con 1-formas asociadas $w_i = f_{i1} dx + f_{i2} dy$, $i = 1, 2, 3$ y $w_{13} = aw_1 + bw_2$, $w_{23} = bw_1 + cw_2$, con curvatura gaussiana K conocida. Si a, b, c son funciones diferenciables de z_0, r_0, z_1, r_1, p, q , entonces

$$a = \frac{R_3 f_{21} - R_1 f_{22}}{f_{12} f_{21} - f_{11} f_{22}} \quad (4.40)$$

$$b = \frac{R_1 f_{12} - R_3 f_{11}}{f_{12} f_{21} - f_{11} f_{22}} \quad (4.41)$$

$$c = \frac{(K-1)(f_{12} f_{21} - f_{11} f_{22})^2 + (R_1 f_{12} - f_{11} R_3)^2}{(f_{12} f_{21} - f_{11} f_{22})(f_{21} R_3 - f_{22} R_1)} \quad (4.42)$$

donde R_1 y R_3 están dados por

$$R_1 = -\frac{S_1^2 f_{11} f_{22}^2 - S_1^2 f_{12} f_{21} f_{22} - S_1 S_3 f_{11} f_{21} f_{22} + S_1 S_3 f_{12} f_{21}^2 + f_{11}(K-1)(-f_{11} f_{22} + f_{12} f_{21})^2}{(f_{11} f_{22} - f_{12} f_{21})(S_1 f_{12} - S_3 f_{11})}$$

$$R_3 = -\frac{S_1 S_3 f_{11} f_{22}^2 - S_1 S_3 f_{21} f_{22} f_{12} - S_3^2 f_{11} f_{21} f_{22} + S_3^2 f_{21}^2 f_{12} + (K-1)(-f_{11} f_{22} + f_{12} f_{21})^2 f_{12}}{(f_{11} f_{22} - f_{12} f_{21})(S_1 f_{12} - S_3 f_{11})}$$

donde $S_1 := S_1(z_0, r_0, z_1, r_1)$, $S_3 := S_3(z_0, r_0, p, q)$.

Demostración. Del teorema 4.2, notemos que de la ecuación (4.24) f_{11} , f_{21} y f_{31} no dependen de p y q , de igual forma f_{12} , f_{22} y f_{32} no dependen de z_1 y r_1 .

Usando las últimas 4 ecuaciones de (4.22) se tiene

$$\begin{aligned} f_{11} a_p + f_{21} b_p &= 0 / \int dp \\ f_{11} a + f_{21} b &= R_1(z_0, r_0, z_1, r_1, q) \end{aligned}$$

y así tenemos

$$\begin{aligned} f_{11} a + f_{21} b &= R_1(z_0, r_0, z_1, r_1, q) \\ f_{11} a + f_{21} b &= R_2(z_0, r_0, z_1, r_1, p) \\ f_{12} a + f_{22} b &= R_3(z_0, r_0, r_1, p, q) \\ f_{12} a + f_{22} b &= R_4(z_0, r_0, z_1, p, q) \end{aligned} \quad (4.43)$$

De igual forma usando las últimas 4 ecuaciones de (4.23) se tiene

$$\begin{aligned}
f_{11}b + f_{21}c &= S_1(z_0, r_0, z_1, r_1, q) \\
f_{11}b + f_{21}c &= S_2(z_0, r_0, z_1, r_1, p) \\
f_{12}b + f_{22}c &= S_3(z_0, r_0, r_1, p, q) \\
f_{12}b + f_{22}c &= S_4(z_0, r_0, z_1, p, q)
\end{aligned} \tag{4.44}$$

Notemos que $R_1(z_0, r_0, z_1, r_1, q) = R_2(z_0, r_0, z_1, r_1, p)$,
entonces $R_1 := R_1(z_0, r_0, z_1, r_1)$

De igual forma

$$\begin{aligned}
R_3(z_0, r_0, r_1, p, q) &= R_4(z_0, r_0, z_1, p, q), \\
S_1(z_0, r_0, z_1, r_1, q) &= S_2(z_0, r_0, z_1, r_1, p), \\
S_3(z_0, r_0, r_1, p, q) &= S_4(z_0, r_0, z_1, p, q)
\end{aligned}$$

entonces

$$R_3 := R_3(z_0, r_0, p, q), \quad S_1 := S_1(z_0, r_0, z_1, r_1,), \quad S_3 := S_3(z_0, r_0, p, q)$$

De las ecuaciones (4.43) junto a las ecuaciones (4.44) y junto a $ac - b^2 + 1 = K$, donde la curvatura K viene conocida, y usando las igualdades anteriores, podemos formar los siguientes sistemas de ecuaciones

$$\begin{aligned}
f_{11}a + f_{21}b &= R_1(z_0, r_0, z_1, r_1) \\
f_{12}a + f_{22}b &= R_3(z_0, r_0, p, q) \\
ac - b^2 + 1 &= K
\end{aligned} \tag{4.45}$$

$$\begin{aligned}
f_{11}b + f_{21}c &= S_1(z_0, r_0, z_1, r_1) \\
f_{12}b + f_{22}c &= S_3(z_0, r_0, p, q) \\
ac - b^2 + 1 &= K
\end{aligned} \tag{4.46}$$

De (4.45), se obtiene

$$b = \frac{R_1 f_{12} - R_3 f_{11}}{f_{12} f_{21} - f_{11} f_{22}}$$

$$a = \frac{R_3 f_{21} - R_1 f_{22}}{f_{12} f_{21} - f_{11} f_{22}}$$

$$c = \frac{(K-1)(f_{12} f_{21} - f_{11} f_{22})^2 + (R_1 f_{12} - f_{11} R_3)^2}{(f_{12} f_{21} - f_{11} f_{22})(f_{21} R_3 - f_{22} R_1)}$$

De (4.46), se obtiene

$$c = \frac{S_1 f_{12} - S_3 f_{11}}{f_{12} f_{21} - f_{11} f_{22}}$$

$$b = \frac{S_3 f_{21} - S_1 f_{22}}{f_{12} f_{21} - f_{11} f_{22}}$$

$$a = \frac{(K-1)(f_{12} f_{21} - f_{11} f_{22})^2 + (S_3 f_{21} - f_{22} S_1)^2}{(f_{12} f_{21} - f_{11} f_{22})(f_{12} S_1 - f_{11} S_3)}$$

Si igualamos las expresiones de a , b y c se tiene el siguiente sistema no lineal de 3 ecuaciones y 4 variables (R_1 , R_3 , S_1 , S_3)

$$\begin{aligned} R_3 f_{21} - R_1 f_{22} &= \frac{(K-1)(f_{12} f_{21} - f_{11} f_{22})^2 + (S_3 f_{21} - f_{22} S_1)^2}{f_{12} S_1 - f_{11} S_3} \\ R_1 f_{12} - R_3 f_{11} &= S_3 f_{21} - S_1 f_{22} \\ \frac{(K-1)(f_{12} f_{21} - f_{11} f_{22})^2 + (R_1 f_{12} - f_{11} R_3)^2}{f_{21} R_3 - f_{22} R_1} &= S_1 f_{12} - S_3 f_{11} \end{aligned} \tag{4.47}$$

y obtenemos

$$R_1 = -\frac{S_1^2 f_{11} f_{22}^2 - S_1^2 f_{12} f_{21} f_{22} - S_1 S_3 f_{11} f_{21} f_{22} + S_1 S_3 f_{12} f_{21}^2 + f_{11} (K-1) (-f_{11} f_{22} + f_{12} f_{21})^2}{(f_{11} f_{22} - f_{12} f_{21})(S_1 f_{12} - S_3 f_{11})}$$

$$R_3 = -\frac{S_1 S_3 f_{11} f_{22}^2 - S_1 S_3 f_{21} f_{22} f_{12} - S_3^2 f_{11} f_{21} f_{22} + S_3^2 f_{21}^2 f_{12} + (K-1)(-f_{11} f_{22} + f_{12} f_{21})^2 f_{12}}{(f_{11} f_{22} - f_{12} f_{21})(S_1 f_{12} - S_3 f_{11})}$$

para ciertas funciones S_1, S_3 .

□

Modelamiento Discreto de Superficies Pseudo-Esféricas

Es capítulo es un resumen de un trabajo en curso, estamos interesados en modelar superficies pseudo-esféricas determinadas por ecuaciones de tipo pseudo-esférico, para eso vamos a mostrar algunos tópicos de geometría diferencial discreta, el método de diferencias finitas y como todo esto se aplica para modelar superficies pseudoesferas.

5.1. Geometría Diferencial Discreta

Para una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ descrita por una parametrización $\phi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ en que $\phi := \phi(\tau, \sigma)$, para $(\tau_0, \sigma_0) \in U$ consideramos sus curvas coordenadas

$$\begin{aligned} \alpha :]\tau_0 - \epsilon, \tau_0 + \epsilon[&\rightarrow S, \alpha(t) = \phi(t, \sigma_c) \\ \beta :]\sigma_0 - \epsilon, \sigma_0 + \epsilon[&\rightarrow S, \beta(t) = \phi(\tau_c, t) \end{aligned}$$

con $\sigma_c \in]\sigma_0 - \epsilon, \sigma_0 + \epsilon[$ y $\tau_c \in]\tau_0 - \epsilon, \tau_0 + \epsilon[$. Luego introducimos la red de Tchebyshef

Definición 5.1. *Las curvas coordenadas de una parametrización $\phi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$, constituyen una red de Tchebyshef si las longitudes de los lados opuestos de un cuadrilátero (formadas por estas curvas) son iguales.*

Afirmación 5.1. $\phi(\tau, \sigma)$ da una red de Tchebyshef $\Leftrightarrow \frac{\partial E}{\partial \sigma} = \frac{\partial G}{\partial \tau} = 0$, donde E y G son coeficientes de la primera forma fundamental que vimos en la sección 1.1.

Demostración. (\Rightarrow) Supongamos que $\phi(\tau, \sigma)$ da una red de Tchebyshef :

Supongamos que $\exists(\tau_0, \sigma_0) \in \mathbb{R}^2$ tal que $E_\sigma(\tau_0, \sigma_0) > 0$. Sea el rectángulo $R_\varepsilon =]\tau_0 - \varepsilon, \tau_0 + \varepsilon[\times]\sigma_0 - \varepsilon, \sigma_0 + \varepsilon[\subset \mathbb{R}^2$.
 $\Rightarrow E_\sigma(\tau, \sigma) > 0, \forall(\tau, \sigma) \in R_\varepsilon$

Sea S la superficie descrita por ϕ y sea $\alpha :]\tau_0 - \varepsilon, \tau_0 + \varepsilon[\rightarrow S$, definida como $\alpha(t) = \phi(t, \sigma)$ para $\sigma \in]\sigma_0 - \varepsilon, \sigma_0 + \varepsilon[$.

Sea r la función longitud de arco desde $-t_0$ hasta t_0 , entonces

$$\begin{aligned} r(\sigma) &= \int_{-t_0}^{t_0} \|\alpha'(t)\| dt \\ &= \int_{-t_0}^{t_0} \|\phi_t(t, \sigma)\| dt \\ &= \int_{-t_0}^{t_0} \sqrt{E(t, \sigma)} dt \end{aligned}$$

Pero r es constante (por hipótesis), entonces $r'(\sigma) = 0$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_{-t_0}^{t_0} \frac{E_\sigma}{2\sqrt{E}} dt &= 0 \\ \Rightarrow E_\sigma &= 0 \end{aligned}$$

Lo que es una contradicción, entonces $E_\sigma = 0$.

De igual forma supongamos que $\exists(\tau_0, \sigma_0)$ tal que $G_\tau(\tau_0, \sigma_0) > 0$.
 $\Rightarrow G_\tau(\tau, \sigma) > 0, \forall(\tau, \sigma) \in R_\varepsilon$

Sea $\beta :]\sigma_0 - \varepsilon, \sigma_0 + \varepsilon[\rightarrow S$, definida como $\beta(t) = \phi(\tau, t)$ para $\tau \in]\tau_0 - \varepsilon, \tau_0 + \varepsilon[$

Sea h la función longitud de arco desde $-t_0$ hasta t_0 . Entonces

$$\begin{aligned} h(\tau) &= \int_{-t_0}^{t_0} \|\beta'(t)\| dt \\ &= \int_{-t_0}^{t_0} \sqrt{G(\tau, t)} dt \end{aligned}$$

Pero h es constante (por hipótesis), entonces $h'(\tau) = 0 \Rightarrow G_\tau = 0$. Lo que es una contradicción, entonces $G_\tau = 0$.

(\Leftarrow) Supongamos que $\frac{\partial E}{\partial \sigma} = \frac{\partial G}{\partial \tau} = 0$:

Las líneas horizontales se parametrizan por

$$\alpha_0(t) = \phi(\tau_0 + (\tau_1 - \tau_0)t, \sigma_0)$$

$$\alpha_1(t) = \phi(\tau_0 + (\tau_1 - \tau_0)t, \sigma_1)$$

Las líneas verticales se parametrizan por

$$\beta_0(t) = \phi(\tau_0, \sigma_0 + (\sigma_1 - \sigma_0)t)$$

$$\beta_1(t) = \phi(\tau_1, \sigma_0 + (\sigma_1 - \sigma_0)t)$$

La parametrización media es

$$\alpha_m(t) = \phi(\tau_0 + (\tau_1 - \tau_0)t, \sigma)$$

$$\beta_m(t) = \phi(\tau, \sigma_0 + (\sigma_1 - \sigma_0)t)$$

Sean $s : [\sigma_0, \sigma_1] \rightarrow \mathbb{R}$ y $r : [\tau_0, \tau_1] \rightarrow \mathbb{R}$ las funciones de longitud de arco, dadas por

$$s(\sigma) = \int_0^1 \|\alpha'_m(t)\| dt$$

$$r(\tau) = \int_0^1 \|\beta'_m(t)\| dt$$

Luego

$$\begin{aligned} s(\sigma) &= \int_0^1 \|\alpha'_m(t)\| dt \\ &= \int_0^1 \|\phi_\tau \cdot (\tau_1 - \tau_0) + \phi_\sigma \cdot 0\| dt \\ &= \int_0^1 (\tau_1 - \tau_0) \|\phi_\tau\| dt \\ &= \int_0^1 (\tau_1 - \tau_0) \sqrt{E} dt \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} s'(\sigma) &= \int_0^1 (\tau_1 - \tau_0) \frac{E_\sigma}{2\sqrt{E}} dt \\ &= \int_0^1 (\tau_1 - \tau_0) \frac{0}{2\sqrt{E}} dt = 0 \end{aligned}$$

Así $s(\sigma) = s(\sigma_0), \forall \sigma \in [\sigma_0, \sigma_1]$, de hecho $s(\sigma_1) = s(\sigma_0)$. Por lo que las longitudes de las líneas horizontales del cuadrilátero son iguales.

También

$$\begin{aligned} r(\tau) &= \int_0^1 \|\beta'_m(t)\| dt \\ &= \int_0^1 \|\phi_\tau \cdot 0 + \phi_\sigma \cdot (\sigma_1 - \sigma_0)\| dt \\ &= \int_0^1 (\sigma_1 - \sigma_0) \sqrt{G} dt \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} r'(\tau) &= \int_0^1 (\sigma_1 - \sigma_0) \frac{G_\tau}{2\sqrt{G}} dt \\ &= \int_0^1 (\sigma_1 - \sigma_0) \frac{0}{2\sqrt{G}} dt = 0 \end{aligned}$$

Así $r(\tau) = r(\tau_0), \forall \tau \in [\tau_0, \tau_1]$, de hecho $r(\tau_1) = r(\tau_0)$. Por lo que las longitudes de las líneas verticales del cuadrilátero son iguales.

□

Definición 5.2. Sea la superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ con parametrización $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$. Sean e, f y g coeficientes de la segunda forma fundamental de S . Las curvas $\tau : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se llaman curvas asintóticas si satisfacen

$$e(\tau')^2 + 2f\tau'\sigma' + g(\sigma')^2 = 0 \quad (5.1)$$

Notemos que si $\tau = \text{const}$ y $\sigma = \sigma(t)$ entonces $g = 0$, y si $\tau = \tau(t)$ y $\sigma = \text{const}$ entonces $e = 0$.

Usando coordenadas asintóticas τ, σ se puede reconstruir una función f que describa una superficie con $K = -1$ desde su aplicación de Gauss N al resolver la EDP:

$$\begin{aligned} f_\tau &= N \times N_\tau \\ f_\sigma &= -N \times N_\sigma \end{aligned}$$

Usando las coordenadas

$$\begin{aligned}x &= \tau + \sigma \\t &= \tau - \sigma\end{aligned}$$

tenemos $f := f(x(\tau, \sigma), t(\tau, \sigma))$ y $N := N(x(\tau, \sigma), t(\tau, \sigma))$, entonces

$$\begin{aligned}f_\tau &= f_x + f_t, & N_\tau &= N_x + N_t; \\f_\sigma &= f_x - f_t, & N_\sigma &= N_x - N_t;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow f_x + f_t &= N \times (N_x + N_t) \\f_x - f_t &= N \times (N_t - N_x)\end{aligned}$$

Lo que nos queda $f_x = N \times N_t$ y $f_t = N \times N_x$.

Definición 5.3. Una aplicación $f : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ describe una K -superficie discreta si:

1. $|f_{i+1,j} - f_{i,j}|$ es independiente de j .
2. $|f_{i,j+1} - f_{i,j}|$ es independiente de i .
3. Cada vertice $f_{i,j}$ junto con sus vecinos $f_{i-1,j}$, $f_{i+1,j}$, $f_{i,j-1}$, $f_{i,j+1}$ están en el mismo plano.

Si conocemos el campo vectorial normal N a la superficie y consideramos una malla de $n \times m$ puntos dentro del dominio de N , entonces se prueba en [Bo00] que una inmersión discreta $f : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de la superficie está determinada por las siguientes ecuaciones recursivas:

$$\begin{aligned}f_{i+1,j} - f_{i,j} &= N_{i,j} \times N_{i+1,j} \\f_{i,j+1} - f_{i,j} &= N_{i,j+1} \times N_{i,j}\end{aligned} \tag{5.2}$$

con $0 \leq i \leq n$, $0 \leq j \leq m$ y denotamos

$$N_{i,j} := N(\tau_i, \sigma_j)$$

$$f_{i,j} := f(\tau_i, \sigma_j)$$

5.2. Modelamiento Discreto de las Superficies Pseudo-Esféricas

Primero hablaremos del método de diferencias finitas que se usa para resolver numéricamente ecuaciones diferenciales parciales, luego explicaremos como modelar superficies pseudo-esféricas de manera discreta (en que se calcula el vector normal y luego se usa la formula recursiva (5.2) para hallar la inmersión). Finalmente realizamos un modelamiento genérico para la pseudoesfera.

Para el cálculo del vector normal de la superficie, se resuelven unas ecuaciones diferenciales parciales de orden 1, las cuales no son triviales en general y es útil utilizar un método numérico para resolver estas ecuaciones. Para ello, elegimos el método de diferencias finitas para EDP's de orden 1 y se trata de lo siguiente:

Sea la ecuación diferencial parcial $F(x, t, u, u_x, u_t) = 0$ en que $u := u(x, t)$ y se sabe que u está definida en una malla $[a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$, si esta malla la dividimos en $n \times m$ puntos entonces tenemos las constantes de paso

$$h = \frac{b - a}{n}, \quad k = \frac{d - c}{m}$$

Entonces la malla queda determinada por los puntos

$$\begin{aligned} x_i &= a + ih \\ t_j &= c + jk \end{aligned} \tag{5.3}$$

con $0 \leq i \leq n$, $0 \leq j \leq m$. Luego se definen las fórmulas de aproximación para las derivadas de orden 1 [SanRa15]:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_j) \simeq \frac{u(x_{i+1}, t_j) - u(x_i, t_j)}{h} \tag{5.4}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j) \simeq \frac{u(x_i, t_{j+1}) - u(x_i, t_j)}{k} \tag{5.5}$$

Estas fórmulas se remplazan en la EDP que se quiere resolver.

Consideremos un dominio $U = [a, b] \times [c, d]$ de la inmersión y una cantidad de puntos $n \times m$

en U para construir el vector normal y la inmersión. Para el cálculo del vector normal $N(\tau, \sigma) = (N^1(\tau, \sigma), N^2(\tau, \sigma), N^3(\tau, \sigma))$, se usa el siguiente procedimiento genérico :

1. A partir de los coeficientes de la primera forma fundamental y segunda forma fundamental, se usa las ecuaciones de Weingarten (que vimos en la sección 1.3) para obtener un sistema de EDP del vector N .
2. Aplicar el método de diferencia finitas para obtener una relación recursiva del vector N .
3. Usar las condiciones de borde para ir obteniendo puntos del vector N .

Una vez obtenido el vector N , podemos calcular la inmersión $f(\tau, \sigma) = (f^1(\tau, \sigma), f^2(\tau, \sigma), f^3(\tau, \sigma))$ con las ecuaciones (5.2), se usa el siguiente procedimiento genérico :

1. Calcular un punto inicial $f_{0,0} := f(\tau_0, \sigma_0)$.
2. Calcular $f_{i+1,j} = f_{i,j} + N_{i,j} \times N_{i+1,j}$.
3. Calcular $f_{i,j+1} = f_{i,j} + N_{i,j+1} \times N_{i,j}$.
4. Los dos pasos anteriores se realizan hasta que $i \leq n$ y $j \leq m$.
5. Enviar los puntos de la inmersión a un archivo de salida y graficar la superficie que determina esos puntos.

En el siguiente ejemplo, hallaremos una inmersión discreta aplicando el procedimiento descrito, solo que asumiremos que ya conocemos el vector normal.

Ejemplo 5.1. Consideremos la pseudoesfera descrita por $\phi : [0, 2\pi) \times (0, \pi) \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\phi(\tau, \sigma) = (\cos \tau \sin \sigma, \cos \sigma + \ln(\tan \frac{\sigma}{2}), \sin \tau \sin \sigma)$

dada una cantidad de puntos $n \times m$ para la malla $U = [0, 2\pi) \times (0, \pi)$, tenemos las constantes de paso

$$h = \frac{2\pi}{n}, k = \frac{\pi}{m}$$

y la malla queda determinada por los puntos

$$\tau_i = \frac{2\pi}{n}i$$

$$\sigma_j = \frac{\pi}{m}j$$

con $0 \leq i \leq n$, $0 \leq j \leq m$. Luego evaluamos el vector normal N de la pseudoesfera descrita por ϕ sobre los puntos de la malla, entonces

$$N(\tau_i, \sigma_j) = \frac{\phi_\tau \times \phi_\sigma}{|\phi_\tau \times \phi_\sigma|}$$

$$= (-\cos(\tau_i) \cos(\sigma_j), \sin(\sigma_j), -\sin(\tau_i) \cos(\sigma_j))$$

Dada una condición inicial $f((\tau_0, \sigma_0)) := f_{0,0}$, utilizamos la fórmula (5.2) para hallar la inmersión discreta f , la cual describe la superficie mostrada en la figura (5.1).

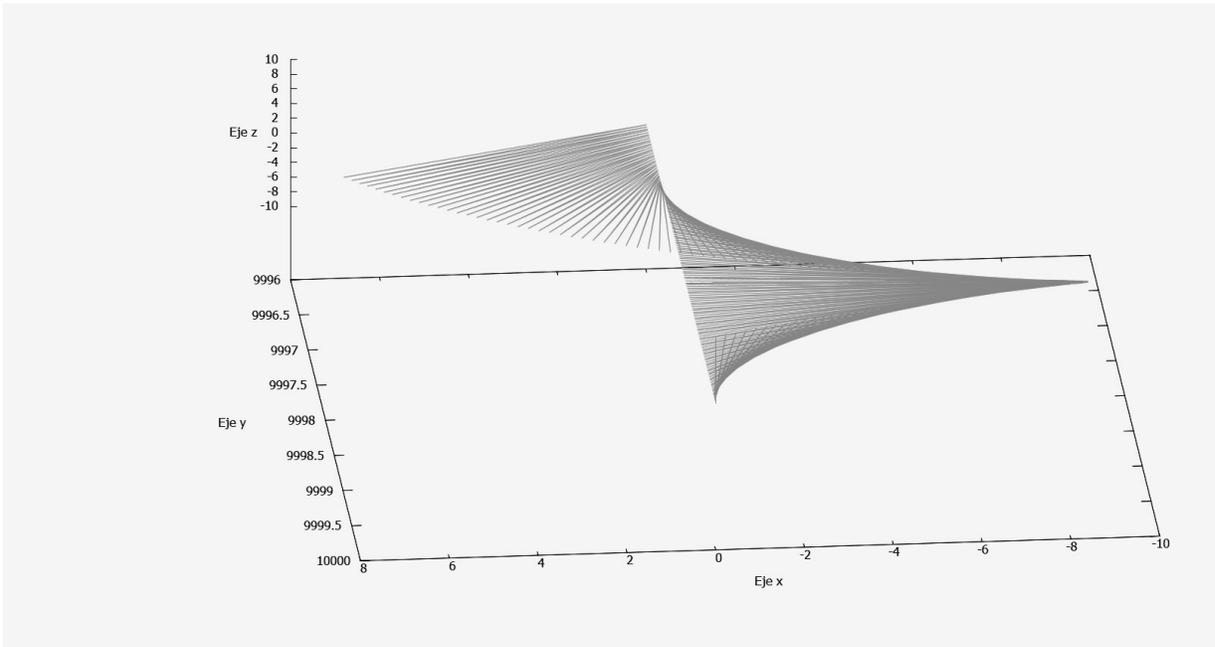


Figura 5.1: Modelamiento Discreto de Pseudoesfera Clásica

5.2.1. Modelamiento de la pseudoesfera

En esta subsección construiremos las ecuaciones de Weingarten (que vimos en la sección 1.3) para el vector normal N , luego aplicamos el método de diferencias finitas y planteamos un algoritmo para obtener N .

Para la superficie descrita por $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$, con $U =]0, 2\pi[\times]0, \pi[$, dada por $\varphi(\tau, \sigma) = (\cos(\tau) \sin(\sigma), \cos(\sigma) + \ln(\tan(\frac{\sigma}{2})), \sin(\tau) \sin(\sigma))$

supongamos que conocemos los coeficientes de la primera forma fundamental y segunda forma fundamental que son

$$\begin{aligned} E &= \sin^2(\sigma), \quad F = 0, \quad G = \cot^2(\sigma) \\ e &= \cos(\sigma) \sin^2(\sigma), \quad f = 0, \quad g = -\cot(\sigma) \end{aligned}$$

Luego planteamos las ecuaciones de Weingarten, tenemos que

$$\begin{pmatrix} l_1 & l_3 \\ l_2 & l_4 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \quad (5.6)$$

entonces

$$l_1 = -\cot(\sigma), \quad l_2 = 0, \quad l_3 = 0, \quad l_4 = -\tan(\sigma)$$

y

$$\begin{aligned} N_\tau &= -\cot(\sigma)X \\ N_\sigma &= -\tan(\sigma)Y \end{aligned} \quad (5.7)$$

Luego

$$N_\tau - N_\sigma = \tan(\sigma)Y - \cot(\sigma)X \quad (5.8)$$

Donde X e Y son vectores tangentes a la superficie, supongamos que conocemos estos vectores, asignados como

$$X := \varphi_u(\pi, \frac{\pi}{4}) = (0, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}})$$

$$Y := \varphi_v(\pi, \frac{\pi}{4}) = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$$

supongamos que conocemos las condiciones de borde , dadas por

$$\begin{aligned} N(\tau, \pi) &= (\cos(\tau), 0, \sin(\tau)) \\ N(0, \sigma) &= (-\cos(\sigma), \sin(\sigma), 0) \end{aligned}$$

Hasta ahora tenemos las ecuaciones de Weingarter junto a las condiciones de borde, por lo que tenemos un problema de sistema de ecuaciones en derivadas parciales con condiciones de borde.

Aproximemos por el método de diferencias finitas, consideramos el dominio $U =]0, 2\pi[\times \{]0, \frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2}, \pi[\}$, calculamos las constantes de paso

$$h = \frac{2\pi}{n}, \quad k = \frac{\pi}{m}$$

y la malla de U queda determinada por

$$\begin{aligned} \tau_i &= \frac{2\pi i}{n} \\ \sigma_j &= \frac{\pi j}{m} \end{aligned} \tag{5.9}$$

con $i = 0, 1, \dots, n$ y $j = 0, 1, \dots, m$. Para simplificar supondremos que $n = m$, entonces $h = 2k$, usamos el método de diferencias finitas como sigue

$$\begin{aligned} N_\tau - N_\sigma &= \tan(\sigma)Y - \cot(\sigma)X \\ \frac{N_{i+1,j} - N_{i,j}}{2k} - \frac{N_{i,j+1} - N_{i,j}}{k} &= \tan(\sigma)Y - \cot(\sigma)X \\ N_{i+1,j} + N_{i,j} - 2N_{i,j+1} &= 2k(\tan(\sigma)Y - \cot(\sigma)X) \\ N_{i+1,j} + N_{i,j} - 2N_{i,j+1} &= \frac{2\pi}{n}(\tan(\sigma)Y - \cot(\sigma)X) \end{aligned}$$

Pero

$$\frac{2\pi}{n}(\tan(\sigma)Y - \cot(\sigma)X) = \frac{\sqrt{2\pi}}{n}(-\tan(\sigma), \tan(\sigma), \cot(\sigma))$$

y como $N_{i,j} = (N_{i,j}^1, N_{i,j}^2, N_{i,j}^3)$, entonces obtenemos las ecuaciones recursivas

$$\begin{aligned}
N_{i+1,j}^1 + N_{i,j}^1 - 2N_{i,j+1}^1 &= -\frac{\sqrt{2}\pi}{n} \tan(\sigma_j) \\
N_{i+1,j}^2 + N_{i,j}^2 - 2N_{i,j+1}^2 &= \frac{\sqrt{2}\pi}{n} \tan(\sigma_j) \\
N_{i+1,j}^3 + N_{i,j}^3 - 2N_{i,j+1}^3 &= \frac{\sqrt{2}\pi}{n} \cot(\sigma_j)
\end{aligned}$$

con las condiciones

$$\begin{aligned}
N_{i,n}^1 &= \cos(\tau_i) \\
N_{i,n}^2 &= 0 \\
N_{i,n}^3 &= \sin(\tau_i) \\
N_{0,j}^1 &= -\cos(\sigma_j) \\
N_{0,j}^2 &= \sin(\sigma_j) \\
N_{0,j}^3 &= 0
\end{aligned}$$

Por lo que planteamos el siguiente algoritmo para calcular los parametros de la malla del dominio U de la pseudoesfera y así definir las condiciones de borde

Algorithm 1 Algoritmo para las condiciones de borde del Vector Normal

```
 $i \leftarrow 0$   
while  $i \leq n$  do  
   $u_i \leftarrow \frac{2\pi i}{n}$   
   $i \leftarrow i + 1$   
end while  
while  $j \leq n$  do  
   $v_j \leftarrow \frac{\pi j}{n}$   
   $j \leftarrow j + 1$   
end while  
 $i \leftarrow 0$   
 $j \leftarrow n$   
while  $i \leq n$  do  
   $N_{i,j}^1 \leftarrow \cos(\tau_i)$   
   $N_{i,j}^2 \leftarrow 0$   
   $N_{i,j}^3 \leftarrow \sin(\tau_i)$   
   $i \leftarrow i + 1$   
end while  
 $j \leftarrow 0$   
 $i \leftarrow 0$   
while  $j \leq n$  do  
   $N_{i,j}^1 = -\cos(\sigma_j)$   
   $N_{i,j}^2 = \sin(\sigma_j)$   
   $N_{i,j}^3 = 0$   
   $j \leftarrow j + 1$   
end while
```

Luego planteamos el algoritmo para calcular las coordenadas del vector normal N .

Algorithm 2 Algoritmo para Vector Normal de Pseudoesfera Clásica

```
 $i \leftarrow 1$   
while  $i \leq n$  do  
   $j \leftarrow n - 1$   
  while  $j \geq 0$  do  
     $N_{i,j}^1 = -\frac{\sqrt{2}\pi}{n} \tan(\sigma_j) + 2N_{i-1,j+1}^1 - N_{i-1,j}^1$   
     $N_{i,j}^2 = \frac{\sqrt{2}\pi}{n} \tan(\sigma_j) + 2N_{i-1,j+1}^2 - N_{i-1,j}^2$   
     $N_{i,j}^3 = \frac{\sqrt{2}\pi}{n} \cot(\sigma_j) + 2N_{i-1,j+1}^3 - N_{i-1,j}^3$   
     $j \leftarrow j - 1$   
  end while  
   $i \leftarrow i + 1$   
end while
```

Así una vez obtenido N , usamos las ecuaciones (5.2) para hallar la inmersión f (usando el procedimiento que explicamos al principio de la sección). Luego se grafica f y así podremos visualizar la pseudoesfera de manera discreta.

Como proyección futura queda realizar el modelamiento discreto para las superficies descritas por las ecuaciones de Sine-Gordon y Burgers.

Programa en Maple de teorema 2.1 y 2.2

En este apéndice mostramos el código en Maple, en el cual se encontró 1-formas asociadas a la ecuación $u_{xt} = u + c_0u^2 + c_1uu_x + c_2uu_{xx} + c_3u_x^2 + d_0u^3 + d_1u^2u_x + d_2u^2u_{xx} + d_3uu_x^2$. En que con unas 1-formas y ciertas condiciones sobre las constantes c_i y d_i , la ecuación es de tipo pseudo-esférico y con otras unas 1-formas y ciertas condiciones sobre c_i y d_i , la ecuación es de tipo esférico.

El teorema 2.1 de la sección 2.3, establece que la siguiente ecuacion diferencial

$$u_{xt} = u + c_0u^2 + c_1uu_x + c_2uu_{xx} + c_3u_x^2 + d_0u^3 + d_1u^2u_x + d_2u^2u_{xx} + d_3uu_x^2$$

con $u := u(x, t)$, $c_i, d_i \in \mathbb{R}$ para $i = 0, 1, 2, 3$. La ecuación es de tipo pseudo-esférico si y solo si

1. Se cumplen $d_0 = 0$, $d_1 = 0$, $d_3 = 2d_2$, $c_0 = c_1 = c_2 = c_3 = 0$. En este caso la ecuación es

$$u_{xt} = u + d_2u^2u_{xx} + 2d_2uu_x^2$$

El código realizado en Maple, con las 1-formas encontradas w_1 , w_2 y w_3 asociadas a la ecuación, es el siguiente

```
restart;  
with(PDEtools);  
with(DifferentialGeometry);  
with(JetCalculus);  
with(LinearAlgebra);
```

DGsetup([x, t], [u], E, 3);

DE := DifferentialEquationData([u[1, 2] = d0*u[]³ + d1*u[]²*u[1] + d2*u[]²*u[1, 1] + d3*u[]*u[1]² + c0*u[]² + c1*u[]*u[1] + c2*u[]*u[1, 1] + c3*u[1]² + u[], [u[1, 2]]);

DE1 := Prolong(DE, 3);

T1 := Transformation(DE1);

c2 := 0; c3 := c2; c0 := 0; c1 := 0;

d3 := 2*d2; d1 := 0; d0 := 0;

D1 := 0

D2 := -(-2*A1²*C1²*c2*d2*eta² + 2*C1⁴*c2*d2*eta² + A1⁶*c2 - 2*A1⁴*C1²*c2 + A1²*C1⁴*c2 - 2*sqrt(2)*d2*eta*C1²*sqrt(-d2*(A1 - C1)*(A1 + C1)*(-2*d2*eta² + A1² - C1²)))/(2*d2*eta*(A1 - C1)²*(A1 + C1)²*C1);

A2 := sqrt(-2*d2*(-2*d2*eta² + A1² - C1²)*(A1² - C1²))*C1/(2*d2*(A1² - C1²));

C2 := -(A1²*c1 - 2*A1*A2*d2 - C1²*c1)/(2*d2*C1);

G12(u[]) := A1*c1*u[]²/2 + A1*d1*u[]³/3 + D1*C2*exp(A1*eta*u[]/C2)/(A1*eta) - A2*d2*u[]² + 3*C1*C2*u[]²*d0/(A1*eta²) + C1*u[]²*c0/eta - C1²*c1*u[]²/(2*A1) - C1²*d1*u[]³/(3*A1) - C2*C1²*u[]²*d1/(A1²*eta) + u[]³*C1*d0/eta + C1*C2*d2*u[]²/A1 + 2*C1*C2*c0*u[]/(A1*eta²) + 6*C1*C2²*d0*u[]/(A1²*eta³) + 2*C1*C2²*d2*u[]/(A1²*eta) - C2*C1²*c1*u[]/(A1²*eta) - 2*C1²*C2²*d1*u[]/(A1³*eta²) + C1*C2*c2*u[]/A1 - A2*c2*u[] + C1*u[]/eta + D2

G32(u[]) := (A1*C1*d0*u[]³ + A1*C1*c0*u[]² - A1*C2*d1*u[]² - A1*C2*c1*u[] + 2*A2*C2*d2*u[] + A1*C1*u[] + A2*C2*c2 + C2*diff(G12(u[]), u[]))/(C1*eta)

G32(u[]) := (A1*C1*d0*u[]³ + A1*C1*c0*u[]² - A1*C2*d1*u[]² - A1*C2*c1*u[] + 2*A2*C2*d2*u[] + A1*C1*u[] + A2*C2*c2 + C2*diff(G12(u[]), u[]))/(C1*eta)

$$F22(u[]) := -(-C1*d2*eta*u[]^2 + A1 * d1 * u[]^2 - C1 * c2 * eta * u[] + A1 * c1 * u[] - 2 * A2 * d2 * u[] - A2 * c2 - diff(G12(u[]), u[]))/C1$$

$$F11(u[1]) := A1*u[1] + A2;$$

$$F31(u[1]) := C1*u[1] + C2;$$

$$F12(u[], u[1]) := u[]*(d2*u[] + c2)*F11(u[1]) + G12(u[]);$$

$$F32(u[], u[1]) := u[]*(d2*u[] + c2)*F31(u[1]) + G32(u[]);$$

$$\text{omega1} := F11(u[1])*Dx \text{ plus } F12(u[], u[1])*Dt;$$

$$\text{omega2} := eta*Dx \text{ plus } F22(u[])*Dt;$$

$$\text{omega3} := F31(u[1])*Dx \text{ plus } F32(u[], u[1])*Dt;$$

$$a1 := \text{evalDG}(\text{HorizontalExteriorDerivative}(\text{omega1}) \text{ minus } (\text{omega3} \text{ wedge } \text{omega2}));$$

$$a2 := \text{evalDG}(\text{HorizontalExteriorDerivative}(\text{omega2}) \text{ minus } (\text{omega1} \text{ wedge } \text{omega3}));$$

$$a3 := \text{evalDG}(\text{HorizontalExteriorDerivative}(\text{omega3}) \text{ minus } (\text{omega1} \text{ wedge } \text{omega2}));$$

$$S := [Dx \text{ wedge } Dt];$$

$$a11 := \text{GetComponents}(a1, S); a22 := \text{GetComponents}(a2, S); a33 := \text{GetComponents}(a3, S);$$

$$a111 := a11[1]; a222 := a22[1]; a333 := a33[1];$$

$$pa1 := \text{simplify}(\text{Pullback}(T1, a111));$$

$$pa2 := \text{simplify}(\text{Pullback}(T1, a222));$$

$$pa3 := \text{simplify}(\text{Pullback}(T1, a333));$$

2. se cumplen $c_0 = \frac{1}{2}(-c_2\eta^2 + c_1\eta)$, $c_3 = c_2$, $d_0 = \frac{1}{3}(-d_2\eta^2 + d_1\eta)$, $d_3 = 2d_2$. En este caso la ecuación es

$$u_{xt} = u + \frac{1}{3}(-d_2\eta^2 + d_1\eta)u^3 + d_1u^2u_x + d_2u^2u_{xx} + 2d_2uu_x^2 + \frac{1}{2}(-c_2\eta^2 + c_1\eta)u^2 + c_1uu_x + c_2uu_{xx} + c_2u_x^2$$

El código realizado en Maple, con las 1-formas encontradas w_1 , w_2 y w_3 asociadas a la ecuación, es el siguiente

```
restart;
with(PDEtools);
with(DifferentialGeometry);
with(JetCalculus);
with(LinearAlgebra);
DGsetup([x, t], [u], E, 3);

DE := DifferentialEquationData([u[1, 2] = d0*u[]^3 + d1 * u[]^2 * u[1] + d2 * u[]^2 * u[1, 1] +
d3 * u[] * u[1]^2 + c0 * u[]^2 + c1 * u[] * u[1] + c2 * u[] * u[1, 1] + c3 * u[1]^2 + u[], [u[1, 2]]);

DE1 := Prolong(DE, 3);
T1 := Transformation(DE1);

c0 := -1/2*c2*eta^2 + 1/2 * c1 * eta; c3 := c2;

d0 := -1/3*d2*eta^2 + 1/3 * d1 * eta; d3 := 2 * d2;
D1 := 0;

D2 := C2*(C2*c2*eta^2 - C2 * c1 * eta + C1 * eta + 2 * C2 * c0)/(C1 * eta^3);

A1 := C1; A2 := C2;

G12(u[]) := A1*c1*u[]^2/2 + A1 * d1 * u[]^3/3 + D1 * C2 * exp(A1 * eta * u[]/C2)/(A1 * eta) -
A2 * d2 * u[]^2 + 3 * C1 * C2 * u[]^2 * d0/(A1 * eta^2) + C1 * u[]^2 * c0/eta - C1^2 * c1 * u[]^2/(2 *
A1) - C1^2 * d1 * u[]^3/(3 * A1) - C2 * C1^2 * u[]^2 * d1/(A1^2 * eta) + u[]^3 * C1 * d0/eta + C1 *
C2 * d2 * u[]^2/A1 + 2 * C1 * C2 * c0 * u[]/(A1 * eta^2) + 6 * C1 * C2^2 * d0 * u[]/(A1^2 * eta^3) +
2 * C1 * C2^2 * d2 * u[]/(A1^2 * eta) - C2 * C1^2 * c1 * u[]/(A1^2 * eta) - 2 * C1^2 * C2^2 * d1 *
```

$$u[]/(A1^3 * eta^2) + C1 * C2 * c2 * u[]/A1 - A2 * c2 * u[] + C1 * u[]/eta + D2$$

$$G32(u[]) := (A1 * C1 * d0 * u[]^3 + A1 * C1 * c0 * u[]^2 - A1 * C2 * d1 * u[]^2 - A1 * C2 * c1 * u[] + 2 * A2 * C2 * d2 * u[] + A1 * C1 * u[] + A2 * C2 * c2 + C2 * diff(G12(u[]), u[]))/(C1 * eta)$$

$$F22(u[]) := -(-C1 * d2 * eta * u[]^2 + A1 * d1 * u[]^2 - C1 * c2 * eta * u[] + A1 * c1 * u[] - 2 * A2 * d2 * u[] - A2 * c2 - diff(G12(u[]), u[]))/C1$$

$$F11(u[1]) := A1 * u[1] + A2;$$

$$F31(u[1]) := C1 * u[1] + C2;$$

$$F12(u[], u[1]) := u[] * (d2 * u[] + c2) * F11(u[1]) + G12(u[]);$$

$$F32(u[], u[1]) := u[] * (d2 * u[] + c2) * F31(u[1]) + G32(u[])$$

$$\text{omega1} := F11(u[1]) * Dx \text{ plus } F12(u[], u[1]) * Dt;$$

$$\text{omega2} := eta * Dx \text{ plus } F22(u[]) * Dt;$$

$$\text{omega3} := F31(u[1]) * Dx \text{ plus } F32(u[], u[1]) * Dt;$$

$$a1 := \text{evalDG}(\text{HorizontalExteriorDerivative}(\text{omega1}) \text{ minus } (\text{omega3} \text{ wedge } \text{omega2}));$$

$$a2 := \text{evalDG}(\text{HorizontalExteriorDerivative}(\text{omega2}) \text{ minus } (\text{omega1} \text{ wedge } \text{omega3}));$$

$$a3 := \text{evalDG}(\text{HorizontalExteriorDerivative}(\text{omega3}) \text{ minus } (\text{omega1} \text{ wedge } \text{omega2}));$$

$$S := [Dx \text{ wedge } Dt];$$

$$a11 := \text{GetComponents}(a1, S); a22 := \text{GetComponents}(a2, S); a33 := \text{GetComponents}(a3, S);$$

$$a111 := a11[1]; a222 := a22[1]; a333 := a33[1];$$

pa1 := simplify(Pullback(T1, a111));

pa2 := simplify(Pullback(T1, a222));

pa3 := simplify(Pullback(T1, a333));

3. se cumplen $d_0 = d_1 = 0$, $d_3 = d_2$, $c_2 = \frac{4d_2\eta}{C_1^3} \sqrt{-d_2^2\eta^2 - C_1^2 d_2}$, $c_0 = c_1 = 0$, $c_3 = \frac{c_2}{2}$. En este caso la ecuación es

$$u_{xt} = u + d_2 u^2 u_{xx} + d_2 u u_x^2 + \frac{4\eta d_2 u u_{xx}}{C_1^3} \sqrt{-d_2^2\eta^2 - C_1^2 d_2} + \frac{2\eta d_2 u_x^2}{C_1^3} \sqrt{-d_2^2\eta^2 - C_1^2 d_2}$$

El código realizado en Maple, con las 1-formas encontradas w_1 , w_2 y w_3 asociadas a la ecuación, es el siguiente

restart;

with(PDEtools);

with(DifferentialGeometry);

with(JetCalculus);

with(LinearAlgebra);

DGsetup([x, t], [u], E, 3);

DE := DifferentialEquationData([u[1, 2] = d0*u[]³ + d1 * u[]² * u[1] + d2 * u[]² * u[1, 1] + d3 * u[] * u[1]² + c0 * u[]² + c1 * u[] * u[1] + c2 * u[] * u[1, 1] + c3 * u[1]² + u[], [u[1, 2]]);

DE1 := Prolong(DE, 3);

T1 := Transformation(DE1);

d0 := 0; d1 := 0; d3 := d2;

c2 := 4*sqrt(-d2² * eta² - C1² * d2) * eta * d2/C1³

c0 := 0; c1 := 0; c3 := c2/2;

B1 := c2*(2*d2*eta² + C1²)/(2 * d2 * eta);

B2 := c2*(-c2*eta + B1)/(2*d2);

$$G32(u[]) := 0;$$

$$F22(u[]) := d2*eta*u[]^2 + B1 * u[] + B2;$$

$$G12(u[]) := -diff(F22(u[]), u[])/C1$$

$$C2 := 0;$$

$$F11(u[1]) := -(-2*C1^2*d2*u[1]^2 + C1^2*d3*u[1]^2 + C1^2*c1*u[1] + 2*d2*eta^2 + C1^2)/(C1*(-c2*eta + B1));$$

$$F31(u[1]) := C1*u[1] + C2;$$

$$F12(u[], u[1]) := u[]*(d2*u[] + c2)*F11(u[1]) + G12(u[]);$$

$$F32(u[], u[1]) := u[]*(d2*u[] + c2)*F31(u[1]) + G32(u[])$$

$$\text{omega1} := F11(u[1])*Dx \text{ plus } F12(u[], u[1])*Dt;$$

$$\text{omega2} := eta*Dx \text{ plus } F22(u[])*Dt;$$

$$\text{omega3} := F31(u[1])*Dx \text{ plus } F32(u[], u[1])*Dt;$$

$$a1 := \text{evalDG}(\text{HorizontalExteriorDerivative}(\text{omega1}) \text{ minus } (\text{omega3 wedge omega2}));$$

$$a2 := \text{evalDG}(\text{HorizontalExteriorDerivative}(\text{omega2}) \text{ minus } (\text{omega1 wedge omega3}));$$

$$a3 := \text{evalDG}(\text{HorizontalExteriorDerivative}(\text{omega3}) \text{ minus } (\text{omega1 wedge omega2}));$$

$$S := [Dx \text{ wedge } Dt];$$

$$a11 := \text{GetComponents}(a1, S); a22 := \text{GetComponents}(a2, S); a33 := \text{GetComponents}(a3, S);$$

```
a111 := a11[1]; a222 := a22[1]; a333 := a33[1];
```

```
pa1 := simplify(Pullback(T1, a111));
```

```
pa2 := simplify(Pullback(T1, a222));
```

```
pa3 := simplify(Pullback(T1, a333));
```

El teorema 2.2 de la sección 2.3, establece que la siguiente ecuación diferencial

$$u_{xt} = u + c_0u^2 + c_1uu_x + c_2uu_{xx} + c_3u_x^2 + d_0u^3 + d_1u^2u_x + d_2u^2u_{xx} + d_3uu_x^2$$

con $u := u(x, t)$, $c_i, d_i \in \mathbb{R}$ para $i = 0, 1, 2, 3$. La ecuación es de tipo esférico si y solo si

$$c_i = 0, \text{ para } i = 0, 1, 2, 3, d_0 = d_1 = 0, d_3 = 2d_2$$

con 1-formas asociadas que se mostraron en la sección 2.3. El código realizado en Maple, con las 1-formas encontradas w_1 , w_2 y w_3 asociadas a la ecuación, es el siguiente

```
restart;
with(PDEtools);
with(DifferentialGeometry);
with(JetCalculus);
with(LinearAlgebra);
DGsetup([x, t], [u], E, 3);

DE := DifferentialEquationData([u[1, 2] = d0*u[]^3 + d1 * u[]^2 * u[1] + d2 * u[]^2 * u[1, 1] +
d3 * u[] * u[1]^2 + c0 * u[]^2 + c1 * u[] * u[1] + c2 * u[] * u[1, 1] + c3 * u[1]^2 + u[], [u[1, 2]]);

DE1 := Prolong(DE, 3);
T1 := Transformation(DE1);

c0 := 0; c1 := 0; c3 := 0; c2 := c3;
```

d3 := 2*d2; d1 := 0; d0 := 0;
D1 := 0;

A2 := (-sqrt(2)*sqrt(d2*(A1^2+C1^2)*(-2*d2*eta^2+A1^2+C1^2))*C1)/(2*d2*(A1^2+C1^2))

C2 := (A1^2 * c1 - 2 * A1 * A2 * d2 + C1^2 * c1)/(2 * d2 * C1);
D2 := A2 * (A2 * C1 * c3 * eta + 2 * A2^2 * d2 - C1^2)/(eta^2 * C1^2);

G12(u[]) := simplify(((2*A1^2*(A1^2*d1+C1^2*d1)*eta^3-6*A1^3*C1*d0*eta^2)*u[]^3)/(6*A1^3*eta^3)+((2*A1^2*((3*A1^2*c1)/2-3*A1*A2*d2-3*C1*(d2*C2-C1*c1/2))*eta^3-6*A1*C1*(A1^2*c0+C1*C2*d1)*eta^2+18*d0*A1^2*C2*C1*eta)*u[]^2)/(6*A1^3*eta^3)+((2*A1^2*(-3*A1*A2*c3-3*C1*C2*c3)*eta^3-6*A1*C1*(C1*C2*c1-2*C2^2*d2+A1^2)*eta^2+18*((2*A1^2*c0)/3+(2*C1*C2*d1)/3)*C2*C1*eta-36*A1*C1*C2^2*d0)*u[])/(6*A1^3*eta^3)+(6*D2*A1^3*eta^3-6*D1*C2*exp(-A1*eta*u[]/C2)*A1^2*eta^2)/(6*A1^3*eta^3))

F22(u[]) := simplify(-(-C1*d2*eta*u[]^2 + A1 * d1 * u[]^2 - C1 * c3 * eta * u[] + A1 * c1 * u[] - 2 * A2 * d2 * u[] - A2 * c3 - diff(G12(u[]), u[]))/C1)

G32(u[]) := simplify((A1*C1*d0*u[]^3 + A1 * C1 * c0 * u[]^2 - A1 * C2 * d1 * u[]^2 - A1 * C2 * c1 * u[] + 2 * A2 * C2 * d2 * u[] + A1 * C1 * u[] + A2 * C2 * c2 + C2 * diff(G12(u[]), u[]))/(C1*eta))

F11(u[1]) := A1*u[1] + A2

F31(u[1]) := C1*u[1] + C2

F32(u[], u[1]) := simplify(u[]*(d2*u[] + c2)*F31(u[1]) + G32(u[]))

F12(u[], u[1]) := simplify(u[]*(d2*u[] + c2)*F11(u[1]) + G12(u[]))

omega1 := F11(u[1])*Dx plus F12(u[], u[1])*Dt;

omega2 := eta*Dx plus F22(u[])*Dt;

```

omega3 := F31(u[1])*Dx plus F32(u[], u[1])*Dt;

a1 := evalDG(HorizontalExteriorDerivative(omega1) minus (omega3 wedge omega2));

a2 := evalDG(HorizontalExteriorDerivative(omega2) minus (omega1 wedge omega3));

a3 := evalDG(HorizontalExteriorDerivative(omega3) plus (omega1 wedge omega2));

S := [Dx wedge Dt];

a11 := GetComponents(a1, S); a22 := GetComponents(a2, S); a33 := GetComponents(a3,
S);

a111 := a11[1]; a222 := a22[1]; a333 := a33[1];

pa1 := simplify(Pullback(T1, a111));

pa2 := simplify(Pullback(T1, a222));

pa3 := simplify(Pullback(T1, a333));

```

Bibliografía

- [Be18] Benson, A., “*Superficies inmersas en \mathbb{R}^3 descritas por ecuaciones de tipo pseudo-esférico*”, Tesis de Magister, Departamento de Matemática y Ciencia de la Computación, Universidad de Santiago de Chile (2018).
- [BeReDiEDiJ24] Benson, A., Reyes, E., Diaz Palencia J., Diaz Velenzuela E., “*The Integrable Rosenau-Hyman Equations: Analysis, symmmetries and Geometric Content*”. Preprint, Universidad de Santiago de Chile (2024).
- [BeHiRe24] Benson, A., Hidalgo, A., & Reyes, E., “*On equations of Lund-Regge type*”. Preprint, Universidad de Santiago de Chile (2024).
- [Bo00] Bobenko, A.I., “*Discrete Differential Geometry*”, Birkhäuser Verlag AG. 57-65 (2000).
- [Be03] Berger, M., “*A panoramic View of Riemannian Geometry*”, Springer (2003).
- [Ca76D] Do Carmo, M., “*Differential Geometry of Curves and Surface*”, Instituto Nacional de Matemática Pura y Aplicada (1976).
- [Ca76R] Do Carmo, M., “*Riemannian Geometry*”, Instituto Nacional de Matemática Pura y Aplicada (1976).
- [Ca94] Do Carmo, M., “*Differential forms and applications. Translated from the 1971 Portuguese original*”, Universitext. Springer-Verlag (1994).
- [CD16] Catalano Ferraioli, D., & De Oliveira Silva, L.A., “*Second order evolution equations which describe pseudospherical surfaces*”, J. Differential Equations 260 (11) 8072-8108, (2016).
- [CD17] Catalano Ferraioli, D., & De Oliveira Silva, L.A., “*Local isometric immersions of pseudospherical surfaces described by evolution equations in conservation law form*”,

Journal of Mathematical Analysis and Applications 446 1606 - 1631 (2017).

- [CD22] Catalano Ferraioli, D., & Castro, T., & Tenenblat., “*Isometric immersions and differential equations describing pseudospherical surfaces*”, Journal of Mathematical Analysis and Applications (2022).
- [Ch11] Chamizo, F., “*Geometria Diferencial*”, Universidad Autónoma de Madrid (2011).
- [Che54] Chern, S.S., “*An Elementary Proof of the Existence of Isothermal Parameters on a Surface*”, University of Chicago (1954).
- [Cr14] Crampon, M., “*Introducción a la geometría diferencial y riemanniana*”, Escuela CIMPA (2014).
- [Cr20] Crane, K., “*Discrete Differential Geometry: An Applied Introduction*”, ACM, New York (2020).
- [CT15] Castro Silva, T., & Tenenblat, K., “*Third Order Differential Equations Describing Pseudospherical Surfaces*”, J. Differential Equations 259 4897-4923 (2015).
- [Di02] Ding, Q., & Tenenblat, K., “*On Differential Systems Describing Surfaces of Constant Curvature*”, Journal of Differential Equations 184, 185–214 (2002).
- [FAJ] Fajstrup, L., “*On Christoffel Symbols and Teorema Egregium*”, Aalborg University.
- [Gug77] Guggenheimer, H., “*Differential Geometry*”, Polytechnic institute of New York (1977).
- [HerRe20] Hernández, R ., Euler, M., Euler, N., Reyes, E., “*Compacton Equations and Integrability: The Rosenau-Hyman and Cooper-Shepard-Sodano Equations*”, Discrete and Continuous Dynamical System (2020).
- [Hi65] Hicks, N., “*Notes on Differential Geometry*”, The University of Michigan (1965).
- [Ho17] Hone, A., Novikov, V., & Wang, J., “*Generalizations of the short pulse equation*”, Letters in Mathematical Physics (2017).
- [IvLand03] Ivey, T., Landsberg, J.M., “*Cartan for Beginners: Differential Geometry Via Moving Frames and Exterior Differential Systems*”, Amer Mathematical Society (2003).

- [Kap10] Kapouleas, N., Yang, S., “*Minimal surfaces in the three-sphere by doubling the Clifford torus*”, American Journal of Mathematics (2010).
- [Ko10] Kose, Z., *Geometric and numerical methods for bonnet problems and surface construction*, Faculty of Texas Tech University (2010).
- [KKT15] Kahouadji, N., Kamran, N., & Tenenblat, K., “*Local isometric immersions of pseudo-spherical surfaces and evolution equations, in: Hamiltonian Partial Differential Equations and Applications*”, Fields Institute Communications vol. 75, Springer (2015).
- [KKT16] Kahouadji, N., Kamran N., & Tenenblat, K., “*Second-order equations and local isometric immersions of pseudo-spherical surfaces*”, Comm. Anal. Geom 24 605-643 (2016).
- [KeTen21] Kelmer, F., Tenenblat, K., “*On a class of systems of hyperbolic equations describing pseudo-spherical or spherical surfaces*”, Mathematics Subject Classification (2021).
- [KO94] Konno, K. & Oono, H., “*New coupled integrable dispersionless equations*”, J. Physical Soc. Japan 63 (1994).
- [KTA11] Kose, Z., Toda, M., & Aulisa, E., “*Solving Bonnet problems to construct families of surfaces*”, Balkan Journal of Geometry and Its Applications Vol.16, No.2, 70-80 (2011).
- [LR76] Lund, F., Regge, T., “*Unified approach to strings and vortices with soliton solutions*”, Phys. Rev. D14(6), 1524–1535 (1976).
- [Lu77] Lund, F., “*Example of a relativistic completely integrable Hamiltonian system*”, Physical Review Letter vol 38 (1977).
- [Lu78] Lund, F., “*Classical solvable field theory model*”, annal of physics 115 (1978).
- [Pe04] Pérez, J., “*Geometría Riemanniana*”, Universidad de Granada (2004).
- [Pr09] Pressley, A., “*Elementary Differential Geometry*”, Springer-Verlag (2009).
- [Ra89] Rabelo, M., “*On Equations Which Describe pseudospherical Surfaces*”, Studies in Applied Mathematics 81:221-248 (1989).

- [Re97] Reyes, E.G., “*Pseudo-Spherical Surfaces and Integrability of Evolution Equations*”, McGill University (1997).
- [Re01] Reyes, E.G., “*On generalized Bäcklund transformations for equations describing pseudo-spherical surfaces*”, Journal of Geometry and Physics (2001).
- [Re11] Reyes, E.G., “*Equations of pseudo-spherical type (after S.S. Chern and K. Tenenblat)*”, Results Math. 60 53-101 (2011).
- [Ro05] Rosenau, P., “*What is a Compacton*”, Notices of the Ams (2005).
- [Sa06] Sakovich, A., Sakovich, S., “*Solitary Wave Solutions of the Short Pulse Equation*”, Belarusian State University (2006).
- [SanRa15] Santamaría, A., Ramirez, J., “*Diferencias Finitas Asistido con Matlab en la Solución de Ecuaciones Diferenciales Parciales Hiperbólicas*”, Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo (2015).
- [ScWa04] Schäfer, T., Wayne, C.E., “*Propagation of ultra-short optical pulses in cubic nonlinear media*”, Physica D 196, 90–105 (2004).
- [St69] Stoker, J., “*Differential Geometry*”, Wiley-Interscience New York (1969).
- [Ten98] Tenenblat, K., “*Transformation of Manifold and Applications to Differential Equations*”, Addison Wesley Longman (1998).
- [TenCher86] Tenenblat, K., Chern, S.S., “*Pseudospherical Surfaces and Evolution Equations*”, Elsevier Science Publishing (1986).
- [Va10] Vargas, R., “*Geometría Diferencial*”, Pontificia Universidad Católica de Chile (2010).