Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia
Departamento de Matemática y Ciencia de la Computación

Un estudio cualitativo para ecuaciones pseudo-diferenciales de coeficiente variable

Por
Juan Patricio Márquez Zavala

Profesor Guía:
Dr.

Tesis presentada al Departamento de Matemática y Ciencia de la Computación de la Facultad de Ciencia de la Universidad de Santiago de Chile, para optar al grado de Doctor en Ciencia con Mención Matemática.

Santiago - Chile
Diciembre, 2024

Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia
Departamento de Matemática y Ciencia de la Computación

Los miembros de la Comisión Calificadora certifican que han leído y recomiendan a la Facultad de Ciencia para la aceptación la tesis titulada "**Un estudio cualitativo para ecuaciones pseudo-diferenciales de coeficiente variable**" de **Juan Patricio Márquez Zavala** en cumplimiento parcial de los requisitos para obtener el grado de Doctor en Ciencia con Mención Matemática . Comisión compuesta por:

Profesor Director USACH
Orientador1.

Profesor Director (OTRA) INST.
Orientador2.

Profesor Informante
Dra.

Profesor Informante
Dra.

Profesor Informante
Dr.

Director Doctorado Ciencia con
Mención Matemática
Quien corresponda.

Director Depto. Matemática
y Ciencia de la Computación
Quien corresponda.

Diciembre, 2024

Se puede agregar alguna cita hermosa.

Pablo Neruda.

Agradecimientos

Juan Patricio Márquez Zavala
Diciembre, 2024

Abstract

In this thesis we....

Keywords: Fourier transform; tempered distributions; Fourier multiplier; Pseudo-differential operator; symbol.

Resumen

En esta tesis ...

Palabras clave: Transformada de Fourier; distribuciones temperadas; multiplicador de Fourier; operador pseudo-diferencial; símbolo.

Tabla de contenidos

Introducción

El objetivo principal en los dos primeros capítulos de esta tesis, consiste en el estudio de existencia, unicidad, regularidad y representación de soluciones para una clase de ecuaciones pseudo-diferenciales de coeficiente variable donde el símbolo de cada operador pseudo-diferencial es de variables separadas. En el tercer capítulo, estudiamos el problema de Cauchy determinado a partir de un operador pseudo-diferencial de coeficientes constantes. La tesis está compuesta por los siguientes cuatro capítulos:

En el Capítulo 1 estudiamos una clase de operadores pseudo-diferenciales definidos sobre espacios L^p con peso. En este capítulo estudiamos la solubilidad del problema lineal

$$A(u) = f$$

donde $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y A es un operador-pseudo diferencial (de coeficientes variables y de variables separadas) cuyo símbolo pertenece a una clase de símbolos que denotamos por $S^{\beta}_{s,p}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. El dominio del operador está definido en un espacio L^p con una medida con peso de Muckenhoupt. En este dominio, el operador A está definido vía transformada de Fourier. Interpretamos el coeficiente variable a partir de pesos de Muckenhoupt. Posteriormente, estudiamos problemas no lineales

$$A(u) = V(\cdot, u)$$

con métodos de punto fijo. Este trabajo está fuertemente inspirado en el artículo [BPR19] en el cual se estudian ecuaciones pseudo-diferenciales (de coeficientes constantes) de la forma

$$(1 + a(-\Delta))^{s/2})u = V(\cdot, u)$$

donde a es un "símbolo"perteneciente a una clase denotada por $\mathcal{G}^{\beta}_{s}(\mathbb{R}^n)$.

El Capítulo 2 es una adaptación del capítulo 1 a un contexto periódico.

En el Capítulo 3 estudiamos el problema de evolución definido a partir de un operador A pseudo-diferencial (coeficientes constantes). Este trabajo está inspirado en el artículo [PR16] y [GKLP14]

En el Capítulo 4 presentamos preguntas abiertas surgidas en este trabajo.

Capítulo 1

Ecuaciones pseudo-diferenciales de coeficiente variable sobre espacios $L^p(\mathbb{R}^n)$ con peso

En este capítulo estudiamos el problema lineal asociado a un operador pseudo-diferencial A de coeficiente variable (caso de variables separadas). Posteriormente estudiamos problemas no lineales con métodos de punto fijo. La estrategia es la siguiente: mediante supuestos sobre el símbolo del operador A, interpretamos al operador vía transformada de Fourier. La parte espacial del símbolo del operador A es interpretada como un peso de Muckenhoupt (Definición 1.2) y la parte de frecuencia se estudia mediante supuestos naturales de elipticidad y de control sobre el crecimiento de derivadas de forma asintótica Definición 1.12.

Estudiamos el problema lineal

$$A(u) = f$$

donde $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y A es un operador-pseudo diferencial cuyo símbolo pertenece a una clase de símbolos que denotamos por $\mathcal{S}^{\beta}_{s,p}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. El dominio del operador está definido dentro de un espacio L^p con peso. En este dominio, el operador A se define vía transformada de Fourier periódica. Lo relevante de este trabajo consiste en el hecho de que A es un operador de coeficiente variable. Estudiamos el caso cuando el símbolo del operador es de variables separadas, interpretando el coeficiente variable como un peso de Muckenhoupt. Posteriormente, estudiamos problemas no lineales

$$A(u) = V(\cdot, u)$$

con métodos de punto fijo.

1.1 Preliminares

En esta sección presentamos los preliminares para el presente capítulo. En adelante $1 < p < \infty$ y todas las funciones son medibles en el sentido de Lebesgue. La medida de Lebesgue es denotada de manera usual por dx y también por $d\xi$. La transformada de Fourier es utilizada en el sentido distribucional y es denotada por $\mathcal{F}$ o también por $\widehat{\ }$. La transformada de Fourier inversa es denotada por $\mathcal{F}^{-1}$.

Definición 1.1. *(Peso) [Gra09, Cap. 9, Sec. 9.1] Un peso (o función peso) es una función* $w\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *positiva (casi en todas partes) y localmente integrable sobre* $\mathbb{R}^n$*. Notacionalmente* $w \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ *y* $w > 0$ *(casi en todas partes).*

Definición 1.2. *(Clase de Muckenhoupt) [Kur80, NOS16] La clase de Muckenhoupt, denotada por* $A_p(\mathbb{R}^n)$*, es el conjunto de todos los pesos* w *que satisfacen*

$$A_p(w) := \sup_B \left(\frac{1}{|B|}\int_B w(x)\,dx\right)\left(\frac{1}{|B|}\int_B w(x)^{1/(1-p)}\,dx\right)^{p-1} < \infty$$

donde el supremo es considerado sobre todas las bolas B *del espacio* $\mathbb{R}^n$*. La constante* $A_p(w)$ *se denomina la constante característica del peso* w*. La notación* $|B|$ *denota la medida de Lebesgue de cada bola* B*. Un peso en la clase de Muckenhoupt se denomina un peso de Muckenhoupt.*

Observación 1.1. *De manera equivalente, la Definición 1.2 también es posible con cubos (con lados paralelos a los ejes) en vez de bolas [Gra09, Cap. 9, Obs. 9.1.2]. Esto se debe a que*

$$\int_{Q_{a,R'}} u(x)\,dx \leq \int_{B(a,R)} u(x)\,dx \leq \int_{Q_{a,R}} u(x)\,dx, \quad R > 0 \tag{1.1}$$

se cumple para cualquier función u *no negativa y localmente integrable. Aquí* $Q_{a,R'}$ *es un cubo con centro en el punto* $a \in \mathbb{R}^n$ *y lado de largo* $R' = R/\sqrt{n}$ *y* $B(a,R)$ *es la bola abierta con centro en* a *y radio* R*.*

Las funciones

- $x \mapsto |x|^\gamma, \quad -n < \gamma < n(p-1)$.
- $x \mapsto (1+|x|)^\gamma, \quad -n < \gamma < n(p-1)$.
- $x \mapsto \log^\gamma(2+|x|), \quad \alpha \in \mathbb{R}$.
- $x \mapsto \log^\gamma(2+|x|^{-1}),\ \gamma \in \mathbb{R}$.
- $x \mapsto \operatorname{dist}(x,M)^\alpha$, $-(n-k) < \gamma < (n-k)(p-1)$ donde M es una variedad compacta de dimensión k

donde $x \in \mathbb{R}^n$, son ejemplos de pesos de Muckenhoupt [FS97, Sch07]. Adicionalmente a los ejemplos anteriores, translaciones y dilataciones isotrópicas aplicadas a pesos de Muckenhoupt, siguen siendo pesos de Muckenhoupt [NOS16, Prop. 2.1 (v)].

Proposición 1.1. *(Relación de inclusión en la clase de Muckenhoupt) [DI19, Sec. 2, Eq. (2.1)] Si* $1 < p \leq q < \infty$*, entonces se cumple la inclusión* $A_p(\mathbb{R}^n) \subset A_q(\mathbb{R}^n)$

A continuación, definimos un espacio importante en este trabajo:

Definición 1.3. *(Espacio* L^p *con peso) Sea* $w \in A_p(\mathbb{R}^n)$ *un peso de Muckenhoupt. El espacio* L^p *con peso, denotado por* $L^p_w(\mathbb{R}^n)$*, es definido por*

$$L^p_w(\mathbb{R}^n) := \left\{ u\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \text{ medible: } \|u\|_{L^p_w(\mathbb{R}^n)} = \left\| w^{1/p} u \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} < \infty \right\}$$

Observación 1.2. *El espacio* $L^p_w(\mathbb{R}^n)$ *es un espacio de Banach con la norma* $\|\cdot\|_{L^p_w(\mathbb{R}^n)}$.

El espacio L^p con peso es isomorfo con el espacio $L^p(\mathbb{R}^n)$ usual.

Proposición 1.2. *(Espacio* L^p *con peso isomorfo a* L^p*) Sea* w *un peso (no necesariamente de Muckenhoupt). El espacio* $L^p_w(\mathbb{R}^n)$ *es isomorfo con el espacio* $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Demostración. La aplicación lineal $T\colon L^p_w(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)$ definida por $T(u) = w^{1/p}u$ es un isomorfismo. La aplicación inversa es $T^{-1}(u) = \frac{u}{w^{1/p}}$. □

En los siguientes resultados presentamos algunos espacios de funciones que son densos en el espacio L^p con peso:

Proposición 1.3. *(Densidad del espacio de Schwartz en el espacio* L^p *con peso) [Mil82, Lem. 2.1], [HMW73] Sea* $w \in A_p(\mathbb{R}^n)$ *un peso de Muckenhoupt. El espacio de Schwartz es denso en* $L^p_w(\mathbb{R}^n)$ *con la norma* $\|\cdot\|_{L^p_w(\mathbb{R}^n)}$.

Proposición 1.4. *(Densidad del espacio de funciones suaves con soporte compacto en el espacio* L^p *con peso) [Sam02, Cap. 7, Lem. 7.32] Sea* $w \in A_p(\mathbb{R}^n)$ *un peso de Muckenhoupt. El espacio* $C^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ *de funciones suaves con soporte compacto es denso en* $L^p_w(\mathbb{R}^n)$ *con la norma* $\|\cdot\|_{L^p_w(\mathbb{R}^n)}$.

También es posible tener resultados de densidad cuando el peso no es necesariamente de Muckenhoupt:

Proposición 1.5. *Sea* $1 \leq p < \infty$ *y* w *un peso. El espacio* $L^2_w(\mathbb{R}^n) \cap L^p_w(\mathbb{R}^n)$ *es denso en* $L^p_w(\mathbb{R}^n)$ *con la norma* $\|\cdot\|_{L^p_w(\mathbb{R}^n)}$.

Demostración. Sea $u \in L^p_w(\mathbb{R}^n)$, por definición, $w^{1/p}u \in L^p(\mathbb{R}^n)$. La intersección de espacios $L^2(\mathbb{R}^n) \cap L^p(\mathbb{R}^n)$ es denso en $L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1 \leq p < \infty)$ [SS11, p. 66], luego, existe una sucesión $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset L^2(\mathbb{R}^n) \cap L^p(\mathbb{R}^n)$ de modo que $u_k \to w^{1/p}u$ en $L^p(\mathbb{R}^n)$. Se sigue que, $\frac{u_k}{w^{1/p}} \to u$ en $L^p_w(\mathbb{R}^n)$ con $\left\{\frac{u_k}{w^{1/p}}\right\}_{k\in\mathbb{N}} \subset L^2_w(\mathbb{R}^n) \cap L^p_w(\mathbb{R}^n)$. □

Proposición 1.6. *[BT92, Lem. 1]. Sea* w *una función continua y positiva sobre* $\mathbb{R}^n$. *El espacio* $C^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ *de funciones suaves y de soporte compacto es denso en* $L^p_w(\mathbb{R}^n)$ *con la norma* $\|\cdot\|_{L^p_w(\mathbb{R}^n)}$.

El siguiente resultado es clave para el trabajo ya que permite identificar el espacio L^p con peso, con distribuciones temperadas. Esto permite aplicar la transformada de Fourier sobre funciones en $L^p_w(\mathbb{R}^n)$ en un sentido distribucional.

Proposición 1.7. *(El espacio* L^p *con peso se identifica con distribuciones temperadas) [Mil82, Sec. 3], [DG24, Sec. 8, Prop 8.1] Sea* $w \in A_p(\mathbb{R}^n)$ *un peso de Muckenhoupt. Una función en el espacio* $L^p_w(\mathbb{R}^n)$ *puede ser identificada con una distribución temperada.*

Observación 1.3. *Sea $w \in A_p(\mathbb{R}^n)$ un peso de Muckenhoupt. La medida $w\,dx$ es una medida doble, es decir, dado $\lambda > 0$, se cumple que $w(\lambda B) \leq \lambda^{np} A_p(w) w(B)$ para toda bola B de $\mathbb{R}^n$ [DG24], [Gra09, Cap 9. Prop. 9.1.5 (9)]*

En [Sch07, Sch09], el espacio potencial de Bessel es definido a partir de distribuciones temperadas. En [Mil82, Sec. 3], dicho espacio es definido, identificando a cada función en el espacio L^p con peso (con peso de Muckenhoupt), con una distribución temperada (Proposición 1.7). En este trabajo, seguimos este último modo de definir tal espacio:

Definición 1.4. *(Espacio potencial de Bessel con peso) Sea $s \in \mathbb{R}$ un parámetro y $w \in A_p(\mathbb{R}^n)$ un peso de Muckenhoupt. El espacio potencial de Bessel con peso (también espacio de Sobolev fraccionario con peso), denotado por $H^{s,p}_w(\mathbb{R}^n)$, es definido por*

$$H^{s,p}_w(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in L^p_w(\mathbb{R}^n) \colon \; \|u\|_{H^{s,p}_w(\mathbb{R}^n)} := \left\| \mathcal{F}^{-1}\left((1+|\xi|^2)^{s/2} \widehat{u}(\xi) \right) \right\|_{L^p_w(\mathbb{R}^n)} < \infty \right\}$$

Observación 1.4. *El espacio potencial de Bessel con peso $H^{s,p}_w(\mathbb{R}^n)$ con la norma $\|\cdot\|_{H^{s,p}_w(\mathbb{R}^n)}$, es un espacio de Banach [Mil82, Sec. 3, (f)].*

La siguiente definición es formal pues no se precisa el espacio de funciones donde el operador actúa, pero es útil entregar esta definición para desarrollar cierta terminología cuando hablemos de multiplicadores de Fourier.

Definición 1.5. *(Operador multiplicador de Fourier) [FHL20] Sea $m \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ una función. Un operador multiplicador de Fourier es un operador T_m de la forma*

$$T_m(u) = \mathcal{F}^{-1}\left(m(\xi) \widehat{u}(\xi) \right)$$

Definición 1.6. *(Multiplicador de Fourier para espacios L^p con peso) [AM08] Sea $w \in A_p(\mathbb{R}^n)$ un peso de Muckenhoupt. Una función $m \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ se denomina un multiplicador de Fourier para el espacio $L^p_w(\mathbb{R}^n)$ si el operador multiplicador de Fourier $T_m \colon S(\mathbb{R}^n) \subset L^p_w(\mathbb{R}^n) \to L^p_w(\mathbb{R}^n)$, definido por*

$$T_m(u) = \mathcal{F}^{-1}\left(m(\xi) \widehat{u}(\xi) \right),$$

donde $S(\mathbb{R}^n)$ es el espacio de Schwartz, se extiende a un operador acotado sobre $L^p_w(\mathbb{R}^n)$. Más precisamente (usando la misma notación T_m para la extensión),

$$\|T_m(u)\|_{L^p_w(\mathbb{R}^n)} \leq C_{p,w} \|u\|_{L^p_w(\mathbb{R}^n)}, \quad u \in L^p_w(\mathbb{R}^n) \tag{1.2}$$

para alguna constante $C_{p,w} > 0$. El espacio de multiplicadores de Fourier es un espacio de Banach con la norma $\|m\| := \|T_m\|_{L^p_w(\mathbb{R}^n) \to L^p_w(\mathbb{R}^n)}$

Observación 1.5. *Notemos que si m es un multiplicador de Fourier para $L^p_w(\mathbb{R}^n)$ también es un multiplicador de Fourier para $L^p_w(\Omega)$ con $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Más precisamente,*

$$\|T_m(u)\|_{L^p_w(\Omega)} \leq C_{p,w} \|u\|_{L^p_w(\Omega)}, \quad u \in L^p_w(\Omega).$$

En efecto, dado $u \in L^p(\Omega)$, su extensión $\tilde{u}$ definida por

$$\tilde{u} = \begin{cases} u & \textit{sobre } \Omega \\ 0 & \textit{sobre } \mathbb{R}^n \setminus \Omega \end{cases}$$

está en $L^p(\mathbb{R}^n)$. Como m es un multiplicador de Fourier para $L^p_w(\mathbb{R}^n)$,

$$\begin{aligned} \|T_m(u)\|_{L^p_w(\Omega)} &= \|T_m(\tilde{u})\|_{L^p_w(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq C_{p,w} \|\tilde{u}\|_{L^p_w(\mathbb{R}^n)} \\ &= C_{p,w} \|u\|_{L^p_w(\Omega)} \end{aligned}$$

Por lo tanto, la función m es un multiplicador de Fourier para $L^p_w(\Omega)$.

Observación 1.6. *La Definición 1.6 también es posible cuando w solo es un peso (no necesariamente de Muckenhoupt). Dentro de la literatura también es posible encontrar la definición de multiplicador de Fourier con pesos de forma exponencial (ver [Nik94], [BT92]).*

Las siguientes definiciones son ingredientes para un resultado de condiciones suficientes para la obtención de multiplicadores de Fourier para espacios L^p con pesos de Muckenhoupt (Teorema 1.1).

Definición 1.7. *(Cuadrante) Los intervalos $]-\infty, 0[$, $]0, \infty[$ se denominan cuadrantes del espacio $\mathbb{R}$. Análogamente, los conjuntos*

$$\begin{aligned} \left\{x \in \mathbb{R}^2 \colon x_1 < 0,\, x_2 > 0\right\}, \left\{x \in \mathbb{R}^2 \colon x_1 > 0,\, x_2 > 0\right\} \\ \left\{x \in \mathbb{R}^2 \colon x_1 < 0,\, x_2 < 0\right\}, \left\{x \in \mathbb{R}^2 \colon x_2 < 0,\, x_2 < 0\right\} \end{aligned}$$

se denominan cuadrantes del espacio $\mathbb{R}^2$. De manera similar, se definen cuadrantes en $\mathbb{R}^n$, por ejemplo, $\{x \in \mathbb{R}^n \colon x_1, \dots, x_n > 0\}$ es un cuadrante en $\mathbb{R}^n$.

Definición 1.8. *(Descomposición diádica)([Ste70, Cap. 4, Sec. 5], [Hao16, Cap. 6, Sec. 6.4], [Hao20, Cap. 5, Sec. 5.4]) La recta $\mathbb{R}$ puede ser descompuesta [(1)] mediante la unión de los intervalos $[2^k, 2^{k+1}]$, $k \in \mathbb{Z}$, $\quad [-2^{k+1}, -2^k]$, $k \in \mathbb{Z}$. El espacio $\mathbb{R}^n$ se descompone como la unión de productos de los intervalos anteriores por cada eje. Cada uno de estos productos de intervalos se denomina un intervalo diádico.*

El siguiente resultado suele ser llamado el Teorema de Marcinkiewicz para multiplicadores ([Gra14, Cap. 6, Teo. 6.2.2], [Hao16, Cap. 6, Sec. 6.5, Teo. 6.28]), [Hao20, Cap. 5, Sec. 5.5, Teo. 5.5.2]):

Teorema 1.1. *(Teorema de Marcinkiewicz para multiplicadores con peso) [Kur80, Sec. 1, Teo. 3] Sea $m \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ una función de clase C^n en cada cuadrante de $\mathbb{R}^n$, esencialmente acotada $m \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, es decir, $\|m\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C$ para alguna constante C y satisfaciendo la estimación*

$$\sup_{\xi_{k+1}, \dots, \xi_n} \int_\rho |\partial_{\xi_1} \dots \partial_{\xi_k} m(\xi)|\, d\xi_1 \dots d\xi_k \leq C \tag{1.3}$$

[(1)] La descomposición deja al origen fuera del proceso (Ver [Ste70, Cap. 4, Sec. 5]) *para $0 < k \leq n$, ρ cualquier intervalo diádico en $\mathbb{R}^k$, y cualquier permutación de $(x_1, \ldots, x_n)$. Si $w \in A_p(\mathbb{R}^n)$ es un peso de Muckenhoupt, entonces la función m es un multiplicador de Fourier para $L^p_w(\mathbb{R}^n)$.*

Observación 1.7. *Considerando el peso de Muckenhoupt constante $w \equiv 1$, el Teorema 1.1 coincide con el Teorema 6' en [Ste70]. En otras palabras, el Teorema 1.1 corresponde a una versión con peso del Teorema 6' de la referencia [Ste70, p. 109].*

La condición en la siguiente definición suele ser llamada la condición de Lizorkin [KKOS21, Teo. 3.22 (ii)], [NS04, Teo. 1.57]. Esta permite tener un resultado suficiente para la obtención de multiplicadores de Fourier para espacios L^p con peso (Ver Teorema 1.2).

Definición 1.9. *(Condición de Lizorkin) Una función $m\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ de clase $C^n(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ satisface la condición de Lizorkin si para todo multi-índice $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ con $\alpha_i = 0$ ó $\alpha_i = 1$, para todo $i = 1, \ldots, n$, satisface la estimación*

$$\left|\xi^\alpha \partial_\xi^\alpha m(\xi)\right| \leq C, \quad \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \tag{1.4}$$

para alguna constante $C > 0$.

Cuando una función es radial, es posible dar la siguiente definición, que en este trabajo denominamos “condición de Lizorkin radial”

Definición 1.10. *(Condición de Lizorkin radial) Una función $m\colon [0,\infty[\to \mathbb{C}$ de clase $C^n([0,\infty[)$ satisface la condición de Lizorkin radial si para todo $1 \leq k \leq n$ satisface la estimación*

$$(1 + |\xi|^2)^k \left| \partial_t^k \Big|_{t=|\xi|^2} m(t) \right| \leq C, \quad \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \tag{1.5}$$

para alguna constante $C > 0$.

Observación 1.8. *Por la regularidad de la función m, es suficiente probar las estimaciones (1.4), (1.5) para valores suficientemente grandes, es decir, para $|\xi| > R$ para algún $R > 0$. En adelante, consideramos esta observación al momento de verificar que una función satisface las estimaciones nombradas.*

Proposición 1.8. *(Condición de Lizorkin radial implica condición de Lizorkin) Si $m\colon [0,\infty[\to \mathbb{C}$ es una función de clase $C^n([0,\infty[)$ satisfaciendo la condición de Lizorkin radial, entonces la función radial $m(|\cdot|^2)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ satisface la condición de Lizorkin.*

Demostración. Sea $1 \leq k \leq n$. Por la regularidad de la función, es posible suponer, sin pérdida de generalidad, un multi-índice $\alpha = (1, \ldots, 1, 0, \ldots 0)$ con un 1 en las primeras k-ésimas coordenadas. Entonces

$$\xi^\alpha = \xi_1 \ldots \xi_k$$
$$\partial_\xi^\alpha = \partial_{\xi_1} \ldots \partial_{\xi_k}$$

Por regla de la cadena,

$$\partial_\xi^\alpha m(|\xi|^2) = \partial_t^k\Big|_{t=|\xi|^2} m(t) 2^k \xi_1 \dots \xi_k$$

luego, con uso de la desigualdad elemental $\xi_1^2 \dots \xi_k^2 \leq (1+|\xi|^2)^k$, se sigue que

$$\begin{aligned} |\xi^\alpha \partial_\xi^\alpha m(|\xi|^2)| &\leq 2^k (1+|\xi|^2)^k | \, \partial_t^k\Big|_{t=|\xi|^2} m(t)| \\ &\leq C \qquad (1.6) \end{aligned}$$

donde (1.6) sigue del supuesto que la función m satisface la condición de Lizorkin radial (Definición 3.3). □

El siguiente teorema es una adaptación, para espacios L^p con peso, del Teorema 2 en la referencia [Gui10]. Es importante mencionar que el Teorema 2 en [Gui10] es un caso particular del Teorema 6' en [Ste70] y que el siguiente teorema es un caso particular del Teorema 1.1.

Teorema 1.2. *(Teorema de Mikhlin-Hörmander-Lizorkin con peso) Sea $w \in A_p(\mathbb{R}^n)$ un peso de Muckenhoupt y $m\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ una función de clase $C^n(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ satisfaciendo la condición de Lizorkin. Entonces m es un multiplicador de Fourier para $L^p_w(\mathbb{R}^n)$.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad, supongamos un multi-índice $\alpha = (1,\dots,1,0,\dots,0)$ con 1 hasta la coordenada k-ésima, así, $\xi^\alpha \partial_\xi^\alpha = \xi_1 \dots, \xi_k \partial_{\xi_1} \dots \partial_{x_k}$. Entonces

$$\int_\rho |\partial_{\xi_1} \dots \partial_{\xi_k} m(\xi)| \, d\xi_1 \dots d\xi_k \leq \int_\rho \frac{1}{\xi_1} \cdots \frac{1}{\xi_k} \, d\xi_1 \cdots d\xi_k < C$$

donde la integración nunca ocurre sobre el origen al ser cada ρ un intervalo diádico. Por lo tanto, la función m satisface la estimación (1.3) en el Teorema 1.1. Por lo tanto, la función m es un multiplicador de Fourier para $L^p_w(\mathbb{R}^n)$ □

Corolario 1.1. *(Funciones radiales con condición de Lizorkin son multiplicadores) Sea $w \in A_p(\mathbb{R}^n)$ un peso de Muckenhoupt y $m\colon [0,\infty[\to \mathbb{C}$ una función de clase $C^n([0,\infty[)$ satisfaciendo la condición de Lizorkin radial. Entonces, la función $m(|\cdot|^2)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ es un multiplicador de Fourier para $L^p_w(\mathbb{R}^n)$.*

Observación 1.9. *Por Teorema 1.2, el operador multiplicador de Fourier $T_m\colon L^p_w(\mathbb{R}^n) \to L^p_w(\mathbb{R}^n)$ definido por*

$$T_m(u) = \mathcal{F}^{-1}\left(m(\xi)\widehat{u}(\xi)\right)$$

satisface

$$\|T_m(u)\|_{L^p_w(\mathbb{R}^n)} \leq C_{p,w} \|u\|_{L^p_w(\mathbb{R}^n)}, \quad u \in L^p_w(\mathbb{R}^n),$$

para alguna constante $C_{p,w} > 0$. En principio, esta constante depende del peso w, pero, es acotada de manera uniforme para todo w peso de Muckenhoupt al ser $C_{p,w}$ una constante A_p-consistente (Ver Definición 1.11).

Definición 1.11. *(A_p-consistencia) [Sch07, Sch09] Una constante $C = C_w$ se denomina A_p-consistente (para la clase $A_p(\mathbb{R}^n)$) si para todo $C_0 > 0$, esta puede ser escogida uniformemente para todo peso $w \in A_p(\mathbb{R}^n)$ de Muckenhoupt con $A_p(w) < C_0$, es decir, existe una constante $M = M_{C_0}$ de modo que $C_w < M$ para todo $w \in A_p(\mathbb{R}^n)$ con $A_p(w) < C_0$.*

1.2 Clase de funciones y multiplicadores de Fourier para $L^p_w(\mathbb{R}^n)$

Definición 1.12. *(Clase de funciones) Sea β, $s \geq 0$ con $\beta s \geq 4n$ parámetros. Denotamos por $\mathcal{J}^\beta_s(\mathbb{R}^n)$ al conjunto de todas las funciones medibles $a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bajo los siguientes supuestos:*

J_1 *La función $a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es de clase $C^n([0,\infty[)$ y la función $t \mapsto a(t^2)$, $t \in \mathbb{R}$ es no negativa.*

J_2 *Existen constantes M, $R_0 > 0$ de modo que se satisface la estimación*

$$M(1 + |\xi|^2)^{\beta/2} \leq a(|\xi|^2), \quad |\xi| > R_0$$

J_3 *Para cada número natural $1 \leq k \leq n$, existen constantes $M_{k,s}$, $R_k > 0$ de modo que se satisface la estimación*

$$\left| \partial^k_t \Big|_{t=|\xi|^2} a(t) \right| \leq M_{k,s} a(|\xi|^2)^{kN+1}, \quad |\xi| > R_k$$

donde $N = \left(\frac{s}{2n} - \frac{2}{\beta}\right)$.

La condición J_2 suele ser denominada una condición de elipticidad [Won14, Cap. 10]. Por otro lado, J_3 es un supuesto de control sobre cada derivada de la función a lo que permite la obtención de multiplicadores (ver Proposición 1.15). El supuesto $\beta s \geq 4n$ se vuelve necesario cuando estudiamos inclusiones del espacio $H^{s,p}_w(a)$ con los espacios potenciales de Bessel (ver Sección 1.3.1).

En adelante, las constantes M, $M_{k,s}$ son omitidas por ser irrelevantes en los resultados y consideramos $R = \text{máx}(R_0, R_1, \ldots, R_n)$ a lo largo de las distintas estimaciones en cada resultado.

Observación 1.10. *En principio, los parámetros β, $s \geq 0$ no tienen restricción, pero dependiendo de la función a estudiar, estos adquieren restricciones naturales. En las siguientes proposiciones, observamos algunos ejemplos de funciones en la clase $\mathcal{J}^\beta_s(\mathbb{R}^n)$.*

Proposición 1.9. *La función $a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $a(t) = t$ está en la clase $\mathcal{J}^\beta_s(\mathbb{R}^n)$ para todo $s \geq 0$ con $\beta = 2$.*

Demostración. Es directo ver que la función $a(t) = t$ satisface el supuesto J_1 y J_2 con $\beta = 2$. Para verificar el supuesto J_3, la k-ésima derivada de la función a evaluada en el punto $t = |\xi|^2$ viene dada por

$$\partial^k_t \Big|_{t=|\xi|^2} (t) = \begin{cases} 1 & k = 1 \\ 0 & k > 1 \end{cases}$$

Para el caso $k = 1$,

$$\begin{aligned}\left|\partial_t^{k=1}\Big|_{t=|\xi|^2}(t)\right| &= 1\\ &\leq (|\xi|^2)^{\left(\frac{s}{2n}-1\right)+1}\\ &\leq (|\xi|^2)^{\frac{s}{2n}}.\end{aligned}$$

para todo $s \geq 0$ y para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$. Por lo tanto,

$$\left|\partial_t^{k=1}\Big|_{t=|\xi|^2}(t)\right| \leq (|\xi|^2)^{\frac{s}{2n}}, \quad s \geq 0,\, \xi \in \mathbb{R}^n,$$

es decir, la condición J_3 se verifica para el caso $k = 1$.

Para el caso $k > 1$,

$$\begin{aligned}\left|\partial_t^{k>1}\Big|_{t=|\xi|^2}(t)\right| &= 0\\ &\leq (|\xi|^2)^{2\left(\frac{s}{2n}-1\right)+1}\\ &\leq (|\xi|^2)^{\frac{s}{n}-1}.\end{aligned}$$

para todo $s \geq 0$ y todo $\xi \in \mathbb{R}^n$. Por lo tanto,

$$\left|\partial_t^{k>1}\Big|_{t=|\xi|^2}(t)\right| \leq (|\xi|^2)^{\frac{s}{n}-1}, \quad s \geq 0,\, \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{1.7}$$

es decir, la condición J_3 se verifica para el caso $k > 1$ (observemos que (1.7) se satisface incluso cuando $\frac{s}{2n} - 1 < 0$).

Por lo tanto, para cada $k \geq 1$, se cumple que

$$\left|\partial_t^{k}\Big|_{t=|\xi|^2}(t)\right| \leq (|\xi|^2)^{k\left(\frac{s}{2n}-1\right)+1},$$

para todo $s \geq 0$ y todo $\xi \in \mathbb{R}^n$, es decir, se verifica la condición J_3 para todo $s \geq 0$ con $\beta = 2$. □

Un ejemplo más general que el anterior es el siguiente:

Proposición 1.10. *La función $a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $a(t) = t^{\beta/2}$ está en la clase $\mathcal{J}_s^\beta(\mathbb{R}^n)$ para todo β, $s \geq 0$*

Demostración. Es directo ver que la función $a(t) = t^{\beta/2}$ satisface el supuesto J_1 y que verifica J_2 con $\beta = \beta$. Para verificar el supuesto J_3 observemos que la k-ésima derivada $(1 \leq k \leq n)$ de la función a viene dada por

$$\partial_t^k\Big|_{t=|\xi|^2}(t^{\beta/2}) = C_{\beta,k}(|\xi|^2)^{\beta/2-k},$$

con $C_{\beta,k} = (\beta/2)(\beta/2-1)\cdots(\beta/2-(k-1))$ una constante. Entonces,

$$\left|\partial_t^k\Big|_{t=|\xi|^2}(t^{\beta/2})\right| = C_{\beta,k}(|\xi|^2)^{\beta/2-k}$$

$$\leq C_{\beta,k}\left((|\xi|^2)^{\beta/2}\right)^{k\left(\frac{s}{2n}-\frac{2}{\beta}\right)+1} \tag{1.8}$$

para todo $|\xi| > R$ para algún $R > 0$, donde (1.10) se cumple debido a que $\frac{\beta}{2}-k \leq \frac{\beta}{2}\left(k\left(\frac{s}{2n}-\frac{2}{\beta}\right)+1\right)$ para todo $1 \leq k \leq n$ y para todo $\beta,\ s \geq 0$

Por lo tanto, $1 \leq k \leq n$

$$\left|\partial_t^k\Big|_{t=|\xi|^2}(t^{\beta/2})\right| \leq C_{\beta,k}\left((|\xi|^2)^{\beta/2}\right)^{k\left(\frac{s}{2n}-\frac{2}{\beta}\right)+1}, \quad |\xi| > R,$$

es decir, la función $a(t) = t^{\beta/2}$ verifica la condición J_3 para todo $\beta,\ s \geq 0$.

□

En el siguiente ejemplo, observamos que necesitamos restricciones sobre los parámetros β, s.

Proposición 1.11. *Una función $a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clase $C^n([0,\infty])$ con derivadas acotadas en el infinito y que satisface los supuestos $J_1 - J_2$ está en la clase $\mathcal{J}^\beta_s(\mathbb{R}^n)$ para todo $\beta,\ s \geq 0$ con $\beta s \geq 4n$.*

Demostración. Sea a función satisfaciendo las hipótesis del enunciado. Para $1 \leq k \leq n$,

$$\left|\partial_t^k\Big|_{t=|\xi|^2} a(t)\right| \leq C_k \tag{1.9}$$

$$\leq C_k(1+|\xi|^2)^{\beta/2}$$

$$\leq C_k a(|\xi|^2) \tag{1.10}$$

$$\leq C_k(a(|\xi|^2))^{k\left(\frac{s}{2n}-\frac{2}{\beta}\right)+1} \tag{1.11}$$

para todo $|\xi| > R$, donde (1.9) se cumple por el supuesto de derivadas acotadas, (1.10) por el supuesto de elipticidad J_2 y (1.11) se cumple por el supuesto $\beta s \geq 4n$. Por lo tanto,

$$\left|\partial_t^k\Big|_{t=|\xi|^2} a(t)\right| \leq C_k(a(|\xi|^2))^{k\left(\frac{s}{2n}-\frac{2}{\beta}\right)+1}, \quad |\xi| > R,$$

es decir, se verifica el supuesto J_3. □

La siguiente proposición nos dice que una función de tipo exponencial está en la clase $\mathcal{J}^\beta_s(\mathbb{R}^n)$.

Proposición 1.12. *La función $a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $a(t) = t\mathrm{e}^{ct}$, donde $c > 0$ es una constante, está en la clase $\mathcal{J}^\beta_s(\mathbb{R}^n)$ para todo $\beta,\ s \geq 0$ con $\beta s \geq 4n$.*

Demostración. Es directo ver que la función $a(t) = \mathrm{e}^{ct}$ satisface la condición $J_1 - J_2$. Para verificar la condición J_3, $(1 < k)$ tenemos que

$$\left|\partial_t^k\Big|_{t=|\xi|^2} a(t)\right| = \left|(kc^{k-1}+c^k t)\mathrm{e}^{ct}\Big|_{t=|\xi|^2}\right|$$

$$\leq C_k|\xi|^2\mathrm{e}^{c|\xi|^2} \tag{1.12}$$

$$\begin{aligned} &= C_k a(|\xi|^2) \\ &= C_k a(|\xi|^2)^{k\left(\frac{s}{2n}-\frac{2}{\beta}\right)+1} \end{aligned} \tag{1.13}$$

para todo $|\xi| > R$, donde (1.12) se cumple para $|\xi| > R$ y (1.13) se cumple cuando $\beta s \geq 4n$. Por lo tanto,

$$\left| \partial_t^k \Big|_{t=|\xi|^2} a(t) \right| = C_k a(|\xi|^2)^{k\left(\frac{s}{2n}-\frac{2}{\beta}\right)+1}, \quad |\xi| > R,$$

es decir, se verifica el supuesto J_3. $\square$

En [BPR19] se define una clase de símbolos, denotada por $\mathcal{G}_s^\beta(\mathbb{R}^n)$, que permite el estudio de diversos símbolos para operadores pseudo-diferenciales, entre ellos, el símbolo $(1+|\xi|^2)^{s/2}$ que en la literatura es conocido como el potencial de Bessel. En la siguiente proposición, mostramos que la clase

Proposición 1.13. *La clase de símbolos $\mathcal{G}_s^\beta(\mathbb{R}^n)$ definida en la referencia [BPR19] está contenida de manera estricta en la clase $\mathcal{J}_s^\beta(\mathbb{R}^n)$.*

Demostración. Sea $a \in \mathcal{G}_s^\beta(\mathbb{R}^n)$. El supuesto $\beta s \geq 4n$ es común para ambas clases. Por otro lado, notemos que los supuestos $G_1 - G_2$ y $J_1 - J_2$ coinciden, luego es suficiente probar que el supuesto J_3 se satisface a partir del supuesto G_3. Por condiciones $G_2 - G_3$ (omitiendo constantes),

$$\begin{aligned} \left| \partial_t^k \Big|_{t=|\xi|^2} a(t) \right| &\leq (1+|\xi|^2)^{k(\frac{\beta s}{4n}-1)+\frac{\beta}{2}} \\ &\leq a(|\xi|^2)^{k(\frac{s}{2n}-\frac{2}{\beta})+1} \end{aligned}$$

para todo $|\xi| > R$ para algún $R > 0$. Por lo tanto,

$$\left| \partial_t^k \Big|_{t=|\xi|^2} a(t) \right| \leq a(|\xi|^2)^{k(\frac{s}{2n}-\frac{2}{\beta})+1}, \quad |\xi| > R,$$

es decir, se cumple el supuesto J_3.

Así, $\mathcal{G}_s^\beta(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{J}_s^\beta(\mathbb{R}^n)$. Más aún, la inclusión es estricta ya que la función $a(t) = te^{ct}$ está en la clase $\mathcal{J}_s^\beta(\mathbb{R}^n)$ (Proposición 1.12) pero no satisface las condiciones de la clase $\mathcal{G}_s^\beta(\mathbb{R}^n)$. Más precisamente, no satisface la condición G_3 de derivadas polinomialmente acotadas. $\square$

La clase $\mathcal{J}_s^\beta(\mathbb{R}^n)$ satisface la siguiente relación de inclusión con respecto al parámetro s:

Proposición 1.14. *(Relación de inclusión) Sea β, s_1, $s_2 \geq 0$ parámetros con $\beta s_1 \geq 4n$ y $s_1 \leq s_2$. Entonces se cumple la inclusión*

$$\mathcal{J}_{s_1}^\beta(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{J}_{s_2}^\beta(\mathbb{R}^n).$$

Demostración. Primero que todo, es directo observar que $\beta s_2 \geq 4n$ cuando $\beta s_1 \geq 4n$ y $s_1 \leq s_2$. Sea $a \in \mathcal{J}_{s_1}^\beta(\mathbb{R}^n)$. Es directo ver que los supuestos $J_1 - J_2$ se verifican en la clase $\mathcal{J}_{s_2}^\beta(\mathbb{R}^n)$ al no depender del parámetro s_2. El supuesto J_3 sigue del hecho que la función

$$s \mapsto a(|\xi|^2)^{k(s/2n-2/\beta)+1}, \quad |\xi| > R$$

(para algún $R > 0$ de modo que se cumpla que $1 \leq a(|\xi|^2)$) es creciente. □

El siguiente lema es técnico y será usado en la Proposición 1.15.

Lema 1.1. *(Fórmula de derivadas) Sea* $[0,\infty[\to \mathbb{R}\colon t \mapsto a(t)$ *función de clase* $C^n([0,\infty[)$. *La* k*-ésima* ($1 \leq k \leq n$) *derivada de la función* $[0,\infty[\to \mathbb{R}\colon t \mapsto \frac{1}{(1+a(t))^{r/2}}$ *satisface la siguiente igualdad*

$$\partial_t^k\left(\frac{1}{(1+a(t))^{r/2}}\right) = \sum_{j=1}^{k} C_{j,r}\frac{1}{(1+a(t))^{r/2+j}} \sum_{(P_{1,j},\dots,P_{n,j})} C_{(P_{1,j},\dots,P_{n,j})} a^{(1)}(t)^{P_{1,j}} \dots a^{(n)}(t)^{P_{n,j}} \tag{1.14}$$

para algunas constantes $C_{j,r}$, $C_{(P_{1,j},\dots,P_{n,j})}$ *no necesariamente positivas. En la igualdad* (1.14), $a^{(k)}(t) = \partial_t^k a(t)$ *y los exponentes* $P_{i,j}$ *cumplen las siguientes relaciones patrónicas*

- $P_{i,j} = 0$ *si* $i > k$
- $\sum_{i=1}^n iP_{i,j} = k$
- $\sum_{i=1}^n P_{i,j} = j$

Demostración. Demostraremos la proposición mediante el principio de inducción sobre la dimensión n del espacio $\mathbb{R}^n$. En el caso $n = 1$, ($1 \leq k \leq 1$), tenemos que

$$\partial_t^{k=1}\left(\frac{1}{(1+a(t))^{r/2}}\right) = C_r\frac{1}{(1+a(t))^{r/2+1}}a^{(1)}(t)^{P_{1,1}}$$

donde el resultado se cumple para el primer caso con $n = 1$ con el exponente $P_{i=1,j=1} = 1$. Ahora, supongamos que la igualdad (1.14) es válida para funciones de clase $C^n([0,\infty[)$. Sea a una función de clase $C^{n+1}([0,\infty[)$. A partir de la inclusión $C^{n+1}([0,\infty[) \subset C^n([0,\infty[)$, la igualdad (1.14) ($1 \leq k \leq n$) se cumple para la función a. Además notemos que

$$\partial_t^k\left(\frac{1}{(1+a(t))^{r/2}}\right) = \sum_{j=1}^{k}\frac{1}{(1+a(t))^{r/2+j}} \sum_{(P_{1,j},\dots,P_{n,j})} (a^{(1)}(t))^{P_{1,j}} \cdots (a^{(n)}(t))^{P_{n,j}}(a^{(n+1)}(t))^{P_{n+1,j}}$$

con exponente $P_{n+1,j} = 0$. (Hemos omitido las constantes $C_{j,r}$, $C_{(P_{1,j},\dots,P_{n,j})}$ por simplicidad en la escritura). Probaremos que la $(n+1)$-ésima derivada de la función $\frac{1}{(1+a(t))^{r/2}}$ también satisface el enunciado (nuevamente, por simplicidad en la escritura, omitimos las constantes).

$$\partial_t^{n+1}\left(\frac{1}{(1+a(t))^{r/2}}\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n}[(-r/2-j)(1+a(t))^{-r/2-j}a^{(1)}(t) \sum_{(P_{1,j},\ldots,P_{n,j})} (a^{(1)}(t))^{P_{1,j}} \cdots (a^{(n)}(t))^{P_{n,j}} (a^{(n+1)}(t))^0$$

$$+ \sum_{j=1}^{n}(1+a(t))^{-r/2-j} \sum_{(P_{1,j},\ldots,P_{n,j})} [\; P_{1,j}(a^{(1)}(t))^{P_{1,j}-1}(a^{(2)}(t))^{P_{2,j}+1}(a^{(3)}(t))^{P_{e,j}} \cdots (a^{(n)}(t))^{P_{n,j}}(a^{(n+1)}(t))^0$$

$$+ \cdots + P_{n,j}(a^{(1)}(t))^{P_{1,j}}(a^{(2)}(t))^{P_{2,j}} \cdots (a^{(n)}(t))^{P_{n,j}-1}(a^{(n+1)}(t))^{P_{n+1,j}=1} \;]$$

$$= \sum_{j=1}^{n}[(-r/2-j)(1+a(t))^{-r/2-(j+1)} \sum_{(P_{1,j},\ldots,P_{n,j},P_{n+1,j})} (a^{(1)}(t))^{P_{1,j}+1} \cdots (a^{(n)}(t))^{P_{n,j}} (a^{(n+1)}(t))^{P_{n+1,j}}$$

$$+ \sum_{j=1}^{n}(1+a(t))^{-r/2-j} \sum_{(P_{1,j},\ldots,P_{n,j},P_{n+1,j})} \sum_{l=1}^{n} P_{l,j}(a^{(1)}(t))^{P^l_{1,j}} \cdots (a^{(n+1)}(t))^{P^l_{n+1,j}}$$

$$= \sum_{j=1}^{n}[(-r/2-j)(1+a(t))^{-r/2-(j+1)} \sum_{(P_{1,j},\ldots,P_{n,j},P_{n+1,j})} [(a^{(1)}(t))^{P^*_{1,j}} \cdots (a^{(n)}(t))^{P^*_{n,j}} (a^{(n+1)}(t))^{P^*_{n+1,j}}]$$

$$+ (1+a(t))^{-r/2-j} \sum_{(P_{1,j},\ldots,P_{n,j},P_{n+1,j})} \sum_{l=1}^{n} P_{l,j}(a^{(1)}(t))^{P^l_{1,j}} \cdots (a^{(n+1)}(t))^{P^l_{n+1,j}}$$

donde $P^*_{n+1,j}=0$, $P_{n+1,j}=1$, $P^*_{1,j}=P_{1,j}+1$, $P^*_{i,j}=P_{i,j}$ $(i=2,\ldots,n)$, y,

$$P^l_{i,j} = \begin{cases} P_{i,j}-1 & \text{si } l=i \\ P_{i,j}+1 & \text{si } l=i-1 \\ P_{i,j} & \text{otro caso} \end{cases}.$$

Para cada j se satisface que

$$\sum_{i=1}^{n+1} P^*_{i,j} = P^*_{1,j} + \sum_{i=2}^{n+1} P^*_{i,j} = (P_{1,j}+1) + \sum_{i=2}^{n} P_{i,j} + P^*_{n+1,j} = 1 + \sum_{i=1}^{n} P_{i,j} + 0 = j+1$$

y de forma análoga obtenemos que

$$\sum_{i=1}^{n+1} iP^*_{i,j} = 1P^*_{i,j} + \sum_{i=2}^{n+1} iP^*_{i,j} = (P_{1,j}+1) + \sum_{i=2}^{n} iP_{i,j} + (n+1)P^*_{n+1,j} = 1 + \sum_{i=1}^{n} iP_{i,j} + (n+1)0 = k+1.$$

Análogamente, para cada j, l,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} P^l_{i,j} &= P^l_{1,j} + P^l_{2,j} + \cdots + P^l_{l,j} + P^l_{l+1,j} + \cdots + P^l_{n,j} + P^l_{n+1,j} \\ &= P_{1,j} + P_{2,j} + \cdots + P_{l,j} - 1 + P_{l+1,j} + 1 + \cdots + P_{n,j} + 1 \\ &= \sum_{i=1}^{n} P_{i,j} + 1 = j+1 \end{aligned}$$

además de

$$\sum_{i=1}^{n+1} iP^l_{i,j} = \sum_{i=1,\, i\neq l,\, i\neq l+1}^{n+1} iP^l_{i,j} + lP^l_{l,j} + (l+1)P^l_{l+1,j}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1,\, i\neq l,\, i\neq l+1}^{n+1} iP^l_{i,j} + l(P_{l,j}-1) + (l+1)(P_{l+1,j}+1) \\
&= \sum_{i=1,\, i\neq l,\, i\neq l+1}^{n+1} iP_{i,j} + lP_{l,j} + (l+1)P_{l+1,j} + 1 \\
&= \sum_{i=1}^{n} iP_{i,j} + 1 = k+1
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, la igualdad (1.14) también es válida en el caso de dimensión $n+1$. Por principio de inducción, lo es para cualquier $n \in \mathbb{N}$ número natural. $\square$

En las dos siguientes proposiciones, obtenemos multiplicadores de Fourier para espacios L^p con peso a partir de funciones en la clase $\mathcal{J}^\beta_s(\mathbb{R}^n)$.

Proposición 1.15. *(Primer multiplicador) Sea $w \in A_p(\mathbb{R}^n)$ un peso de Muckenhoupt y una función $a \in \mathcal{J}^\beta_s(\mathbb{R}^n)$. Para cada $r \geq s$, la función*

$$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \colon \xi \mapsto \frac{1}{(1+a(|\xi|^2))^{r/2}}$$

es un multiplicador de Fourier para $L^p_w(\mathbb{R}^n)$.

Demostración. Sea $r \geq s$. Probaremos que la función

$$[0,\infty[\to \mathbb{R} \colon t \mapsto \frac{1}{(1+a(t))^{r/2}}$$

satisface la condición de Lizorkin radial. Por la fórmula de derivadas (Lema 1.1) junto con las relaciones sobre los exponentes $P_{i,j}$, tenemos que (omitiendo constantes y también la suma sobre j),

$$
\begin{aligned}
\left| \partial^k_t \Big|_{t=|\xi|^2} \left(\frac{1}{(1+a(t))^{r/2}} \right) \right| &\leq \frac{1}{(1+a(|\xi|^2))^{r/2+j}} \left| a^{(1)}(|\xi|^2)^{P_{1,j}} \cdots a^{(n)}(|\xi|^2)^{P_{n,j}} \right| \\
&\leq \frac{1}{(1+a(|\xi|^2))^{r/2+j}} a(|\xi|^2)^{(1N+1)P_{1,j}} \cdots a(|\xi|^2)^{(nN+1)P_{n,j}} \\
&= \frac{1}{(1+a(|\xi|^2))^{r/2+j}} a(|\xi|^2)^{\sum_{i=1}^n (iN+1)P_{i,j}} \\
&= \frac{1}{(1+a(|\xi|^2))^{r/2+j}} a(|\xi|^2)^{kN+j} \\
&\leq \frac{1}{(1+a(|\xi|^2))^{r/2+j}} (1+a(|\xi|^2))^{kN+j} \\
&= (1+a(|\xi|^2))^{kN+j-r/2-j} \\
&= (1+a(|\xi|^2))^{kN-r/2}
\end{aligned}
$$

para todo $|\xi| > R$. Por lo tanto,

$$\left| \partial^k_t \Big|_{t=|\xi|^2} \left(\frac{1}{(1+a(t))^{r/2}} \right) \right| \leq (1+a(|\xi|^2))^{kN-r/2}, \quad |\xi| > R. \tag{1.15}$$

Por otro lado, por el supuesto de elipticidad sobre la función a (supuesto J_2),

$$(1+|\xi|^2)^k \leq (1+a(|\xi|^2))^{\frac{2}{\beta}k}, \quad |\xi| > R, \tag{1.16}$$

entonces por (1.15) y (1.16),

$$\begin{aligned}
(1+|\xi|^2)^k \left| \partial_t^k \Big|_{t=|\xi|^2} \left(\frac{1}{(1+a(t))^{r/2}} \right) \right| &\leq (1+a(|\xi|^2))^{\frac{2}{\beta}k} (1+a(|\xi|^2))^{kN-r/2} \\
&= (1+a(|\xi|^2))^{\frac{2}{\beta}k+kN-r/2} \\
&\leq (1+a(|\xi|^2))^{\frac{ks}{2n}-\frac{r}{2}} && (1.17)\\
&= (1+a(|\xi|^2))^{\frac{s}{2}-\frac{r}{2}} && (1.18)\\
&\leq 1 && (1.19)
\end{aligned}$$

donde (1.17) sigue de la definición de $N = \frac{s}{2n} - \frac{2}{\beta}$, (1.18) de los valores $1 \leq k \leq n$ y (1.19) del supuesto $r \geq s$. Por lo tanto,

$$(1+|\xi|^2)^k \left| \partial_t^k \Big|_{t=|\xi|^2} \left(\frac{1}{(1+a(t))^{r/2}} \right) \right| \leq 1, \quad |\xi| > R,$$

es decir, la función $t \mapsto \frac{1}{(1+a(t))^{r/2}}$ satisface la condición de Lizorkin radial, luego por Corolario 1.1, la función radial $\xi \mapsto \frac{1}{(1+a(|\xi|^2))^{r/2}}$ es un multiplicador de Fourier para el espacio $L^p_w(\mathbb{R}^n)$.

□

Proposición 1.16. *(Segundo multiplicador) Sea $w \in A_p(\mathbb{R}^n)$ un peso de Muckenhoupt y una función $a \in \mathcal{J}^\beta_s(\mathbb{R}^n)$. Para cada $r \geq 0$, la función*

$$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \colon \xi \mapsto \frac{(1+|\xi|^2)^{r/2}}{(1+a(|\xi|^2))^{\frac{1}{2}\left(s+\frac{2r}{\beta}\right)}}$$

es un multiplicador de Fourier para $L^p_w(\mathbb{R}^n)$.

Demostración. La demostración es análoga a la Proposición 1.15 junto con la regla de Leibniz. Sea $s_0 = s + \frac{2r}{\beta}$. Probaremos que la función

$$[0,\infty[\to \mathbb{R} \colon t \mapsto \frac{(1+t)^{r/2}}{(1+a(t))^{s_0/2}}$$

satisface la condición de Lizorkin. Por regla de Leibniz se cumple que (omitiendo constantes),

$$\partial_t^k \left(\frac{(1+t)^{r/2}}{(1+a(t))^{s_0/2}} \right) = \sum_{m=0}^{k} (1+t)^{r/2-(k-m)} \sum_{j=0}^{m} \frac{1}{(1+a(t))^{s_0/2+j}} \prod_{i=1}^{m} (a^{(i)}(t))^{P_{i,j}},$$

(donde $a^{(i)}(t) = \partial_t^i a(t)$), luego

$$\begin{aligned}
\left| (1+|\xi|^2)^k \, \partial_t^k \Big|_{t=|\xi|^2} \left(\frac{(1+t^2)^{r/2}}{(1+a(t^2))^{s_0/2}} \right) \right| &\leq (1+|\xi|^2)^k (1+|\xi|^2)^{r/2-(k-m)} \frac{1}{(1+a(|\xi|^2)))^{s_0/2+j}} (1+a(|\xi|^2))^{mN+j} \\
&= (1+|\xi|^2)^{r/2+m} (1+a(|\xi|^2))^{mN-s_0/2} \\
&\leq (1+a(|\xi|^2))^{\frac{2}{\beta}(r/2-m)} (1+a(|\xi|^2))^{mN-s_0/2} && (1.20)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (1+a(|\xi|^2))^{\frac{2}{\beta}(r/2+m)+mN-s_0/2} \\
&= (1+a(|\xi|^2))^{\frac{m}{n}\frac{s}{2}-\frac{s}{2}} && (1.21)\\
&\leq 1 && (1.22)
\end{aligned}
$$

para todo $|\xi| > R$, donde (1.20) sigue del supuesto de elipticidad de la función a (supuesto J_2), (1.21) de la definición de $N = \frac{s}{2n} - \frac{2}{\beta}$ y (1.22) de los valores $1 \leq m \leq k \leq n$. Por lo tanto, para cada $1 \leq k \leq n$ (omitiendo constantes),

$$
\left| (1+|\xi|^2)^k \, \partial_t^k \Big|_{t=|\xi|^2} \left(\frac{(1+t^2)^{r/2}}{(1+a(t^2))^{s_0/2}} \right) \right| \leq 1, \quad |\xi| > R,
$$

para todo $|\xi| > R$, es decir, la función $t \mapsto \frac{(1+t)^{r/2}}{(1+a(t))^{s_0/2}}$, satisface la condición de Lizorkin radial, luego por Corolario 1.1, la función $\xi \mapsto \frac{(1+|\xi|^2)^{r/2}}{(1+a(|\xi|^2))^{s_0/2}}$ es un multiplicador de Fourier para $L^p_w(\mathbb{R}^n)$. □

Teorema 1.3. *Sea $w \in A_p(\mathbb{R}^n)$ un peso de Muckenhoupt y una función $a \in \mathcal{J}_s^\beta(\mathbb{R}^n)$. El operador $T\colon L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p_w(\mathbb{R}^n)$ definido por*

$$
T(u) = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{(1+a(|\xi|^2))^{s/2}} \widehat{\left(\frac{u}{w^{1/p}}\right)} \right)
$$

es lineal, inyectivo y acotado.

Demostración. Sea $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$, luego $\frac{u}{w^{1/p}} \in L^p_w(\mathbb{R}^n)$. Entonces

$$
\begin{aligned}
\|T(u)\|_{L^p_w(\mathbb{R}^n)} &= \left\| \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{(1+a(|\xi|^2))^{s/2}} \widehat{\left(\frac{u}{w^{1/p}}\right)} \right) \right\|_{L^p_w(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq C_{p,w} \left\| \frac{u}{w^{1/p}} \right\|_{L^p_w(\mathbb{R}^n)} && (1.23)\\
&= C_{p,w} \left\| w^{1/p} \frac{u}{w^{1/p}} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&= C_{p,w} \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}
\end{aligned}
$$

donde (1.23) sigue del hecho de que la función $\xi \mapsto \frac{1}{(1+a(|\xi|^2))^{s/2}}$ es un multiplicador de Fourier para el espacio $L^p_w(\mathbb{R}^n)$ (Proposición 1.15). Por lo tanto,

$$
\|T(u)\|_{L^p_w(\mathbb{R}^n)} \leq C_{p,w} \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},
$$

es decir, el operador T es acotado. La linealidad del operador T es consecuencia de la linealidad de la transformada de Fourier. La inyectividad se obtiene del hecho de que la transformada de Fourier es un isomorfismo sobre el espacio de distribuciones temperadas [Won14, Teo. 5.9]. □

Corolario 1.2. *El operador $T\colon L^p(\mathbb{R}^n) \to Rango(T)$ es un isomorfismo. Su operador inverso es*

$$
T^{-1}(u) = w^{1/p}\mathcal{F}^{-1}\left((1+a(|\xi|^2))^{s/2}\widehat{u}(\xi) \right)
$$

Observación 1.11. *A partir de la propiedad de isomorfismo, el rango del operador T puede ser* *escrito por*

$$\mathit{Rango}(T) = \left\{u \in L^p_w(\mathbb{R}^n) \colon T^{-1}(u) \in L^p(\mathbb{R}^n)\right\}$$

1.3 El espacio $H^{s,p}_w(a)$

La Observación 1.11 motiva la definición del siguiente subespacio de $L^p_w(\mathbb{R}^n)$:

Definición 1.13. *(El espacio) Sea $w \in A_p(\mathbb{R}^n)$ un peso de Muckenhoupt y una función $a \in \mathcal{J}^\beta_s(\mathbb{R}^n)$. Denotamos por $H^{s,p}_w(a)$ al espacio definido por*

$$H^{s,p}_w(a) := \left\{u \in L^p_w(\mathbb{R}^n) \colon w^{1/p}\mathcal{F}^{-1}\left((1 + a(|\xi|^2))^{s/2}\widehat{u}(\xi)\right) \in L^p(\mathbb{R}^n)\right\}$$

Observación 1.12. *Por construcción, el espacio $H^{s,p}_w(a)$ es no trivial: una función $u \in L^p_w(\mathbb{R}^n)$ está en $H^{s,p}_w(a)$ si y solo si $u = T(f)$ para algún $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$.*

Observación 1.13. *Sea $a \in \mathcal{J}^\beta_{s_1}(\mathbb{R}^n)$. El espacio $H^{s_2,p}_w(a)$ también está bien definido para $s_2 \geq s_1$ por la inclusión de las clases $\mathcal{J}^\beta_{s_1}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{J}^\beta_{s_2}(\mathbb{R}^n)$ (Proposición 1.14).*

Teorema 1.4. *(Espacio de Banach) El espacio $H^{s,p}_w(a)$ es un espacio de Banach isométricamente isomorfo a $L^p(\mathbb{R}^n)$.*

Demostración. Por construcción, el espacio $H^{s,p}_w(a)$ es el rango del isomorfismo dado por la aplicación $T \colon L^p(\mathbb{R}^n) \to \mathrm{Rango}(T)$ del Corolario 1.2. Una isometría preserva la propiedad de completitud [NS00, Teo. 3.13.6] y $L^p(\mathbb{R}^n)$ es un espacio de Banach. Por lo tanto, $H^{s,p}_w(a)$ es un espacio de Banach. Naturalmente, la norma es

$$\|u\|_{H^{s,p}_w(a)} := \left\|T^{-1}(u)\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \left\|w^{1/p}\mathcal{F}^{-1}\left((1 + a(|\xi|^2))^{s/2}\widehat{u}(\xi)\right)\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

□

Observación 1.14. *En el caso $p = 2$, el espacio $H^{s,2}_w(a)$ es un espacio de Hilbert isométricamente isomorfo a $L^2(\mathbb{R}^n)$. El producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle_{H^{s,2}_w(a)} \colon H^{s,2}_w(a) \times H^{s,2}_w(a) \to \mathbb{C}$ es*

$$\begin{aligned}\langle u, v\rangle_{H^{s,2}_w(a)} &= \langle T^{-1}(u), T^{-1}(v)\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} w(x)^2\mathcal{F}^{-1}\left((1 + a(|\xi|^2))^{s/2}\widehat{u}(\xi)\right)(x)\overline{\mathcal{F}^{-1}\left((1 + a(|\xi|^2))^{s/2}\widehat{u}(\xi)\right)(x)}\,dx\end{aligned}$$

1.3.1 Relaciones de inclusión del espacio $H^{s,p}_w(a)$

En esta sección presentamos algunas inclusiones del espacio $H^{s,p}_w(a)$ sobre algunos espacios de funciones. Primero presentamos algunos resultados preliminares de inclusiones del espacio potencial de Bessel con peso, el espacio L^p con peso, etc. Posteriormente presentamos las inclusiones del espacio $H^{s,p}_w(a)$. Como es usual, si X, Y son espacios de Banach, la notación $X \hookrightarrow Y$ significa una inclusión continua del espacio X en Y. Más precisamente, $\|u\|_Y \leq C\,\|u\|_X$ para alguna constante $C > 0$.

Relaciones de inclusión preliminares

Los siguientes resultados son preliminares. Se presentan relaciones de inclusión de los espacios potenciales de Bessel con peso cuando el peso satisface una condición técnica que en este trabajo denominamos "condición diádica".

Definición 1.14. *(Cubo diádico) Sea $\eta \in \mathbb{N}_0$ un número entero no negativo y $m \in \mathbb{Z}^n$ una n-upla. Denotamos por $Q_{\eta,m}$ al n-cubo (con lados paralelos a los ejes de coordenadas) con centro $2^{-\eta}m$ y lados de longitud $2^{-\eta}$.*

Definición 1.15. *(Condición diádica) Sea $s_1,\ s_2 \in \mathbb{R}, 1 < p_1,\ p_2 < \infty$ parámetros, $w_1 \in A_{p_1}(\mathbb{R}^n)$, $w_2 \in A_{p_2}(\mathbb{R}^n)$ pesos de Muckenhoupt. Decimos que los pesos $w_1,\ w_2$ satisfacen la condición diádica C_{s_1,p_1,s_2,p_2} si se cumple que*

$$\sup_{\eta\in\mathbb{N}_0,\, m\in\mathbb{Z}^n} 2^{-\eta(s_2-s_1)} \frac{1}{\left(\int_{Q_{\eta,m}} w_1(x)\,dx\right)^{1/p_1}} \left(\int_{Q_{\eta,m}} w_2(x)\,dx\right)^{1/p_2} < \infty.$$

En las siguientes proposiciones mostramos algunas caracterizaciones de pesos satisfaciendo condiciones del tipo C_{s_1,p_1,s_2,p_2}. También presentamos algunos ejemplos concretos.

Proposición 1.17. *Sea $w \in A_p(\mathbb{R}^n)$ un peso de Muckenhoupt. Los pesos $w_1 = w_2 = w$ satisfacen la condición diádica $C_{s_1,p,s_2,p}$ para cualquier $s_1 \leq s_2$.*

Demostración. Basta observar que

$$2^{-\eta(s_2-s_1)} \frac{1}{\left(\int_{Q_{\eta,m}} w(x)\,dx\right)^{1/p}} \left(\int_{Q_{\eta,m}} w(x)\,dx\right)^{1/p} = 2^{-\eta(s_2-s_1)} \leq 1$$

para todo $\eta \in \mathbb{N}_0$ y para todo cubo diádico $Q_{\eta,m}$, es decir, la condición diádica $C_{s_1,p,s_2,p}$ se satisface. □

Proposición 1.18. *Sea $1 < p_1 \leq p_2 < \infty$ y $w_1 \in A_{p_1}(\mathbb{R}^n)$ un peso de Muckenhoupt con $0 < C \leq w_1$ para alguna constante C y $w_2 \in A_{p_2}(\mathbb{R}^n)$ el peso de Muckenhoupt constante definido por $w_2 \equiv 1$. Los pesos $w_1,\ w_2$ satisfacen la condición diádica C_{s_1,p_1,s_2,p_2} cuando $s_1 + n/p_1 \leq s_2 + n/p_2$.*

Demostración. Por el supuesto $0 < C \leq w_1$ se cumple que

$$C2^{-\eta n} = C\int_{Q_{\eta,m}} \leq \int_{Q_{\eta,m}} w_1(x)\,dx.$$

Por el peso constante w_2 tenemos que

$$\int_{Q_{\eta,m}} w_2(x)\,dx = 2^{-\eta n},$$

luego

$$
\begin{aligned}
2^{-\eta(s_2-s_1)}\frac{1}{\left(\int_{Q_{\eta,m}} w_1(x)\,dx\right)^{1/p_1}}\left(\int_{Q_{\eta,m}} dx\right)^{1/p_2} &\leq 2^{-\eta(s_2-s_1)}\frac{1}{C^{1/p_1}2^{-\frac{\eta n}{p_1}}}2^{\frac{-\eta n}{p_2}}\\
&= \frac{1}{C^{1/p_1}}2^{-\eta(s_2-s_1)}2^{-\eta n(1/p_2-1/p_1)}\\
&= \frac{1}{C^{1/p_1}}2^{-\eta[(s_2+n/p_2)-(s_1+n/p_1)]}\\
&\leq \frac{1}{C^{1/p_1}}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto,

$$
\sup_{\eta\in\mathbb{N}_0,\, m\in\mathbb{Z}} 2^{-\eta(s_2-s_1)}\frac{1}{\left(\int_{Q_{\eta,m}} w(x)\,dx\right)^{1/p_1}}\left(\int_{Q_{\eta,m}} dx\right)^{1/p_2} < \infty
$$

es decir, los pesos $w_1 = w$, $w_2 \equiv 1$ satisfacen la condición diádica C_{s_1,p_1,s_2,p_2}. □

Corolario 1.3. *Sea $1 < p_1 \leq p_2 < \infty$ parámetros, $w_1 \in A_{p_1}(\mathbb{R}^n)$ el peso de Muckenhoupt definido por $w_1(x) = (1+|x|)^\gamma$ donde $0 \leq \gamma < n(p_1-1)$ y $w_2 \in A_{p_2}(\mathbb{R}^n)$ el peso de Muckenhoupt constante $w_2 \equiv 1$. Entonces los pesos w_1, w_2 satisfacen la condición diádica C_{s_1,p_1,s_2,p_2} para cualquier $s_1 \leq s_2$.*

Demostración. Se sigue de la Proposición 1.18 junto al hecho de que $1 \leq (1+|x|)^\gamma$. □

Proposición 1.19. *Sea $s_1 \leq s_2$, $1 < p_1 \leq p_2 < \infty$ parámetros, $w_1 \in A_{p_1}(\mathbb{R}^n)$ el peso de Muckenhoupt definido por $w_1(x) = |x|^\gamma$ donde $-n \leq \gamma < n(p_1-1)$ y $w_2 \in A_{p_2}(\mathbb{R}^n)$ el peso de Muckenhoupt constante definido por $w_2 \equiv 1$. Los pesos w_1, w_2 satisfacen la condición diádica C_{s_1,p_1,s_2,p_2} si y sólo si $s_1 + (n+\gamma)/p_1 \leq s_2 + n/p_2$, $s_1 + n/p_1 \leq s_2 + n/p_2$.*

Demostración. La proposición es un caso particular de la proposición 4.1 en [MV14]. □

En los siguientes resultados presentamos diversas relaciones de inclusión de espacios potenciales de Bessel relacionadas con condiciones diádicas.

Teorema 1.5. *(Inclusión entre los espacios potenciales de Bessel con peso) Sea $s_1 < s_2$, $1 < p_1 \leq p_2 < \infty$ parámetros, $w_1 \in A_{p_1}(\mathbb{R}^n)$, $w_2 \in A_{p_2}(\mathbb{R}^n)$ pesos de Muckenhoupt. Los pesos w_1, w_2 satisfacen la condición diádica C_{s_1,p_1,s_2,p_2} si y sólo si*

$$
H_{w_1}^{s_2,p_1}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H_{w_2}^{s_1,p_2}(\mathbb{R}^n).
$$

Demostración. La proposición es un caso particular (con funciones de valor escalar) del Teorema 1.3 en [MV14] □

Corolario 1.4. *Sea $s > 0$, $1 < p_1 \leq p_2 < \infty$ parámetros, $w_1 \in A_{p_1}(\mathbb{R}^n)$, $w_2 \in A_{p_2}(\mathbb{R}^n)$ pesos de Muckenhoupt. Los pesos w_1, w_2 satisfacen la condición diádica C_{0,p_1,s,p_2} si y sólo si*

$$
H_{w_1}^{s,p_1}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L_{w_2}^{p_2}(\mathbb{R}^n) \tag{1.24}
$$

Demostración. La inclusión es un caso particular del Teorema 1.5 con $s_1 = 0$, $s_2 = s$ (Ver también Teorema 8.2 en [DG24]). □

Proposición 1.20. *Sea $s_1 \leq s_2$, $w \in A_p(\mathbb{R}^n)$ un peso de Muckenhoupt. Entonces*

$$H_w^{s_2,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H_w^{s_1,p}(\mathbb{R}^n)$$

Demostración. La inclusión es un caso particular de la Proposición 1.8 en [HS08] □

Relaciones de inclusión del espacio $H_w^{s,p}(a)$

En esta subsubsección, presentamos las inclusiones del espacio $H_w^{s,p}(a)$ en distintos espacios de funciones.

Proposición 1.21. *(Inclusión con el espacio L^p con peso) Sea $w \in A_p(\mathbb{R}^n)$ un peso de Muckenhoupt y una función $a \in \mathcal{J}_s^\beta(\mathbb{R}^n)$. Entonces se cumple la inclusión*

$$H_w^{s,p}(a) \hookrightarrow L_w^p(\mathbb{R}^n)$$

Demostración. Sea $u \in H_w^{s,p}(a)$, entonces

$$\begin{aligned}
\|u\|_{L_w^p(\mathbb{R}^n)} &= \left\| \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{(1+a(|\xi|^2))^{s/2}} \mathcal{F}\left[\mathcal{F}^{-1}\left((1+a(|\xi|^2))^{s/2}\widehat{u}(k) \right) \right] \right) \right\|_{L_w^p(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq C_{p,w} \left\| \mathcal{F}^{-1}\left((1+a(|\xi|^2))^{s/2}\widehat{u}(k) \right) \right\|_{L_w^p(\mathbb{R}^n)} \qquad (1.25) \\
&= C_{p,w} \left\| w^{1/p}\mathcal{F}^{-1}\left((1+a(|\xi|^2))^{s/2}\widehat{u}(k) \right) \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&= C_{p,w} \|u\|_{H_w^{s,p}(a)}
\end{aligned}$$

donde (1.25) sigue del hecho que la función $\xi \mapsto \frac{1}{(1+a(|\xi|^2))^{s/2}}$ es un multiplicador de Fourier para $L_w^p(\mathbb{R}^n)$ (Proposición 1.15). Por lo tanto,

$$\|u\|_{L_w^p(\mathbb{R}^n)} \leq C_{p,w} \|u\|_{H_w^{s,p}(a)},$$

es decir, $H_w^{s,p}(a) \hookrightarrow L_w^p(\mathbb{R}^n)$. □

Proposición 1.22. *(Inclusión con el espacio potencial de Bessel con peso) Sea $w \in A_p(\mathbb{R}^n)$ un peso de Muckenhoupt. Para cada $r \geq 0$, se cumple la inclusión*

$$H_w^{s+\frac{2r}{\beta},p}(a) \hookrightarrow H_w^{r,p}(\mathbb{R}^n).$$

Demostración. Sea $s_0 := s + \frac{2r}{\beta}$. Primero que todo, si $a \in \mathcal{J}_s^\beta(\mathbb{R}^n)$, entonces $a \in \mathcal{J}_{s_0}^\beta(\mathbb{R}^n)$ ya que $s \leq s_0$ (Observación 1.13), luego el espacio $H_w^{s+\frac{2r}{\beta},p}(a)$ está bien definido. Sea $u \in H_w^{s+\frac{2r}{\beta},p}(a)$, entonces

$$\|u\|_{H_w^{r,p}(\mathbb{R}^n)} = \left\| \mathcal{F}^{-1}\left((1+|\xi|^2)^{r/2}\widehat{u}(\xi) \right) \right\|_{L_w^p(\mathbb{R}^n)}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left\| \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{(1+|\xi|^2)^{r/2}}{(1+a(|\xi|^2))^{s_0/2}}\mathcal{F}\left[\mathcal{F}^{-1}\left((1+a(|\xi|^2))^{s_0/2}\widehat{u}(\xi)\right)\right]\right)\right\|_{L_w^p(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq C_{p,w}\left\|\mathcal{F}^{-1}\left((1+a(|\xi|^2))^{s_0/2}\widehat{u}(\xi)\right)\right\|_{L_w^p(\mathbb{R}^n)} \qquad (1.26)\\
&= C_{p,w}\left\|w^{1/p}\mathcal{F}^{-1}\left((1+a(|\xi|^2))^{s_0/2}\widehat{u}(\xi)\right)\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&= C_{p,w}\left\|u\right\|_{H_w^{s_0,p}(a)}
\end{aligned}
$$

donde la desigualdad (1.26) sigue del hecho de que la función $\xi \mapsto \frac{(1+|\xi|^2)^{r/2}}{(1+a(|\xi|^2))^{s_0/2}}$ es un multiplicador de Fourier para $L_w^p(\mathbb{R}^n)$ (Proposición 1.16). Por lo tanto,

$$\|u\|_{H_w^{r,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C_{p,w}\|u\|_{H_w^{s_0,p}(a)},$$

es decir, $H_w^{s+\frac{2r}{\beta},p}(a) \hookrightarrow H_w^{r,p}(\mathbb{R}^n)$. □

Corolario 1.5. *Sea $w \in A_p(\mathbb{R}^n)$ un peso de Muckenhoupt y una función $a \in \mathcal{J}_{s/2}^{\beta}(\mathbb{R}^n)$. Entonces se cumple la inclusión*

$$H_w^{s,p}(a) \hookrightarrow H_w^{\frac{\beta s}{4},p}(\mathbb{R}^n)$$

Demostración. Sea $r = \frac{\beta s}{4}$ y $a \in \mathcal{J}_{s/2}^{\beta}(\mathbb{R}^n)$. Por Proposición 1.22 tenemos que

$$H_w^{s,p}(a) = H_w^{s/2+2r/\beta}(a) \hookrightarrow H_w^{r,p}(\mathbb{R}^n)$$

Por lo tanto,

$$H_w^{s,p}(a) \hookrightarrow H_w^{\frac{\beta s}{4},p}(\mathbb{R}^n).$$

□

Las siguientes dos proposiciones son resultados de regularidad sobre el espacio $H_w^{s,p}(a)$. En adelante, para evitar una mayor introducción de parámetros en los diversos resultados, damos la siguiente convención: la inclusión

$$H_w^{r,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^{r,p}(\mathbb{R}^n)$$

donde $w \in A_p(\mathbb{R}^n)$ es un peso de Muckenhoupt tal que los pesos $w_1 = w$, $w_2 \equiv 1$ satisfacen la condición diádica $C_{r,p,r,p}$ se cumple por el Teorema 1.5 en el sentido de que el parámetro r en el espacio $H^{r,p}(\mathbb{R}^n)$ es algún número real r^- tal que $r^- < r$, es decir, denotamos al parámetro r^- por la misma notación r.

Proposición 1.23. *Sea β, $s \geq 0$ con $\beta s \geq 4n$, $w \in A_p(\mathbb{R}^n)$ un peso de Muckenhoupt tal que los pesos $w_1 = w$, $w_2 \equiv 1$ satisfacen la condición diádica $C_{r,p,r,p}$. Entonces se cumple la inclusión*

$$H_w^{s+\frac{2r}{\beta},p}(a) \hookrightarrow C^{\alpha}(\mathbb{R}^n) \cap L^{\infty}(\mathbb{R}^n)$$

donde $\alpha = r - n/p$.

Demostración. Sea $u \in H_w^{s+\frac{2r}{\beta}}(a)$, entonces

$$H_w^{s+\frac{2r}{\beta}}(a) \hookrightarrow H_w^{r,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^{r,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C^{\alpha}(\mathbb{R}^n) \cap L^{\infty}(\mathbb{R}^n)$$

donde la primera inclusión sigue del Proposición 1.22, la segunda inclusión del Teorema 1.5 y la tercera inclusión (inclusión de Sobolev) del Teorema 3.4 (v) en [Now20, Sec. 3, Teo. 3.4 (iv)], [BO13, Sec. 2, Ec. (2.1)]).

□

Corolario 1.6. *Sea β, $s \geq 0$ con $\beta s \geq 4n$ parámetros, $w \in A_p(\mathbb{R}^n)$ un peso de Muckenhoupt tal que los pesos $w_1 = w$, $w_2 \equiv 1$ satisfacen la condición diádica $C_{\beta s/4,p,\beta s/4,p}$ y una función $a \in \mathcal{J}_{s/2}^{\beta}(\mathbb{R}^n)$. Entonces se cumple la inclusión*

$$H_w^{s,p}(a) \hookrightarrow C^{\alpha}(\mathbb{R}^n) \cap L^{\infty}(\mathbb{R}^n) \tag{1.27}$$

donde $\alpha = \frac{\beta s}{4} - \frac{n}{p}$

Demostración. Sea $u \in H_w^{s,p}(a)$. Entonces

$$H_w^{s,p}(a) = H_w^{s/2+\frac{2r}{\beta},p}(a) \hookrightarrow C^{\alpha}(\mathbb{R}^n) \cap L^{\infty}(\mathbb{R}^n) \tag{1.28}$$

donde la inclusión sigue de la Proposición 1.23 con $r = \frac{\beta s}{4}$ □

El siguiente teorema nos dice que los espacios $H_w^{s,p}(a)$ forman una escala decreciente de espacios de Banach:

Teorema 1.6. *(Escala decreciente de espacios) Sea β, s_1, $s_2 \geq 0$ con $\beta(s_2 - s_1) \geq 4n$, $s_1 \leq s_2$ parámetros, $w \in A_p(\mathbb{R}^n)$ un peso de Muckenhoupt y una función $a \in \mathcal{J}_{s_2-s_1}^{\beta}(\mathbb{R}^n)$. Entonces se cumple la inclusión*

$$H_w^{s_2,p}(a) \hookrightarrow H_w^{s_1,p}(a)$$

Demostración. Sea $u \in H_w^{s_2}(a)$, entonces

$$\begin{aligned}
\|u\|_{H_w^{s_1,p}(a)} &= \left\| w^{1/p}\mathcal{F}^{-1}\left((1+a(|\xi|^2))^{s_1/2}\widehat{u}(\xi)\right)\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&= \left\| \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{(1+a(|\xi|^2))^{s_1/2}}{(1+a(|\xi|^2))^{s_2/2}}\mathcal{F}\left[\mathcal{F}^{-1}(1+a(|\xi|^2))^{s_2/2}\widehat{u}(\xi)\right]\right)\right\|_{L_w^p(\mathbb{R}^n)} \\
&= \left\| \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{(1+a(|\xi|^2))^{(s_2-s_1)/2}}\mathcal{F}\left[\mathcal{F}^{-1}(1+a(|\xi|^2))^{s_2/2}\widehat{u}(\xi)\right]\right)\right\|_{L_w^p(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq C_{p,w}\left\| \mathcal{F}^{-1}\left((1+a(|\xi|^2))^{s_2/2}\widehat{u}(\xi)\right)\right\|_{L_w^p(\mathbb{R}^n)} \\
&= C_{p,w}\left\| w^{1/p}\mathcal{F}^{-1}\left((1+a(|\xi|^2))^{s_2/2}\widehat{u}(\xi)\right)\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&= C_{p,w}\|u\|_{H_w^{s_2,p}(a)}
\end{aligned} \tag{1.29}$$

donde (1.29) sigue del hecho de que la función $\xi \mapsto \frac{1}{(1+a(|\xi|^2))^{(s_2-s_1)/2}}$ es un multiplicador de Fourier para $L^p_w(\mathbb{R}^n)$ cuando $a \in \mathcal{J}^\beta_{s_2-s_1}(\mathbb{R}^n)$ (Proposición 1.15). Por lo tanto,

$$\|u\|_{H^{s_1,p}_w(a)} \leq C_{p,w} \|u\|_{H^{s_2}_w(a)},$$

es decir, $H^{s_2,p}_w(a) \hookrightarrow H^{s_1,p}_w(a)$. □

Proposición 1.24. *(Inclusión entre pesos) Sean w_1, $w_2 \in A_p(\mathbb{R}^n)$ pesos de Muckenhoupt con $w_1 \leq w_2$. Entonces se cumple la inclusión*

$$H^{s,p}_{w_2}(a) \hookrightarrow H^{s,p}_{w_1}(a)$$

Demostración. Sea $u \in H^{s,p}_{w_2}(a)$, entonces,

$$\begin{aligned} \|u\|^p_{H^{s,p}_{w_1}(a)} &= \int_{\mathbb{R}^n} w_1(x) \left|\mathcal{F}^{-1}\left((1+a(|\xi|^2))^{s/2}\widehat{u}(\xi)\right)(x)\right|^p dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} w_2(x) \left|\mathcal{F}^{-1}\left((1+a(|\xi|^2))^{s/2}\widehat{u}(\xi)\right)(x)\right|^p dx \qquad (1.30) \\ &= \|u\|^p_{H^{s,p}_{w_2}(a)} \end{aligned}$$

donde (1.30) sigue del supuesto $w_1 \leq w_2$. Por lo tanto,

$$\|u\|_{H^{s,p}_{w_1}(a)} \leq \|u\|_{H^{s,p}_{w_2}(a)},$$

es decir, $H^{s,p}_{w_2}(a) \hookrightarrow H^{s,p}_{w_1}(a)$. □

Observación 1.15. *Las inclusiones en esta sección también son válidas sobre algún subconjunto abierto convexo $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ puesto que la frontera de un conjunto convexo en $\mathbb{R}^n$ tiene medida cero. Más precisamente, $\overline{\Omega} \setminus \Omega$ tiene medida nula.*

1.4 Una clase de símbolos y operadores pseudo-diferenciales

Definición 1.16. *(Clase de símbolos) Denotamos por $S^\beta_{s,p}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ al conjunto de todas las funciones $\sigma_{w,a} \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definidas por*

$$\sigma_{w,a}(x,\xi) = w(x)^{1/p}(1+a(|\xi|^2))^{s/2}$$

donde $w \in A_p(\mathbb{R}^n)$ y $a \in \mathcal{J}^\beta_s(\mathbb{R}^n)$. El conjunto $S^\beta_{s,p}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ se denomina una clase de símbolos y una función $\sigma_{w,a} \in S^\beta_{w,p}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ se denomina un símbolo. La parte espacial del símbolo $\sigma_{w,a}$ viene dada por la función $x \mapsto w(x)^{1/p}$ y la parte de frecuencia, por $\xi \mapsto (1+a(|\xi|^2))^{s/2}$.

Observación 1.16. *Si $a \in \mathcal{J}^\beta_{s/2}(\mathbb{R}^n)$, entonces $a \in \mathcal{J}^\beta_s(\mathbb{R}^n)$ debido a que $s/2 < s$ (Proposición 1.14). Esta observación permite considerar un símbolo $\sigma_{w,a} \in \mathcal{S}^\beta_{s,p}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ proveniente de una función a desde la clase $\mathcal{J}^\beta_{s/2}(\mathbb{R}^n)$.*

En las siguientes proposiciones presentamos ejemplos de símbolos en la clase $S^\beta_{s,p}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$

Proposición 1.25. *Sea* $\beta = 2$, $s \geq 2n$ *y* $-n < \gamma < n(p-1)$. *La función* $\sigma_{w,a}(x,\xi) = |x|^{\gamma/p}(1 + |\xi|^2)^{s/2}$ *es un símbolo en la clase* $S^{\beta}_{s,p}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$.

Demostración. Sigue del hecho de que la función $a(t) = t$ está en la clase $\mathcal{J}^{\beta}_{s}(\mathbb{R}^n)$ y el peso $w(x) = |x|^{\gamma}$ está en la clase de Muckenhoupt $A_p(\mathbb{R}^n)$ cuando $-n < \gamma < n(p-1)$. □

Proposición 1.26. *Sea* β, $s \geq 0$ *con* $\beta s \geq 4n$ *y* $-n < \gamma < n(p-1)$. *La función* $\sigma_{w,a}(x,\xi) = |x|^{\gamma/p}(1 + |\xi|^2 \mathrm{e}^{c|\xi|^2})$ *es un símbolo en la clase* $S^{\beta}_{s,p}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$

Demostración. Se sigue del hecho de que la función $a(t) = \mathrm{e}^{ct}$ está en la clase $\mathcal{J}^{\beta}_{s}(\mathbb{R}^n)$ para $\beta s \geq 4n$ (Proposición 1.12) y el peso $w(x) = |x|^{\gamma}$ está en la clase de Muckenhoupt $A_p(\mathbb{R}^n)$ cuando $-n < \gamma < n(p-1)$. □

A partir de la clase de símbolos $S^{\beta}_{s,p}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ junto con el espacio $H^{s,p}_{w}(a)$, podemos definir un operador pseudo-diferencial como sigue:

Definición 1.17. *(El operador) Sea* $\sigma_{w,a}$ *un símbolo en la clase* $S^{\beta}_{s,p}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. *Definimos el operador lineal* $A\colon D(A) \subset L^p_w(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)$ *por*

$$A(u) = w^{1/p}\mathcal{F}^{-1}\left((1 + a(|\xi|^2))^{s/2}\widehat{u}(\xi)\right), \quad u \in D(A)$$

con dominio $D(A) = H^{s,p}_{w}(a)$. *Denominamos al operador* A *como el operador pseudo-diferencial asociado al símbolo* $\sigma_{w,a}$.

Observación 1.17. *El operador* A *es invertible ya que* $A = T^{-1}$ *donde* T *es el operador en el Corolario 1.2.*

La siguiente definición es formal pero es útil para entender el concepto de operador pseudo-diferencial como una representación integral a partir de un símbolo:

Definición 1.18. *(Operador pseudo-diferencial formal) Sea* $\sigma\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ *una función. Un operador* P *definido por*

$$(P(u))(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{ix\cdot\xi}\sigma(x,\xi)\widehat{u}(\xi)\,d\xi, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

se denomina (formalmente) un operador pseudo-diferencial. La función σ *se denomina el símbolo del operador* P.

Observación 1.18. *El operador* A *es formalmente un operador pseudo-diferencial:*

$$\begin{aligned}
(A(u))(x) &= w(x)^{1/p}\mathcal{F}^{-1}\left((1 + a(|\xi|^2))^{s/2}\widehat{u}(\xi)\right)(x) \\
&= w(x)^{1/p}\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{ix\cdot\xi}(1 + a(|\xi|^2))^{s/2}\widehat{u}(\xi)\,d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{ix\cdot\xi}w(x)^{1/p}(1 + a(|\xi|^2))^{s/2}\widehat{u}(\xi)\,d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{ix\cdot\xi}\sigma_{w,a}(x,\xi)\widehat{u}(\xi)\,d\xi
\end{aligned}$$

para $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in D(A)$ *y donde* $\sigma_{w,a}$ *es un símbolo en la clase* $S^{\beta}_{s,p}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$*. Por lo tanto,*

$$(A(u))(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{ix\cdot\xi}\sigma_{w,a}(x,\xi)\widehat{u}(\xi)\, d\xi, \quad x \in \mathbb{R}^n,\, u \in D(A),$$

es decir, el operador A *es un operador pseudo-diferencial con símbolo* $\sigma_{w,a} \in S^{\beta}_{s,p}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ *definido por* $\sigma_{w,a}(x,\xi) = w(x)^{1/p}(1 + a(|\xi|^2))^{s/2}$.

1.5 Problema lineal y no lineal

En esta sección estudiamos la solubilidad del problema lineal y no lineal asociado al operador A. En la primera subsección, estudiamos el problema en un contexto no radial. En la segunda subsección, en un contexto radial.

1.5.1 Problema lineal y no lineal

En esta subsección, estudiamos la solubilidad del problema lineal $A(u) = f$. Posteriormente, estudiamos el problema no lineal $A(u) = V(\cdot, u)$ con métodos de punto fijo.

Teorema 1.7. *(Primer problema lineal) Sea* $\sigma_{w,a} \in \mathcal{S}^{\beta}_{s,p}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ *un símbolo y* A *el operador pseudo-diferencial asociado al símbolo* $\sigma_{w,a}$*. Para cada* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$*, el problema lineal*

$$A(u) = f \tag{1.31}$$

tiene una única solución $u_f \in H^{s,p}_w(a)$*. Adicionalmente,* $\|u\|_{H^{s,p}_w(a)} = \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$.

Demostración. Sea $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. El operador A es invertible (Observación 1.17), luego la única solución del problema (1.31) es

$$u_f = A^{-1}(f) = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{(1 + a(|\xi|^2))^{s/2}}\widehat{\left(\frac{f}{w^{1/p}}\right)}(\xi)\right)$$

con $u_f \in D(A) = H^{s,p}_w(a)$. Además $\|u_f\|_{H^{s,p}_w(a)} = \|A(u_f)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \left\|A(A^{-1}(f))\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$. □

Teorema 1.8. *(Segundo problema lineal) Sea* $s \geq r$, $\sigma_{w,a} \in \mathcal{S}^{\beta}_{r,p}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ *con* $a \in \mathcal{J}^{\beta}_{s-r}(\mathbb{R}^n)$ *y* A *el operador pseudo-diferencial asociado al símbolo* $\sigma_{w,a}$*. Para cada* $f = w^{1/p}g$ *con* $g \in H^{s-r,p}_w(a)$*, el problema lineal*

$$A(u) = f \tag{1.32}$$

tiene una única solución $u_f \in H^{s,p}_w(a)$.

Demostración. El problema lineal (1.32) es equivalente a

$$w^{1/p}\mathcal{F}^{-1}\left((1 + a(|\xi|^2))^{r/2}\widehat{u}(\xi)\right) = f \tag{1.33}$$

la única solución de (1.33) es

$$u_f = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{(1+a(|\xi|^2))^{r/2}}\widehat{\left(\frac{f}{w^{1/p}}\right)}(\xi)\right)$$

donde $u_f \in H^{s,p}_w(a)$ ya que

$$\begin{aligned}
\|u_f\|_{H^{s,p}_w(a)} &= \left\|w^{1/p}\mathcal{F}^{-1}\left((1+a(|\xi|^2))^{s/2}\widehat{u_f}(\xi)\right)\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n}\\
&= \left\|w^{1/p}\mathcal{F}^{-1}\left((1+a(|\xi|^2))^{(s-r)/2}\widehat{\left(\frac{f}{w^{1/p}}\right)}(\xi)\right)\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\\
&= \left\|w^{1/p}\mathcal{F}^{-1}\left((1+a(|\xi|^2))^{(s-r)/2}\widehat{g}(\xi)\right)\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\\
&= \|g\|_{H^{s-r}_w(a)}\,. \qquad (1.34)
\end{aligned}$$

donde (1.34) es finito por el supuesto $g \in H^{s-r,p}_w(a)$. Por lo tanto,

$$\|u_f\|_{H^{s,p}_w(a)} = \|g\|_{H^{s-r}_w(a)}\,,$$

es decir, $u_f \in H^{s,p}_w(a)$.

□

Observación 1.19. *Observemos que con el peso de Muckenhoupt constante $w \equiv 1$ y la función $a(t) = t$, los espacios $H^{s,p}_w(a)$, $H^{s-r,p}_w(a)$ coinciden con los espacios potenciales de Bessel $H^{s,p}(\mathbb{R}^n)$, $H^{s-r,p}(\mathbb{R}^n)$ respectivamente. Este caso corresponde al hecho conocido que el operador de Bessel fraccionario $(I-\Delta)^{r/2}$ es un isomorfismo (en nuestro caso, para $r \leq s$)*

$$(I-\Delta)^{r/2}\colon H^{s,p}(\mathbb{R}^n) \to H^{s-r,p}(\mathbb{R}^n)$$

(ver [Haz12])

A partir de la solubilidad del problema lineal asociado al operador A (Teorema 1.7) estamos en condiciones de investigar el problema no lineal asociado a este operador mediante métodos de punto fijo.

La siguiente definición de un operador, conocida en la literatura como un operador de Nemytskii (ver [Pre13, Cap 9., Sec. 9.1]), es formal, puesto que no se define el dominio de este operador, pero es útil para desarrollar cierta terminología a lo largo del trabajo.

Definición 1.19. *(Operador de Nemytskii u operador de superposición) Sea $V\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una función medible. El operador*

$$u \mapsto V(\cdot, u)$$

se denomina un operador de Nemytskii u operador de superposición asociado a la función V.

La siguiente condición es usual en el estudio de problemas no lineales:

Definición 1.20. *(Condición de Lipschitz global) Una función medible $V\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ satisface la condición de Lipschitz global (en la variable y) si satisface*

$$|V(x, y_2) - V(x, y_2)| \leq |h(x)||y_1 - y_2|, \quad x \in \mathbb{R}^n,\ y_1,\ y_2 \in \mathbb{R} \tag{1.35}$$

para alguna función $h \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Lema 1.2. *Sea β, $s \geq 0$ con $\beta s \geq 4n$ parámetros, $w \in A_p(\mathbb{R}^n)$ un peso de Muckenhoupt tal que los pesos $w_1 = w$, $w_2 \equiv 1$ satisfacen la condición diádica $C_{\beta s/4,p,\beta s/4,p}$ y una función $a \in \mathcal{J}^\beta_{s/2}(\mathbb{R}^n)$. Entonces se cumplen las inclusiones*

$$H^{s,p}_w(a) \hookrightarrow H^{\frac{\beta s}{4},p}_w(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^{\frac{\beta s}{4},p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^n)$$

.

Demostración. La primera inclusión sigue del Proposición 1.22, la segunda inclusión del Teorema 1.5 y la tercera inclusión de las conocidas inclusiones de potenciales de Bessel [HVW24, Cap. 14, Sec. 14.7, Teo. 14.7.1]. □

Teorema 1.9. *(Primer problema no lineal) Sea β, $s \geq 0$ parámetros con $\beta s \geq 4n$, $w \in A_p(\mathbb{R}^n)$ un peso de Muckenhoupt tal que los pesos $w_1 = w$, $w_2 \equiv 1$ satisfacen la condición diádica $C_{\beta s/4,p,\beta s/4,p}$, una función $a \in \mathcal{J}^\beta_{s/2}(\mathbb{R}^n)$, y una función medible $V : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ satisfaciendo la condición de Lipschitz global con peso (1.35) junto con el supuesto adicional $V(\cdot, 0) \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Entonces para cada $\delta > 0$ suficientemente pequeño, el problema no lineal*

$$A(u) = \delta V(\cdot, u) \tag{1.36}$$

tiene una única solución $u \in H^{s,p}_w(a)$.

Demostración. Como primer paso en la demostración probaremos que el operador de Nemytskii

$$L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)\colon u \mapsto V(\cdot, u)$$

está bien definido. Más precisamente, que es acotado, es decir, que se cumple

$$\|V(\cdot, u)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|V(\cdot, 0)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Por la condición de Lipschitz global (1.35) junto con la desigualdad triangular,

$$|V(x, y)| \leq |V(x, y) - V(x, 0)| + |V(x, 0)| \leq |h(x)||y| + |V(x, 0)|$$

y por una desigualdad elemental[2] (omitiendo constantes),

$$|V(x, y)|^p \leq |h(x)|^p|y|^p + |V(x, 0)|^p,$$

[2] $|a + b|^p \leq 2^p(|a|^p + |b|^p),\ p \geq 0, a, b \in \mathbb{C}$, [Gar07, Cap. 5, Sec. 5.1]

se sigue que,

$$\begin{aligned}
\|V(\cdot,u)\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} &= \int_{\mathbb{R}^n} |V(x,u(x))|^p\,dx \\
&\le \int_{\mathbb{R}^n} \left(|h(x)|^p|u(x)|^p + |V(x,0)|^p\right)\,dx \\
&\le \|h\|^p_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^p\,dx + \int_{\mathbb{R}^n} |V(x,0)|^p\,dx \\
&= \|h\|^p_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\,\|u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|V(\cdot,0)\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)},
\end{aligned}$$

así

$$\|V(\cdot,u)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le \|h\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\,\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|V(\cdot,0)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \tag{1.37}$$

es decir, $V(\cdot,u) \in L^p(\mathbb{R}^n)$ cuando $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Por lo tanto, el operador de Nemytskii está bien definido.

Como segundo paso en la demostración, probaremos que el operador lineal $R\colon H^{s,p}_w(a) \to H^{s,p}_w$ definido por $R(u) = v_u$ donde v_u es la única solución en $H^{s,p}_w(a)$ del problema lineal

$$A(v) = \delta V(\cdot,u), \tag{1.38}$$

está bien definido y tiene un punto fijo en el espacio $H^{s,p}_w(a)$. Sea $u \in H^{s,p}_w(a)$. Por Lema 1.2 se cumplen las inclusiones $H^{s,p}_w(a) \hookrightarrow H^{\frac{\beta s}{4},p}_w(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^{\frac{\beta s}{4},p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^n)$, luego $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y por (1.37) obtenemos que $V(\cdot,u) \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Se sigue del Teorema 1.7 que el problema lineal (1.38) tiene una única solución $v_u \in H^{s,p}_w(a)$. Por lo tanto, R es un operador bien definido como operador de $H^{s,p}_w(a)$ en $H^{s,p}_w(a)$. Adicionalmente, el operador R es una contracción: sea u_1, $u_2 \in H^{s,p}_w(a)$, por la linealidad del operador A tenemos que $R(u_1) - R(u_2) = \delta\left(V(\cdot,u_1) - V(\cdot,u_2)\right)$ es la única solución del problema no lineal $A(v) = \delta\left(V(\cdot,u_1) - V(\cdot,u_2)\right)$, entonces

$$\begin{aligned}
\|R(u_1) - R(u_2)\|_{H^{s,p}_w(a)} &= \|v_{u_1} - v_{u_2}\|_{H^{s,p}_w(a)} \\
&= \|A(v_{u_1} - v_{u_2})\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&= \delta\,\|V(\cdot,u_1) - V(\cdot,u_2)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&\le \delta\,\|h(u_1-u_2)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \qquad (1.39)\\
&\le \delta\,\|h\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\,\|u_1-u_2\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \qquad (1.40)\\
&\le \delta\,\|h\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\,\|u_1-u_2\|_{H^{\frac{\beta s}{4},p}(\mathbb{R}^n)} \qquad (1.41)\\
&\le \delta\,\|h\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\,\|u_1-u_2\|_{H^{\frac{\beta s}{4},p}_w(\mathbb{R}^n)} \qquad (1.42)\\
&\le \delta\,\|h\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\,\|u_1-u_2\|_{H^{s,p}_w(a)} \qquad (1.43)\\
&< \|u_1-u_2\|_{H^{s,p}_w(a)} \qquad (1.44)
\end{aligned}$$

donde (1.39) sigue de la condición de Lipschitz global (1.35), (1.40) de la desigualdad de Hölder, (1.41)-(1.43) de las inclusiones $H^{s,p}_w(a) \hookrightarrow H^{\frac{\beta s}{4},p}_w(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^{\frac{\beta s}{4},p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^n)$ (Lema 1.2) y (1.44) se cumple cuando $0 < \delta < \frac{1}{\|h\|_{L^\infty}}$. Por lo tanto

$$\|R(u_1) - R(u_2)\|_{H^{s,p}_w(a)} < \|u_1 - u_2\|_{H^{s,p}_w(a)},$$

es decir, el operador R es una contracción. Finalmente, por el Teorema del punto fijo de Banach [Jos05, Cap. 4, Teo. 4.7], existe una única función $u \in H^{s,p}_w(a)$ tal que $R(u) = u$, es decir, el problema no lineal (1.36) tiene una única solución en el espacio $H^{s,p}_w(a)$. □

Observación 1.20. *Con el peso $w \equiv 1$ obtenemos solución del problema no lineal $(1+a(-\Delta))^{s/2}(u) = \delta V(\cdot, u)$ en el espacio $H^{s,p}(a)$.*

A continuación presentamos una versión con peso de la condición de Lipschitz global:

Definición 1.21. *(Condición de Lipschitz global con peso) Sea $w \in A_p(\mathbb{R}^n)$ un peso de Muckenhoupt. Una función medible $V\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ satisface la condición de Lipschitz global (en la variable y) si satisface*

$$|V(x, y_1) - V(x, y_2)| \leq |h(x)|w(x)^{1/p}|y_1 - y_2|, \quad x \in \mathbb{R}^n,\ y_1,\ y_2 \in \mathbb{R} \tag{1.45}$$

para alguna función $h \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Observación 1.21. *Notemos que con el peso de Muckenhoupt constante $w \equiv 1$ la Definición 1.21 coincide con la Definición 1.20.*

Teorema 1.10. *(Variante del primer problema no lineal) Sea $w \in A_p(\mathbb{R}^n)$ un peso de Muckenhoupt , una función $a \in \mathcal{J}^\beta_s(\mathbb{R}^n)$. y una función medible $V : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ satisfaciendo la condición de Lipschitz global con peso (1.45) junto con el supuesto adicional $V(\cdot, 0) \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Entonces, para cada $\delta > 0$ suficientemente pequeño, el problema no lineal*

$$A(u) = \delta V(\cdot, u) \tag{1.46}$$

tiene una única solución $u \in H^{s,p}_w(a)$.

Demostración. Como primer paso en la demostración, probaremos que el operador de Nemytskii

$$L^p_w(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)\colon u \mapsto V(\cdot, u)$$

está bien definido. Más precisamente, que es acotado es decir,

$$\|V(\cdot, u)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|u\|_{L^p_w(\mathbb{R}^n)} + \|V(\cdot, 0)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Por la condición de Lipschitz global con peso (1.45) junto con la desigualdad triangular,

$$|V(x, y)| \leq |V(x, y) - V(x, 0)| + |V(x, 0)| \leq |h(x)|w(x)^{1/p}|y| + |V(x, 0)|,$$

y por una desigualdad elemental[(3)] (omitiendo constantes),

$$|V(x, y)|^p \leq (|h(x)|^p w(x)|y|^p + |V(x, 0)|^p), \tag{1.47}$$

[(3)] $|a + b|^p \leq 2^p(|a|^p + |b|^p),\ p \geq 0, a, b \in \mathbb{C}$, [Gar07, Cap. 5, Sec. 5.1]

se sigue que,

$$
\begin{aligned}
\|V(\cdot,u)\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} &= \int_{\mathbb{R}^n} |V(x,u(x))|^p \, dx. \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(|h(x)|^p w(x)|u(x)|^p + |V(x,0)|^p\right) \, dx \qquad (1.48)\\
&= \left\|hw^{1/p}u\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|V(\cdot,0)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq \|h\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \left\|w^{1/p}u\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|V(\cdot,0)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \qquad (1.49)\\
&= \|h\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \|u\|_{L^p_w(\mathbb{R}^n)} + \|V(\cdot,0)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}
\end{aligned}
$$

donde (1.48) sigue de (1.47) y (1.49) de la Desigualdad de Hölder. Por lo tanto,

$$
\|V(\cdot,u)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|h\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \|u\|_{L^p_w(\mathbb{R}^n)} + \|V(\cdot,0)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \qquad (1.50)
$$

es decir, $V(\cdot,u) \in L^p(\mathbb{R}^n)$ cuando $u \in L^p_w(\mathbb{R}^n)$.

Como segundo paso en la demostración, probaremos que el operador lineal $R\colon H^{s,p}_w(a) \to H^{s,p}_w(a)$ definido por $R(u) = v_u$ donde v_u es la única solución en $H^{s,p}_w(a)$ del problema lineal

$$
A(v) = \delta V(\cdot,u), \qquad (1.51)
$$

está bien definido. Sea $u \in H^{s,p}_w(a)$, por definición, $u \in L^p_w(\mathbb{R}^n)$, luego por (1.50) obtenemos que $\delta V(\cdot,u) \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Se sigue del Teorema 1.7, que el problema lineal (1.51) tiene una única solución $v_u \in H^{s,p}_w(a)$. Por lo tanto, R es un operador bien definido como operador de $H^{s,p}_w(a)$ en $H^{s,p}_w(a)$. Adicionalmente, el operador R es una contracción: Sea $u_1,\, u_2 \in H^{s,p}_w(a)$, entonces

$$
\begin{aligned}
\|R(u_1) - R(u_2)\|_{H^{s,p}_w(a)} &= \|v_{u_1} - v_{u_2}\|_{H^{s,p}_w(a)} \\
&= \|A(v_{u_1} - v_{u_2})\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&= \delta \, \|V(\cdot,u_1) - V(\cdot,u_2)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq \delta \left\|hw^{1/p}(u_1 - u_2)\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \qquad (1.52)\\
&\leq \delta \, \|h\|_{L^\infty} \left\|w^{1/p}(u_1 - u_2)\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&= \delta \, \|h\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \|u_1 - u_2\|_{L^p_w(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq \delta \, \|h\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \|u_1 - u_2\|_{H^{s,p}_w(a)} \qquad (1.53)\\
&< \|u_1 - u_2\|_{H^{s,p}_w(a)} \qquad (1.54)
\end{aligned}
$$

donde (1.52) sigue de la condición de Lipschitz global con peso w (1.45), (1.53) de la inclusión $H^{s,p}_w \hookrightarrow L^p_w(\mathbb{R}^n)$ (Proposición 1.21) y (1.54) se cumple cuando $0 < \delta < \frac{1}{\|h\|_{L^\infty}}$. Por lo tanto

$$
\|R(u_1) - R(u_2)\|_{H^{s,p}_w(a)} < \|u_1 - u_2\|_{L^p_w(\mathbb{R}^n)},
$$

es decir, el operador R es una contracción. Finalmente, por el Teorema del punto fijo de Banach [Jos05, Cap. 4, Teo. 4.7], existe una única función $u \in H^{s,p}_w(a)$ tal que $R(u) = u$, es decir, el problema no lineal (1.46) tiene una única solución en el espacio $H^{s,p}_w(a)$. □

También es posible estudiar el problema no lineal asociado al operador A mediante condiciones de crecimiento sobre la no linealidad V:

Definición 1.22. *(Condiciones de crecimiento) Sea $\alpha > 1$ un parámetro. Una función medible $V\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de clase $C^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ satisface una condición de crecimiento si existe una función $h \in L^p(\mathbb{R}^n)$ de modo que*

$$|V(x,y)| + |\partial_{x_i} V(x,y)| \leq C_1(|h(x)| + |y|^\alpha), \quad x \in \mathbb{R}^n,\, y \in \mathbb{R},\, i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.55}$$

$$|\partial_y V(x,y)| \leq C_2(1 + |y|^\alpha), \quad x \in \mathbb{R}^n,\, y \in \mathbb{R}, \tag{1.56}$$

para algunas constantes C_1, $C_2 > 0$.

El siguiente teorema es una adaptación del Teorema 4.4 de la referencia [BPR19] (donde el espacio ambiente es $L^p(\mathbb{R}^n)$) para el estudio de solubilidad del problema no lineal asociado al operador A, dentro del espacio $H^{s,p}_w(a)$. Este resultado tiene su origen (en el espacio ambiente $L^2(\mathbb{R}^n)$) en el Teorema 3.3 de la referencia [GPR13].

Lema 1.3. *Sea $\alpha > 1$, $m \geq 0$ parámetros, $w \in A_p(\mathbb{R}^n)$ un peso de Muckenhoupt tal que los pesos $w_1 = w$, $w_2 \equiv 1$ satisfacen la condición diádica $C_{r_\alpha,p,r_\alpha+m,p}$. Entonces se cumplen las inclusiones*

$$H^{r_\alpha+m,p}_w(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^{r_\alpha,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{\alpha p}(\mathbb{R}^n)$$

donde $r_\alpha = \frac{n(\alpha-1)}{\alpha p}$.

Demostración. La primera inclusión sigue del Teorema 1.5 donde $r_\alpha < r_\alpha + m$ y la segunda inclusión de la Proposición 6.4 en [Tay11]. □

Lema 1.4. *Sea $\alpha > 1$, $1 < p < \infty$, $m > \frac{n}{\alpha p}$ parámetros, $w \in A_p(\mathbb{R}^n)$ un peso de Muckenhoupt tal que los pesos $w_1 = w$, $w_2 \equiv 1$ satisfacen la condición diádica $C_{r_\alpha+m,p,r_\alpha+m,p}$. Entonces se cumplen las inclusiones*

$$H^{r_\alpha+m,p}_w(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^{r_\alpha+m,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$$

donde $r_\alpha = \frac{n(\alpha-1)}{\alpha p}$.

Demostración. La primera inclusión sigue del Teorema 1.5 y la segunda inclusión sigue de la Proposición 6.3 en [Tay11] ya que $r_\alpha + m > n/p$. □

Lema 1.5. *Sea β, $s \geq 0$ con $\beta s \geq 4n$, $\alpha > 1$, $m \leq \frac{\beta s}{4\alpha}$ parámetros, $w \in A_p(\mathbb{R}^n)$ un peso de Muckenhoupt y una función $a \in \mathcal{J}^\beta_{s/2}(\mathbb{R}^n)$. Entonces se cumplen las inclusiones.*

$$H^{s,p}_w(a) \hookrightarrow H^{r_\alpha+m,p}_w(\mathbb{R}^n)$$

donde $r_\alpha = \frac{n(\alpha-1)}{\alpha p}$.

Demostración. La demostración sigue de las inclusiones

$$H^{s,p}_w(a) \hookrightarrow H^{\frac{\beta s}{4},p}_w(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^{r_\alpha+m,p}_w(\mathbb{R}^n)$$

donde la primera inclusión sigue de Proposición 1.22, la segunda inclusión de la Proposición 1.20 ya que $r_\alpha + m \leq \beta s/4$. $\square$

Teorema 1.11. *(Segundo problema no lineal) Sea β, $s \geq 0$ con $\beta s \geq 4n$, $\alpha > 1$, $1 < p < n$, $\frac{n}{\alpha p} \leq m \leq \frac{\beta s}{4\alpha}$ parámetros, un peso de Muckenhoupt $w \in A_p(\mathbb{R}^n)$ satisfaciendo las condiciones diádicas $C_{r_\alpha+m,p,r_\alpha+m,p}$, $C_{r_\alpha,p,r_\alpha+m,p}$ y una función $a \in \mathcal{J}^{\beta}_{s/2}(\mathbb{R}^n)$. Sea $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ una función suave y de soporte compacto, V una función satisfaciendo las condiciones de crecimiento (1.55)-(1.56). Entonces para cada $\delta > 0$ suficientemente pequeño, el problema no lineal*

$$A(u) = \delta\varphi V(\cdot, u) \tag{1.57}$$

tiene una solución $u \in H^{s,p}_w(a)$.

Demostración. Como primer paso en la demostración, probaremos que el operador de Nemytskii

$$H^{r_\alpha+m,p}_w(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n) \colon u \mapsto V(\cdot, u)$$

está bien definido. Más precisamente, que es acotado, es decir, que

$$\|V(\cdot,u)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|h\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|u\|^{\alpha}_{H^{r_\alpha+m,p}_w(\mathbb{R}^n)}.$$

Sea $u \in H^{r_\alpha+m,p}_w(\mathbb{R}^n)$, entonces

$$\begin{aligned}
\|V(\cdot,u)\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} &\leq \|h\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^{\alpha p}\, dx && (1.58)\\
&= \|h\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|u\|^{\alpha p}_{L^{\alpha p}(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq \|h\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|u\|^{\alpha p}_{H^{r_\alpha,p}(\mathbb{R}^n)} && (1.59)\\
&\leq \|h\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|u\|^{\alpha p}_{H^{r_\alpha+m,p}_w(\mathbb{R}^n)} && (1.60)
\end{aligned}$$

donde (1.58) sigue de la condición de crecimiento (1.55) sobre V y (1.59)-(1.60) de las inclusiones $H^{r_\alpha+m,p}_w(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^{r_\alpha,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{\alpha p}(\mathbb{R}^n)$ (Lema 1.3).

Por lo tanto,

$$\|V(\cdot,u)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|h\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|u\|^{\alpha}_{H^{r_\alpha+m,p}_w(\mathbb{R}^n)}, \tag{1.61}$$

es decir, $V(\cdot,u) \in L^p(\mathbb{R}^n)$ cuando $u \in H^{r_\alpha+m,p}_w(\mathbb{R}^n)$ y $h \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Por lo tanto, el operador de Nemytskii está bien definido.

Como segundo paso en la demostración, probaremos que el operador lineal $R \colon B_0 \to B_0$ donde

$$B_0 = \left\{ u \in H^{r_\alpha+m,p}_w(\mathbb{R}^n) : \|u\|_{H^{r_\alpha+m,p}_w(\mathbb{R}^n)} \leq 1 \right\}.$$

(la bola unitaria en el espacio $H^{r_\alpha+m,p}_w(\mathbb{R}^n)$) definido por $R(u) = v_u$ donde v_u es la única solución en el espacio $H^{s,p}_w(a)$ para el problema no lineal

$$A(v) = \delta\varphi V(\cdot, u). \tag{1.62}$$

está bien definido cuando δ es suficientemente pequeño. Sea $u \in B_0$, por definición, $u \in H_w^{r_\alpha+m,p}(\mathbb{R}^n)$ y por (1.61) obtenemos que $\delta\varphi V(\cdot,u) \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Se sigue del Teorema 1.7 que el problema no lineal (1.62) tiene una única solución $v_u \in H_w^{s,p}(a)$. Por lo tanto, la definición $R(u) = v_u$ es consistente, es decir, R está bien definido como operador desde el espacio B_0 a $H_w^{r_\alpha,p}(\mathbb{R}^n)$. Ahora probaremos que el rango del operador R está en el espacio B_0 cuando δ es suficientemente pequeño. Sea $u \in B_0$, entonces (omitiendo constantes)

$$\begin{aligned}
\|R(u)\|_{H_w^{r_\alpha+m,p}(\mathbb{R}^n)} &= \|v_u\|_{H_w^{r_\alpha+m,p}(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq \|v_u\|_{H_w^{s,p}(a)} &(1.63)\\
&= \|A(v_u)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&= \|\delta\varphi V(\cdot,u)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq \delta\,\|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\Big(\|h\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|u\|^\alpha_{H_w^{r_\alpha+m,p}(\mathbb{R}^n)}\Big) &(1.64)\\
&\leq \delta\,\|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\Big(\|h\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + 1\Big) &(1.65)\\
&< 1 &(1.66)
\end{aligned}$$

donde (1.63) sigue de la inclusión $H_w^{s,p}(a) \hookrightarrow H_w^{r_\alpha+m}(\mathbb{R}^n)$ (Lema 1.5) , (1.64) de (1.61), (1.65) del supuesto $u \in B_0$ y (1.66) se cumple cuando $\delta < \frac{1}{\|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}}\Big(\|h\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + 1\Big)$.
Por lo tanto,

$$\|R(u)\|_{H_w^{r_\alpha+m,p}(\mathbb{R}^n)} < 1,$$

es decir, $R(u) \in B_0$ cuando $u \in B_0$ y δ es suficientemente pequeño. Por lo tanto, el operador R está bien definido como operador desde el espacio B_0 en B_0.

Como tercer paso en la demostración, observando que la bola unitaria B_0 (que es un subconjunto del espacio de Banach $H_w^{r_\alpha+m,p}(\mathbb{R}^n)$) es un conjunto no vacío, cerrado y convexo, probaremos mediante el Teorema del punto fijo de Schauder [AGO02, Cap. 1, Teo. 1.2.2] que el operador R tiene un punto fijo sobre el espacio B_0. Para este propósito, probaremos que R es un operador continuo y compacto (notemos que el rango del operador R será relativamente compacto si el operador R es compacto). Primero probaremos la continuidad del operador R, es decir, que

$$\|R(u_1) - R(u_2)\|_{H_w^{r_\alpha+m,p}(\mathbb{R}^n)} \to 0 \text{ cuando } \|u_1 - u_2\|_{H_w^{r_\alpha+m,p}(\mathbb{R}^n)} \to 0.$$

Sea u_1, $u_2 \in B_0$. Por la linealidad del operador A, tenemos que $R(u_1) - R(u_2) = v_{u_1} - v_{u_2}$ es la única solución en $H_w^{s,p}(a)$ para el problema lineal

$$A(v) = \delta\varphi(V(\cdot,u_1) - V(\cdot,u_2)),$$

entonces

$$\begin{aligned}
\|R(u_1) - R(u_2)\|_{H_w^{r_\alpha+m,p}(\mathbb{R}^n)} &= \|v_{u_1} - v_{u_2}\|_{H_w^{r_\alpha+m,p}(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq \|v_{u_1} - v_{u_2}\|_{H_w^{s,p}(a)} &(1.67)
\end{aligned}$$

$$= \|A(v_{u_1} - v_{u_2})\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$
$$= \|\delta\varphi(V(\cdot,u_1) - V(\cdot,u_2))\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

donde (1.67) sigue de la inclusión $H_w^{s,p}(a) \hookrightarrow H_w^{r_\alpha+m,p}(\mathbb{R}^n)$. Por lo tanto

$$\|R(u_1) - R(u_2)\|_{H_w^{r_\alpha+m,p}(\mathbb{R}^n)} \leq \|\delta\varphi(V(\cdot,u_1) - V(\cdot,u_2))\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \tag{1.68}$$

Para estimar la expresión de la derecha en (1.68) observemos que (omitiendo constantes)

$$|V(x,u_1(x)) - V(x,u_2(x))| = \left|\int_0^1 \partial_t \left(V(x, tu_1(x) + (1-t)u_2(x))\right) dt\right| \tag{1.69}$$
$$= \left|\int_0^1 \partial_y V(x, tu_1(x) + (1-t)u_2(x))(u_1(x) - u_2(x))\, dt\right| \tag{1.70}$$
$$\leq |u_1(x) - u_2(x)| \int_0^1 |\partial_y V(x, tu_1(x) + (1-t)u_2(x))\, dt|$$
$$\leq |u_1(x) - u_2(x)| \int_0^1 (1 + |tu_1(x) + (1-t)u_2(x)|^\alpha)\, dt \tag{1.71}$$
$$\leq |u_1(x) - u_2(x)| \int_0^1 (1 + |u_1(x)|^\alpha + |u_2(x)|^\alpha)\, dt$$
$$= |u_1(x) - u_2(x)|(1 + |u_1(x)|^\alpha + |u_2(x)|^\alpha).$$

donde (1.69) sigue del Teorema fundamental del cálculo, (1.70) de la regla de la cadena con el supuesto de regularidad $V \in C^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ y (1.71) de la condición de crecimiento (1.56) sobre V. Por lo tanto,

$$|V(x,u_1(x)) - V(x,u_2(x))| \leq |u_1(x) - u_2(x)| \left(1 + |u_1(x)|^\alpha + |u_2(x)|^\alpha\right). \tag{1.72}$$

Ahora como $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ es una función con soporte compacto, sea $K :=$ soporte(φ) tal soporte. Entonces

$$\|\varphi(V(\cdot,u_1) - V(\cdot,u_2))\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \int_K |\varphi(x)|^p |V(x,u_1(x)) - V(x,u_2(x))|^p\, dx$$
$$\leq \|\varphi\|^p_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_K |u_1(x) - u_2(x)|^p (1 + |u_1(x)|^\alpha + |u_2(x)|^\alpha)^p\, dx \tag{1.73}$$
$$\leq \|\varphi\|^p_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_K |u_1(x) - u_2(x)|^p \left(1 + |u_1(x)|^{\alpha p} + |u_2(x)|^{\alpha p}\right) dx \tag{1.74}$$
$$\leq \|\varphi\|^p_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \|u_1 - u_2\|^p_{L^p(K)} \left(1 + \|u_1\|^{\alpha p}_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + \|u_2\|^{\alpha p}_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\right) \tag{1.75}$$

donde (1.73) sigue de (1.72), (1.74) de una desigualdad elemental[(4)], (1.75) de las inclusiones

[(4)] $|a+b|^p \leq 2^p(|a|^p + |b|^p),\ p \geq 0, a, b \in \mathbb{C}$

$H_w^{r_\alpha+m,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^{r_\alpha+m,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^n)$ (Lema 1.4). Por lo tanto

$$\|\varphi(V(\cdot,u_1)-V(\cdot,u_2))\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|\varphi\|^p_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \|u_1-u_2\|^p_{L^p(K)} \left(1+\|u_1\|^{\alpha p}_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}+\|u_2\|^{\alpha p}_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\right) \tag{1.76}$$

Para estimar $\|u_1-u_2\|_{L^p(K)}$ en (1.77),

$$\begin{align} \|u_1-u_2\|_{L^p(K)} &\leq \|u_1-u_2\|_{L^{\alpha p}(K)} \tag{1.77}\\ &\leq \|u_1-u_2\|_{L^{\alpha p}(\mathbb{R}^n)} \tag{1.78}\\ &\leq \|u_1-u_2\|_{H^{r_\alpha,p}(\mathbb{R}^n)} \tag{1.79}\\ &\leq \|u_1-u_2\|_{H_w^{r_\alpha+m,p}(\mathbb{R}^n)} \tag{1.80} \end{align}$$

donde (1.77) sigue de la inclusión $L^{\alpha p}(K) \hookrightarrow L^p(K)$ ya que $1<\alpha$ con $K \subset \mathbb{R}^n$ subconjunto compacto, (1.78) de la contención $K \subset \mathbb{R}^n$ y (1.78)-(1.80) de las inclusiones $H_w^{r_\alpha+m,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^{r_\alpha,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{\alpha p}(\mathbb{R}^n)$ (Lema 1.3). Por lo tanto

$$\|u_1-u_2\|_{L^p(K)} \leq \|u_1-u_2\|_{H_w^{r_\alpha+m,p}(\mathbb{R}^n)} \tag{1.81}$$

Así, de (1.68), (1.76) y (1.81) obtenemos que

$$\|R(u_1)-R(u_2)\|_{H_w^{r_\alpha+m,p}(\mathbb{R}^n)} \leq \delta\,\|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \|u_1-u_2\|_{H_w^{r_\alpha+m,p}(\mathbb{R}^n)} \left(1+\|u_1\|^{\alpha}_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}+\|u_2\|^{\alpha}_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\right)$$

se sigue que

$$\|R(u_1)-R(u_2)\|_{H_w^{r_\alpha+m,p}(\mathbb{R}^n)} \to 0 \text{ cuando } \|u_1-u_2\|_{H_w^{r_\alpha+m,p}(\mathbb{R}^n)} \to 0,$$

es decir, el operador R es continuo.

Ahora probaremos que el operador R es compacto. Sea $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ sucesión acotada en $H_w^{r_\alpha+m,p}(\mathbb{R}^n)$, es decir, para todo $k \in \mathbb{N}$, se cumple que $\|u_k\|_{H_w^{r_\alpha+m,p}(\mathbb{R}^n)} \leq M$ para alguna constante $M>0$. Probaremos que la sucesión $\{R(u_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión convergente en $H_w^{r_\alpha+m,p}(\mathbb{R}^n)$. Como $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ es una función suave y de soporte compacto, supongamos que el soporte soporte(φ) está contenido en alguna bola abierta $B := B(0,R) := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R\}$ para algún radio $R>0$. Definimos la sucesión $\{g_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset L^p(\mathbb{R}^n)$ [5] por

$$g_k(x) = \begin{cases} \delta\varphi(x)V(x,u_k(x)) & \text{si } x \in B \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R}^n \setminus B \end{cases}.$$

Probaremos que la sucesión $\{g_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es acotada en el espacio potencial de Bessel $H^{1,p}(B)$. Primero,

$$\|g_k\|_{H^{1,p}(B)} = \delta\,\|\varphi V(\cdot,u_k)\|_{H^{1,p}(B)} = \delta\left(\|\varphi V(\cdot,u_k)\|_{L^p(B)} + \sum_{i=1}^n \|\partial_{x_i}[\varphi V(\cdot,u_k)]\|_{L^p(B)}\right)^{1/p}, \tag{1.82}$$

[5] Notemos que la sucesión $\{g_k\}_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p(\mathbb{R}^n)$ cuando $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset H_w^{r_\alpha+m,p}(\mathbb{R}^n)$ por (1.61)

donde la igualdad (1.82) se debe a la definición de la norma $\|\cdot\|_{W^{1,p}(B)}$ ya que el espacio potencial de Bessel $H^{1,p}(B)$ coincide con el espacio de Sobolev $W^{1,p}(B)$ cuando el exponente s es un número entero no negativo ([Tay11, Cap. 13, Sec. 6], [Eva10, Cap. 5, Subsec. 5.2.2]). Notemos que en (1.82), la expresión $\|\varphi V(\cdot,u_k)\|_{L^p(B)}$ es finita (uniformemente) por (1.61) junto con el hecho que la sucesión $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es acotada en $H_w^{r_\alpha+m,p}(\mathbb{R}^n)$. Solo nos queda probar que la suma $\sum_{i=1}^{n}\|\partial_{x_i}[\varphi V(\cdot,u_k)]\|_{L^p(B)}$ es finita. Por regla de la cadena para derivadas débiles tenemos que (para cada $i=1,\dots,n$),

$$\begin{aligned}\partial_{x_i}[\varphi(x)V(x,u_k(x))] &= \partial_{x_i}(\varphi(x))V(x,u_k(x))+\varphi(x)\partial_{x_i}(V(x,u_k(x)))\\ &= \partial_{x_i}((\varphi(x))V(x,u_k(x))+\varphi(x)[\partial_{x_i}(V)(x,u_k(x))+(\partial_y V)(x,u_k(x))\partial_{x_i}(u_k(x))],\end{aligned}$$

luego,

$$\begin{aligned}\|\partial_{x_i}\varphi V(\cdot,u_k)\|^p_{L^p(B)} &= \int_B |\partial_{x_i}((\varphi(x))V(x,u_k(x))+\varphi(x)[\partial_{x_i}(V(x,u_k(x))+\partial_y V(x,u_k(x))\partial_{x_i}(u_k(x))]|^p\,dx\\ &\le \|\partial_{x_i}\varphi\|^p_{L^\infty(B)}\|V(\cdot,u_k)\|^p_{L^p(B)}+\\ &+\|\varphi\|^p_{L^\infty(B)}\left(\|\partial_{x_i}(V(\cdot,u_k))\|^p_{L^p(B)}+\|\partial_y V(\cdot,u_k)\partial_{x_i}(u_k)\|^p_{L^p(B)}\right).\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\|\partial_{x_i}\varphi V(\cdot,u_k)\|^p_{L^p(B)} \le{}& \|\partial_{x_i}\varphi\|^p_{L^\infty(B)}\|V(\cdot,u_k)\|^p_{L^p(B)}+\\ &+\|\varphi\|^p_{L^\infty(B)}\left(\|\partial_{x_i}(V(\cdot,u_k))\|^p_{L^p(B)}+\|\partial_y V(\cdot,u_k)\partial_{x_i}(u_k)\|^p_{L^p(B)}\right).\end{aligned}\tag{1.83}$$

Por el supuesto de crecimiento (1.55) sobre la función V,

$$\begin{aligned}\|\partial_{x_i}(V(\cdot,u_k))\|^p_{L^p(B)} &= \int_B|\partial_{x_i}(V(x,u_k(x))|^p\,dx\\ &\le \int_B(|h(x)|^p+|u_k(x)|^{\alpha p})\,dx\\ &= \left(\|h\|^p_{L^p(B)}+\|u_k\|^{\alpha p}_{L^{\alpha p}(B)}\right) \qquad (1.84)\\ &\le \left(\|h\|^p_{L^p(B)}+\|u_k\|^{\alpha p}_{H^{r_\alpha,p}(B)}\right) \qquad (1.85)\\ &\le \left(\|h\|^p_{L^p(B)}+\|u_k\|^{\alpha p}_{H_w^{r_\alpha+m,p}(B)}\right). \qquad (1.86)\end{aligned}$$

donde (1.84)-(1.86) sigue de las inclusiones $H_w^{r_\alpha+m,p}(B)\hookrightarrow H^{r_\alpha,p}(B)\hookrightarrow L^{\alpha p}(B)$ (Lema 1.3). Por lo tanto,

$$\|\partial_{x_i}(V(\cdot,u_k))\|^p_{L^p(B)}\le\left(\|h\|^p_{L^p(B)}+\|u_k\|^{\alpha p}_{H_w^{r_\alpha+m,p}(B)}\right).\tag{1.87}$$

Se sigue que (omitiendo constantes),

$$\begin{aligned}\|\partial_y V(\cdot,u_k)\partial_{x_i}(u_k)\|^p_{L^p(B)} &= \int_B|\partial_y V(x,u_k(x))\partial_{x_i}(u_k(x))|^p\,dx\\ &\le \int_B(1+|u_k(x)|^\alpha)^p|\partial_{x_i}(u_k(x))|^p\,dx \qquad (1.88)\\ &\le \int_B(1+|u_k(x)|^{\alpha p})|\partial_{x_i}(u_k(x))|^p\,dx \qquad (1.89)\end{aligned}$$

$$\leq \left(1 + \|u_k\|_{L^\infty(B)}^{\alpha p}\right) \|\partial_{x_i} u_k\|_{L^p(B)}^p \tag{1.90}$$
$$\leq \left(1 + \|u_k\|_{L^\infty(\overline{B})}^{\alpha p}\right) \|\partial_{x_i} u_k\|_{L^p(B)}^p \tag{1.91}$$

donde (1.88) sigue de la segunda condición de crecimiento (1.56) sobre la función V, (1.89) de una desigualdad elemental[(6)], (1.90) de las inclusiones $H_w^{r_\alpha+m,p}(B) \hookrightarrow H^{r_\alpha+m,p}(B) \hookrightarrow L^\infty(B)$ (Lema 1.4). Por lo tanto,

$$\|\partial_y V(\cdot, u_k)\partial_{x_i}(u_k)\|_{L^p(B)}^p \leq \left(1 + \|u_k\|_{L^\infty(\overline{B})}^{\alpha p}\right) \|\partial_{x_i} u_k\|_{L^p(B)}^p \tag{1.92}$$

Adicionalmente notemos que la inclusión $H^{r_\alpha+m,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ (Lema 1.4) implica que $\|u_k\|_{L^\infty(\overline{B})}$ en (1.92) es finito para todo $k \in \mathbb{N}$ uniformemente al ser una sucesión de funciones continuas y acotadas sobre el conjunto compacto $\overline{B}$. Por otro lado, $\|\partial_{x_i} u_k\|_{L^p(B)}$ también es finito uniformemente sobre k (para cada $i = 1, \ldots, n$) ya que la sucesión $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es acotada en el espacio de Sobolev $H^{1,p}(B) = W^{1,p}(B)$ por la inclusión $H_w^{r_\alpha+m,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^{r_\alpha+m,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ (Lema 1.4) donde la inclusión $H^{r_\alpha+m,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ se cumple por inclusiones de Sobolev (Ver [Tri78, Cap. 2, Sec. 2.8.1]) ya que $1 \leq r_\alpha + m$ y del hecho que la sucesión $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es acotada en $H_w^{r_\alpha+m,p}(\mathbb{R}^n)$ (lo que implica que también es acotada en $H^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Más precisamente, para cada $i = 1, \ldots, n$, se cumple que, uniformemente $\|\partial_{x_i} u_k\|_{L^p(B)} \leq M$ para alguna constante $M > 0$.

En resumen, $\|\varphi V(\cdot, u_k)\|_{L^p(B)}$ y $\|\partial_{x_i}[\varphi V(\cdot, u_k)]\|_{L^p(B)}$ son finitos (uniformemente sobre k). Por lo tanto, (1.82) es finito, luego $\|g_k\|_{H^{1,p}(B)}$ es finito, es decir, la sucesión $\{g_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es acotada en el espacio de Sobolev $H^{1,p}(B) = W^{1,p}(B)$. Por el Teorema de Compacidad de Rellich-Kondrachov ([Eva10, Cap. 5, Teo. 1] con $q = p$ y con el exponente crítico de Sobolev $p^* = (np)/(n-p)$, lo que implica que $p < p^*$), la inclusión $H^{1,p}(B) \hookrightarrow L^p(B)$ es compacta, luego existe una subsucesión $\{g_{k_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ de la sucesión $\{g_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, que converge en $L^p(B)$. Más precisamente, existe $g \in L^p(B)$ tal que $\lim_i g_{k_i} = g$ en $L^p(B)$. Este hecho permite demostrar que la sucesión $\{R(u_{k_i})\}_{i\in\mathbb{N}} = \{v_{k_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en el espacio $H_w^{r_\alpha+m,p}(\mathbb{R}^n)$. En efecto,

$$\begin{aligned}
\left\|R(u_{k_i}) - R(u_{k_j})\right\|_{H_w^{r_\alpha+m,p}(\mathbb{R}^n)} &= \left\|v_{u_{k_i}} - v_{u_{k_j}}\right\|_{H_w^{r_\alpha+m,p}(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq \left\|v_{u_{k_i}} - v_{u_{k_j}}\right\|_{H_w^{s,p}(a)} \\
&= \left\|A(v_{u_{k_i}} - v_{u_{k_j}})\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&= \left\|\delta\varphi V(\cdot, u_{k_i}) - \delta\varphi V(\cdot, u_{k_j})\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq \left\|g_{k_i} - g_{k_j}\right\|_{L^p(B)}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\left\|R(u_{k_i}) - R(u_{k_j})\right\|_{H_w^{r_\alpha+m,p}(\mathbb{R}^n)} \leq \left\|g_{k_i} - g_{k_j}\right\|_{L^p(B)},$$

es decir, la sucesión $\{R(u_{k_i})\}_{i\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en el espacio de Banach $H_w^{r_\alpha+m,p}(\mathbb{R}^n)$ ya que $\{g_{k_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $L^p(B)$. Por lo tanto, esta sucesión converge en el espacio $H_w^{r_\alpha+m,p}(\mathbb{R}^n)$. Esto prueba que el operador $R : B_0 \to B_0$ es compacto.

[(6)] $|a+b|^p \leq 2^p(|a|^p + |b|^p),\ p \geq 0, a, b \in \mathbb{C}$, [Gar07, Cap. 5, Sec. 5.1]

Finalmente, dado que el operador $R\colon B_0 \to B_0$ es continuo y compacto, por el Teorema del punto fijo de Schauder [AGO02, Cap. 1, Teo. 1.2.2], existe una función $u \in B_0$ tal que $R(u) = u$. Por definición del operador R, tenemos que $u \in H^{s,p}_w(a)$, es decir, el problema no lineal (1.57) tiene una solución $u \in H^{s,p}_w(a)$ cuando δ es suficientemente pequeño. □

También es posible dar una adaptación de las condiciones de crecimiento sobre la función V con pesos de Muckenhoupt para obtener una variante del Teorema 1.11.

Definición 1.23. *(Condiciones de crecimiento con peso) Sea β, $s \geq 0$ con $\beta s \geq 4n$, $\alpha > 1$, $1 < p < n$, $\frac{n}{\alpha p} \leq m \leq \frac{\beta s}{4\alpha}$ parámetros, un peso de Muckenhoupt $w \in A_p(\mathbb{R}^n)$ satisfaciendo las condiciones diádicas $C_{r_\alpha+m,p,r_\alpha+m,p}$, $C_{r_\alpha,p,r_\alpha+m,p}$ y una función $a \in \mathcal{J}^{\beta}_{s/2}(\mathbb{R}^n)$. Sea $\alpha > 1$ un parámetro y $w \in A_p(\mathbb{R}^n)$ un peso de Muckenhoupt. Una función medible $V: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de clase $C^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ satisface una condición de crecimiento con peso si existe una función $h \in L^p(\mathbb{R}^n)$ de modo que*

$$|V(x,y)| + |\partial_{x_i} V(x,y)| \leq C_1(|h(x)| + w(x)^{1/p}|y|^\alpha), \quad x \in \mathbb{R}^n,\, y \in \mathbb{R},\, i = 1,2,\ldots,n. \tag{1.93}$$

$$|\partial_y V(x,y)| \leq C_2 w(x)^{1/p}(1 + |y|^\alpha), \quad x \in \mathbb{R}^n,\, y \in \mathbb{R}, \tag{1.94}$$

para algunas constantes C_1, $C_2 > 0$.

Teorema 1.12. *(Variante del segundo problema no lineal) Sea β, $s \geq 0$ con $\beta s \geq 4n$, $\alpha > 1$, $1 < p < n$, $\frac{n}{\alpha p} \leq m \leq \frac{\beta s}{4\alpha}$ parámetros, un peso de Muckenhoupt $w \in A_p(\mathbb{R}^n)$ satisfaciendo las condiciones diádicas $C_{r_\alpha+m,p,r_\alpha+m,p}$, $C_{r_\alpha,p,r_\alpha+m,p}$ y una función $a \in \mathcal{J}^{\beta}_{s/2}(\mathbb{R}^n)$. Sea $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ una función suave y de soporte compacto, V una función satisfaciendo las condiciones de crecimiento (1.93)-(1.94). Entonces, para cada $\delta > 0$ suficientemente pequeño, el problema no lineal*

$$A(u) = \delta \varphi V(\cdot, u) \tag{1.95}$$

tiene una solución $u \in H^{s,p}_w(a)$.

Demostración. Como primer paso en la demostración, probaremos que el operador de Nemytskii $H^{r_\alpha+m,p}_w(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)\colon u \mapsto V(\cdot,u)$ está bien definido. Más precisamente, que es acotado, es decir, que $\|V(\cdot,u)\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \left(\|h\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|u\|^{\alpha p}_{H^{r_\alpha+m,p}_w(\mathbb{R}^n)}\right)$. Sea $u \in H^{r_\alpha+m,p}_w(\mathbb{R}^n)$, entonces

$$\begin{aligned}
\|V(\cdot,u)\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} &\leq \left(\|h\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \int_{\mathbb{R}^n} w(x)|u(x)|^{\alpha p}\,dx\right) && (1.96)\\
&= \left(\|h\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \left\|w^{1/\alpha p} u\right\|^{\alpha p}_{L^{\alpha p}(\mathbb{R}^n)}\right)\\
&= \left(\|h\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|u\|^{\alpha p}_{L^{\alpha p}_w(\mathbb{R}^n)}\right)\\
&\leq \left(\|h\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|u\|^{\alpha p}_{H^{r_\alpha,p}_w(\mathbb{R}^n)}\right) && (1.97)\\
&\leq \left(\|h\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|u\|^{\alpha p}_{H^{r_\alpha+m,p}_w(\mathbb{R}^n)}\right) && (1.98)
\end{aligned}$$

donde (1.96) sigue del supuesto de Lipschitz (1.93) sobre la función V y (1.97)-(1.98) de las inclusiones $H_w^{r_\alpha+m,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H_w^{r_\alpha,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L_w^{\alpha p}(\mathbb{R}^n)$ (Lema 1.3).

Por lo tanto,

$$\|V(\cdot,u)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|h\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|u\|^{\alpha}_{H_w^{r_\alpha+m,p}(\mathbb{R}^n)}, \tag{1.99}$$

es decir, $V(\cdot,u) \in L^p(\mathbb{R}^n)$ cuando $u \in H_w^{r_\alpha+m,p}(\mathbb{R}^n)$ y $h \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

Como segundo paso en la demostración, probaremos que el operador R (definido a continuación) está bien definido. Sea $R\colon B_0 \to B_0$ un operador lineal donde

$$B_0 = \left\{ u \in H_w^{r_\alpha+m,p}(\mathbb{R}^n) : \|u\|_{H_w^{r_\alpha+m,p}(\mathbb{R}^n)} \leq 1 \right\}.$$

(la bola unitaria en el espacio $H_w^{r_\alpha+m,p}(\mathbb{R}^n)$) definido por $R(u) = v_u$ donde v_u es la única solución en el espacio $H_w^{s,p}(a)$ para el problema lineal

$$A(v) = \delta\varphi V(\cdot,u). \tag{1.100}$$

La definición del operador R es consistente: si $u \in B_0$, por definición, $u \in H_w^{r_\alpha+m,p}(\mathbb{R}^n)$ y por (1.99), obtenemos que $\delta\varphi V(\cdot,u) \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Se sigue del Teorema 1.7 que el problema lineal (1.95) tiene una única solución $v_u \in H_w^{s,p}(a)$. Por lo tanto, la definición $R(u) = v_u$ es consistente, es decir, R está bien definido como operador desde el espacio B_0 a $H_w^{r_\alpha,p}(\mathbb{R}^n)$. Ahora probaremos que el rango del operador R está en el espacio B_0 cuando δ es suficientemente pequeño. Sea $u \in B_0$, entonces

$$\begin{aligned}
\|R(u)\|_{H_w^{r_\alpha+m,p}(\mathbb{R}^n)} &= \|v_u\|_{H_w^{r_\alpha+m,p}(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq \|v_u\|_{H_w^{s,p}(a)} && (1.101)\\
&= \|A(v_u)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&= \|\delta\varphi V(\cdot,u)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq \delta\, \|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \left(\|h\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|u\|^{\alpha}_{H_w^{r_\alpha+m,p}(\mathbb{R}^n)} \right) && (1.102)\\
&\leq \delta\, \|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \left(\|h\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + 1 \right) && (1.103)\\
&< 1 && (1.104)
\end{aligned}$$

donde (1.101) sigue de la inclusión del espacio $H_w^{s,p}(a) \hookrightarrow H_w^{r_\alpha+m}(\mathbb{R}^n)$ (Proposición 1.22), (1.102) de la desigualdad (1.99), (1.103) del supuesto $u \in B_0$ y (1.104) se cumple cuando $\delta < 1/\, \|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \left(\|h\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + 1 \right)$. Por lo tanto,

$$\|R(u)\|_{H_w^{r_\alpha+m,p}(\mathbb{R}^n)} \leq 1,$$

es decir, $R(u) \in B_0$ cuando $u \in B_0$ y δ es suficientemente pequeño. Por lo tanto, el operador R está bien definido como operador desde el espacio B_0 en B_0.

Como tercer paso en la demostración, observando que la bola unitaria B_0 (que es un subconjunto del espacio de Banach $H_w^{r\alpha+m,p}(\mathbb{R}^n)$) es un conjunto no vacío, cerrado y convexo, probaremos mediante el Teorema del punto fijo de Schauder [AGO02, Cap. 1, Teo. 1.2.2] que el operador R tiene un punto fijo sobre el espacio B_0. Para este propósito, probaremos que R es un operador continuo y compacto (el rango del operador R será relativamente compacto si el operador R es compacto). Primero probaremos la continuidad del operador R, es decir, que

$$\|R(u_1) - R(u_2)\|_{H_w^{r\alpha+m,p}(\mathbb{R}^n)} \to 0 \text{ cuando } \|u_1 - u_2\|_{H_w^{r\alpha+m,p}(\mathbb{R}^n)} \to 0.$$

Sea u_1, $u_2 \in B_0$. Por la linealidad del operador A tenemos que $R(u_1) - R(u_2) = v_{u_1} - v_{u_2}$ es la única solución en $H_w^{s,p}(a)$ para el problema lineal

$$A(v) = \delta\varphi\left(V(\cdot, u_1) - V(\cdot, u_2)\right) \tag{1.105}$$

entonces

$$\begin{aligned} \|R(u_1) - R(u_2)\|_{H_w^{r\alpha+m,p}(\mathbb{R}^n)} &= \|v_{u_1} - v_{u_2}\|_{H_w^{r\alpha+m,p}(\mathbb{R}^n)} \\ &\le \|v_{u_1} - v_{u_2}\|_{H_w^{s,p}(a)} \qquad (1.106) \\ &= \|A(v_{u_1} - v_{u_2})\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\ &= \|\delta\varphi(V(\cdot, u_1) - V(\cdot, u_2))\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \end{aligned}$$

donde (1.106) sigue de la inclusión $H_w^{s,p}(a) \hookrightarrow H_w^{r\alpha+m,p}(\mathbb{R}^n)$. Por lo tanto,

$$\|R(u_1) - R(u_2)\|_{H_w^{r\alpha+m,p}(\mathbb{R}^n)} \le \|\delta\varphi(V(\cdot, u_1) - V(\cdot, u_2))\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \tag{1.107}$$

Para estimar la expresión en la derecha en (1.107) observemos que (omitiendo constantes)

$$\begin{aligned} |V(x, u_1(x)) - V(x, u_2(x))| &= \left| \int_0^1 \partial_t \left(V(x, tu_1(x) + (1-t)u_2(x))\right) \, dt \right| && (1.108) \\ &= \left| \int_0^1 \partial_y V(x, tu_1(x) + (1-t)u_2(x))(u_1(x) - u_2(x)) \, dt \right| && (1.109) \\ &\le |u_1(x) - u_2(x)| \int_0^1 |\partial_y V(x, tu_1(x) + (1-t)u_2(x)) \, dt| \\ &\le |u_1(x) - u_2(x)| \int_0^1 w(x)^{1/p}(1 + |tu_1(x) + (1-t)u_2(x)|^\alpha) \, dt && (1.110) \\ &\le w(x)^{1/p} \, |u_1(x) - u_2(x)| \int_0^1 (1 + |u_1(x)|^\alpha + |u_2(x)|^\alpha) \, dt \\ &= w(x)^{1/p}|u_1(x) - u_2(x)|(1 + |u_1(x)|^\alpha + |u_2(x)|^\alpha). \end{aligned}$$

donde (1.108) sigue del Teorema fundamental del cálculo, (1.109) de la regla de la cadena con el supuesto de regularidad $V \in C^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ y (1.110) del supuesto de crecimiento (1.94) sobre V. Por lo tanto,

$$|V(x, u_1(x)) - V(x, u_2(x))| \le w(x)^{1/p}|u_1(x) - u_2(x)| \left(1 + |u_1(x)|^\alpha + |u_2(x)|^\alpha\right). \tag{1.111}$$

Ahora como $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ es una función con soporte compacto, sea $K :=$ soporte(φ) tal soporte. Entonces

$$\|\varphi V(\cdot,u_1)-\varphi V(\cdot,u_2)\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \int_K |\varphi(x)|^p|V(x,u_1(x))-V(x,u_2(x))|^p\,dx$$

$$\le \|\varphi\|^p_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\int_K w(x)|u_1(x)-u_2(x)|^p(1+|u_1(x)|^\alpha+|u_2(x)|^\alpha)^p\,dx \tag{1.112}$$

$$\le \|\varphi\|^p_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\int_K w(x)\,|u_1(x)-u_2(x)|^p\,(1+|u_1(x)|^{\alpha p}+|u_2(x)|^{\alpha p})\,dx \tag{1.113}$$

$$\le \|\varphi\|^p_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\,\|u_1-u_2\|^p_{L^p_w(K)}\left(1+\|u_1\|^{\alpha p}_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}+\|u_2\|^{\alpha p}_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\right) \tag{1.114}$$

donde (1.112) sigue de (1.111), (1.113) de una desigualdad elemental[7], (1.114) de las inclusiones $H^{r_\alpha+m,p}_w(\mathbb{R}^n)\hookrightarrow H^{r_\alpha+m,p}(\mathbb{R}^n)\hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^n)$ (Lema 1.4) Por lo tanto,

$$\|\varphi V(\cdot,u_1)-\varphi V(\cdot,u_2)\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le \|\varphi\|^p_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\,\|u_1-u_2\|^p_{L^p_w(K)}\left(1+\|u_1\|^{\alpha p}_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}+\|u_2\|^{\alpha p}_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\right) \tag{1.115}$$

Para estimar $\|u_1-u_2\|_{L^p_w(K)}$ en (1.115) tenemos que

$$\begin{aligned}
\|u_1-u_2\|_{L^p_w(K)} &= \left\|w^{1/p}(u_1-u_2)\right\|_{L^p(K)}\\
&= \left\|w^{1/p-1/\alpha p}w^{1/\alpha p}(u_1-u_2)\right\|_{L^p(K)}\\
&\le \left\|w^{1/p-1/\alpha p}\right\|_{L^{\frac{\alpha p}{(\alpha-1)}}(K)}\left\|w^{1/\alpha p}(u_1-u_2)\right\|_{L^{\alpha p}(K)} &(1.116)\\
&= \left\|w^{(\alpha-1)/\alpha p}\right\|_{L^{\frac{\alpha p}{(\alpha-1)}}(K)}\left\|w^{1/\alpha p}(u_1-u_2)\right\|_{L^{\alpha p}(K)}\\
&= \left(\int_K w(x)\,dx\right)^{(\alpha-1)/(\alpha p)}\|(u_1-u_2)\|_{L^{\alpha p}_w(K)}\\
&= C_{K,\alpha,p}\,\|u_1-u_2\|_{L^{\alpha p}_w(K)}\\
&\le C_{K,\alpha,p}\,\|u_1-u_2\|_{L^{\alpha p}_w(\mathbb{R}^n)} &(1.117)\\
&\le C_{K,\alpha,p}\,\|u_1-u_2\|_{H^{r_\alpha,p}_w(\mathbb{R}^n)} &(1.118)\\
&\le C_{K,\alpha,p}\,\|u_1-u_2\|_{H^{r_\alpha+m,p}_w(\mathbb{R}^n)} &(1.119)
\end{aligned}$$

donde (1.116) sigue de la desigualdad generalizada de Hölder con los exponentes $1/p=1/\alpha p+1/\left(\alpha p/(\alpha-1)\right)$ donde $\alpha>1$ ([San18, Cap. 3, Prop. 3.4.10]). Notemos que $C_{K,\alpha,p}=\left(\int_K w(x)\,dx\right)^{(\alpha-1)/(\alpha p)}$ es finito ya que el peso w es una función localmente integrable (Definición 1.1) y K es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$, , (1.117) de la inclusión $K\subset\mathbb{R}^n$, (1.118) de la inclusión $H^{r_\alpha,p}_w(\mathbb{R}^n)\hookrightarrow L^{\alpha p}_w(\mathbb{R}^n)$ (Proposición 1.21) y (1.119) de la inclusión $H^{r_\alpha+m,p}_w(\mathbb{R}^n)\hookrightarrow H^{r_\alpha,p}_w(\mathbb{R}^n)$ (Proposición 1.22). Por lo tanto,

$$\|u_1-u_2\|_{L^p_w(K)}\le C_{K,\alpha,p}\,\|u_1-u_2\|_{H^{r_\alpha+m,p}_w(\mathbb{R}^n)} \tag{1.120}$$

[7] $|a+b|^p\le 2^p(|a|^p+|b|^p),\ p\ge 0, a,b\in\mathbb{C}$

Se sigue de (1.107), (1.115) y (1.120) y (omitiendo constantes) (omitiendo constantes) que

$$\|R(u_1)-R(u_2)\|_{H_w^{r\alpha+m,p}(\mathbb{R}^n)} \leq \delta\,\|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\left(1+\|u_1\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}^{\alpha}+\|u_2\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}^{\alpha}\right)\|u_1-u_2\|_{H_w^{r\alpha+m,p}(\mathbb{R}^n)}$$

se sigue que

$$\|R(u_1)-R(u_2)\|_{H_w^{r\alpha+m,p}(\mathbb{R}^n)} \to 0 \text{ cuando } \|u_1-u_2\|_{H_w^{r\alpha+m,p}(\mathbb{R}^n)} \to 0,$$

es decir, el operador R es continuo.

Ahora probaremos que el operador R es compacto. Sea $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ sucesión acotada en $H_w^{r\alpha+m,p}(\mathbb{R}^n)$, es decir, para todo $k\in\mathbb{N}$ se cumple que $\|u_k\|_{H_w^{r\alpha+m,p}}(\mathbb{R}^n)\leq M$ para alguna constante $M>0$. Probaremos que la sucesión $\{R(u_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión convergente en $H_w^{r\alpha+m,p}(\mathbb{R}^n)$. Como $\varphi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ es una función suave y de soporte compacto, supongamos que el soporte soporte(φ) está contenido en alguna bola abierta $B:=B(0,R):=\{x\in\mathbb{R}^n:|x|<R\}$ para algún radio $R>0$. Definimos la sucesión $\{g_k\}_{k\in\mathbb{N}}\subset L^p(\mathbb{R}^n)$[(8)] por

$$g_k(x)=\begin{cases}\delta\varphi(x)V(x,u_k(x)) & \text{si } x\in B\\ 0 & \text{si } x\in\mathbb{R}^n\setminus B\end{cases}.$$

probaremos que la sucesión $\{g_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es acotada en el espacio potencial de Bessel $H^{1,p}(B)$. Como

$$\|g_k\|_{H^{1,p}(B)}=\delta\,\|\varphi V(\cdot,u_k)\|_{H^{1,p}(B)}=\delta\left(\|\varphi V(\cdot,u_k)\|_{L^p(B)}+\sum_{i=1}^{n}\|\partial_{x_i}[\varphi V(\cdot,u_k)]\|_{L^p(B)}\right)^{1/p}. \tag{1.121}$$

donde la igualdad (1.121) se debe a la definición de la norma $\|\cdot\|_{W^{1,p}(B)}$ ya que el espacio potencial de Bessel $H^{1,p}(B)$ coincide con el espacio de Sobolev $W^{1,p}(B)$ cuando el exponente s es un número entero no negativo (ver [Tay11, Cap. 13, Sec. 6]) o [Eva10, Cap. 5, Subsec. 5.2.2]), basta probar que cada expresión en (1.121) es acotada (uniformemente en k). Observemos que $\|\varphi V(\cdot,u_k)\|_{L^p(B)}$ es acotada (uniformemente en k) por (1.99) ya que $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión acotada en $H_w^{r\alpha+m,p}(\mathbb{R}^n)$. Ahora para verificar que $\sum_{i=1}^{n}\|\partial_{x_i}[\varphi V(\cdot,u_k)]\|_{L^p(B)}$ es acotada (uniformemente en k) por regla de la cadena para derivadas débiles,

$$\begin{aligned}\partial_{x_i}[\varphi(x)V(x,u_k(x))]&=\partial_{x_i}(\varphi(x))V(x,u_k(x))+\varphi(x)\partial_{x_i}(V(x,u_k(x)))\\&=\partial_{x_i}((\varphi(x))V(x,u_k(x))+\varphi(x)[\partial_{x_i}(V)(x,u_k(x))+(\partial_yV)(x,u_k(x))\partial_{x_i}(u_k(x))],\end{aligned}$$

luego

$$\|\partial_{x_i}\varphi V(\cdot,u_k)\|_{L^p(B)}^p=\int_B|\partial_{x_i}((\varphi(x))V(x,u_k(x))+\varphi(x)[\partial_{x_i}(V(x,u_k(x))+\partial_yV(x,u_k(x))\partial_{x_i}(u_k(x))]|^p\,dx$$
$$\leq\|\partial_{x_i}\varphi\|_{L^\infty(B)}^p\|V(\cdot,u_k)\|_{L^p(B)}^p+\|\varphi\|_{L^\infty(B)}^p\left(\|\partial_{x_i}(V(\cdot,u_k))\|_{L^p(B)}^p+\|\partial_yV(\cdot,u_k)\partial_{x_i}(u_k)\|_{L^p(B)}^p\right).$$

(8)Notemos que la sucesión $\{g_k\}_{n\in\mathbb{N}}\subset L^p(\mathbb{R}^n)$ cuando $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}\subset H_w^{r\alpha+m,p}(\mathbb{R}^n)$ por (1.99)

se sigue que,

$$\begin{aligned}\|\partial_{x_i}\varphi V(\cdot,u_k)\|^p_{L^p(B)} &\le \|\partial_{x_i}\varphi\|^p_{L^\infty(B)}\|V(\cdot,u_k)\|^p_{L^p(B)}+\\ +\|\varphi\|^p_{L^\infty(B)}&\left(\|\partial_{x_i}(V(\cdot,u_k))\|^p_{L^p(B)}+\|\partial_y V(\cdot,u_k)\partial_{x_i}(u_k)\|^p_{L^p(B)}\right).\end{aligned} \tag{1.122}$$

Para estimar $\|\partial_{x_i}(V(\cdot,u_k))\|_{L^p(B)}$ en (1.122) tenemos que

$$\begin{aligned}\|\partial_{x_i}(V(\cdot,u_k))\|^p_{L^p(B)} &= \int_B |\partial_{x_i}(V(x,u_k(x))|^p\,dx\\ &\le \int_B (|h(x)|^p + w(x)|u_k(x)|^{\alpha p})\,dx \qquad (1.123)\\ &= \|h\|^p_{L^p(B)}+\left\|w^{1/\alpha p}u_k\right\|^{\alpha p}_{L^{\alpha p}(B)}\\ &= \left(\|h\|^p_{L^p(B)}+\|u_k\|^{\alpha p}_{L^{\alpha p}_w(B)}\right)\\ &\le \left(\|h\|^p_{L^p(B)}+\|u_k\|^{\alpha p}_{H^{r_\alpha,p}_w(B)}\right) \qquad (1.124)\\ &\le \left(\|h\|^p_{L^p(B)}+\|u_k\|^{\alpha p}_{H^{r_\alpha+m,p}_w(B)}\right). \qquad (1.125)\end{aligned}$$

donde (1.124)-(1.125) sigue de las inclusiones $H^{r_\alpha+m,p}_w(B)\hookrightarrow H^{r_\alpha,p}_w(B)\hookrightarrow L^{\alpha p}_w(B)$. Por lo tanto,

$$\|\partial_{x_i}(V(\cdot,u_k))\|_{L^p(B)} \le \left(\|h\|_{L^p(B)}+\|u_k\|^{\alpha}_{H^{r_\alpha+m,p}_w(B)}\right) \tag{1.126}$$

Para estimar $\|\partial_y V(\cdot,u_k)\partial_{x_i}(u_k)\|_{L^p(B)}$ en (1.126),

$$\begin{aligned}\|\partial_y V(\cdot,u_k)\partial_{x_i}(u_k)\|^p_{L^p(B)} &= \int_B |\partial_y V(x,u_k(x))\partial_{x_i}(u_k(x))|^p\,dx\\ &\le \int_B w(x)(1+|u_k(x)|^\alpha)^p|\partial_{x_i}(u_k(x))|^p\,dx \qquad (1.127)\\ &\le \int_B w(x)(1+|u_k(x)|^{\alpha p})|\partial_{x_i}(u_k(x))|^p\,dx \qquad (1.128)\\ &\le (1+\|u_k\|^{\alpha p}_{L^\infty(B)})\int_B w(x)|\partial_{x_i}(u_k(x))|^p\,dx \qquad (1.129)\\ &= (1+\|u_k\|^{\alpha p}_{L^\infty(B)})\left\|w^{1/p}\partial_{x_i}u_k\right\|^p_{L^p(B)}\\ &= (1+\|u_k\|^{\alpha p}_{L^\infty(B)})\|\partial_{x_i}u_k\|^p_{L^p_w(B)}\\ &\le (1+\|u_k\|^{\alpha p}_{L^\infty(B)})\|u_k\|^p_{H^{1,p}_w(B)} \qquad (1.130)\\ &\le (1+\|u_k\|^{\alpha p}_{L^\infty(B)})\|u_k\|^p_{H^{r_\alpha+m,p}_w(B)} \qquad (1.131)\end{aligned}$$

donde (1.127) sigue del supuesto de crecimiento (1.94) sobre la función V, (1.128) de una desigualdad elemental, (1.129) de las inclusiones $H^{r_\alpha+m,p}_w(B)\hookrightarrow H^{r_\alpha+m,p}(B)\hookrightarrow L^\infty(B)$ (Lema 1.4) , (1.130)-(1.131) de las inclusiones $H^{r_\alpha+m,p}_w(B)\hookrightarrow H^{1,p}_w(B)\hookrightarrow L^p_w(B)$. Por lo tanto,

$$\|\partial_y V(\cdot,u_k)\partial_{x_i}(u_k)\|_{L^p(B)} \le (1+\|u_k\|^{\alpha}_{L^\infty(B)})\|u_k\|_{H^{r_\alpha+m,p}_w(B)} \tag{1.132}$$

Adicionalmente notemos que $\|u_k\|_{L^\infty(B)}$ en (1.132), es finito de manera uniforme por la inclusión $H^{r_\alpha+m,p}(\mathbb{R}^n)\hookrightarrow C(\mathbb{R}^n)\cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ (Lema 1.4). Por otro lado, $\|u_k\|_{H^{r_\alpha+m,p}_w(B)}$ también es finito (uniformemente sobre k) ya que la sucesión $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es acotada en el espacio de Sobolev $W^{1,p}(B)$ y $H_w^{r_\alpha+m,p}(B) \hookrightarrow H^{1,p}(B)$. Por lo tanto,

$$\|\partial_y V(\cdot,u_k)\partial_{x_i}(u_k)\|_{L^p(B)} \leq (1+\|u_k\|^{\alpha}_{L^\infty(B)})\,\|u_k\|_{H_w^{r_\alpha+m,p}(B)}\,. \tag{1.133}$$

En resumen, $\|\varphi V(\cdot,u_k)\|_{L^p(B)}$ y $\|\partial_{x_i}[\varphi V(\cdot,u_k)]\|_{L^p(B)}$ son finitos (uniformemente sobre k). Por lo tanto, la suma de normas en (1.121) es finita, luego $\|g_k\|_{H^{1,p}(B)}$ es una sucesión $\{g_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ acotada en el espacio de Sobolev $H^{1,p}(B) = W^{1,p}(B)$. Por el Teorema de Compacidad de Rellich-Kondrachov ([Eva10, Cap. 5, Teo. 1] con $q=p$, exponente crítico de Sobolev $p^*=(np)/(n-p)$ que implica que $p<p^*$), la inclusión $H^{1,p}(B)\hookrightarrow L^p(B)$ es compacta, luego existe una subsucesión $\{g_{k_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ de la sucesión $\{g_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, que converge en $L^p(B)$. Más precisamente, existe $g\in L^p(B)$ tal que $\lim_i g_{k_i}=g$ en $L^p(B)$. Este hecho permite demostrar que la sucesión $\{R(u_{k_i})\}_{i\in\mathbb{N}} = \left\{v_{u_{k_i}}\right\}_{i\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en el espacio $H_w^{r_\alpha+m,p}(\mathbb{R}^n)$:

$$\begin{aligned}\left\|R(u_{k_i})-R(u_{k_j})\right\|_{H_w^{r_\alpha+m,p}(\mathbb{R}^n)} &= \left\|v_{u_{k_i}}-v_{u_{k_j}}\right\|_{H_w^{r_\alpha+m,p}(\mathbb{R}^n)}\\ &\leq \left\|v_{u_{k_i}}-v_{u_{k_j}}\right\|_{H_w^{s,p}(a)}\\ &= \left\|A(v_{u_{k_i}}-v_{u_{k_j}})\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\\ &= \left\|\delta\varphi V(\cdot,u_{k_i})-\delta\varphi V(\cdot,u_{k_j})\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\\ &\leq \left\|g_{k_i}-g_{k_j}\right\|_{L^p(B)}\,.\end{aligned} \tag{1.134}$$

donde (1.134) sigue de la inclusión $H_w^{r_\alpha+m,p}(\mathbb{R}^n)\hookrightarrow H_w^{s,p}(a)$. Por lo tanto,

$$\left\|R(u_{k_i})-R(u_{k_j})\right\|_{H_w^{r_\alpha+m,p}(\mathbb{R}^n)} \leq \left\|g_{k_i}-g_{k_j}\right\|_{L^p(B)}\,,$$

es decir, la sucesión $\{R(u_{k_i})\}_{i\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en el espacio de Banach $H_w^{r_\alpha+m,p}(\mathbb{R}^n)$ ya que $\{g_{k_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $L^p(B)$. Por lo tanto, esta sucesión converge en el espacio $H_w^{r_\alpha+m,p}(\mathbb{R}^n)$. Esto prueba que el operador $R\colon B\to B$ es compacto.

Finalmente, dado que el operador $R\colon B\to B$ es continuo y compacto, por el Teorema del punto fijo de Schauder [AGO02, Cap. 1, Teo. 1.2.2], existe una función $u\in B$ tal que $R(u)=u$. Por definición del operador R, tenemos que $u\in H_w^{s,p}(a)$, es decir, el problema no lineal (1.95) tiene una solución $u\in H_w^{s,p}(a)$ cuando δ es suficientemente pequeño. □

1.5.2 Problema lineal y no lineal en un contexto radial

En esta sección y de manera similar a la sección anterior, estudiamos el problema lineal y no lineal en un contexto radial.

Definición 1.24. *(Función radial) Una función medible $u\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$ se denomina radial si $u(Rx)=u(x)$ (casi en todas partes) para toda rotación $R\in SO(n)$ donde $SO(n)$* [9] *es el grupo ortogonal*

[9] El grupo ortogonal especial de matrices de orden n es definido como $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R}) := \mathrm{O}(n)\cap\mathrm{SL}(n,\mathbb{R}) =$

especial de matrices (en la literatura es común denotar una función radial por $u(|x|)$).

Definición 1.25. *(Distribución temperada radial) Una distribución temperada $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ se denomina radial si $R(T) = T$ para toda rotación $R \in SO(n)$ donde $R(T)$ es la distribución temperada definida por $(R(T), \varphi) = (T, R^{-1}(\varphi))$ con $R^{-1}(\varphi)(x) := \varphi(R(x))$.*

Proposición 1.27. *(Distribuciones temperadas regulares de funciones radiales) Sea $w \in A_p(\mathbb{R}^n)$ un peso de Muckenhoupt. Si $u \in L^p_{w,radial}(\mathbb{R}^n)$, entonces la distribución temperada $T_u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ definida por $T_u(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x)\varphi(x)\,dx$ ($\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ función de Schwartz) es radial.*

Demostración. Sea $u \in L^p_{w,\text{radial}}(\mathbb{R}^n)$. Por Proposición 1.7 la distribución temperada T_u está bien definida. Sea R una rotación, entonces

$$\begin{aligned}
R(T_u)(\varphi) &= (R(T_u), \varphi) \\
&= (T_u, R^{-1}(\varphi)) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} u(x) R^{-1}(\varphi)(x)\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} u(x)\varphi(R(x))\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} u(R^{-1}(y))\varphi(y)|\det(R^{-1})|\,dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} u(y)\varphi(y)\,dy \qquad (1.135) \\
&= T_u(\varphi)
\end{aligned}$$

donde (1.135) sigue del hecho que u es una función radial y $|\det(R^{-1})| = 1$ por ser R^{-1} una matriz en el grupo ortogonal especial. Por lo tanto,

$$R(T_u)(\varphi) = T_u(\varphi), \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),$$

es decir, la distribución temperada T_u es radial cuando u es una función radial. □

Definición 1.26. *(L^p radial) El espacio L^p radial, denotado por $L^p_{radial}(\mathbb{R}^n)$, es definido por*

$$L^p_{radial}(\mathbb{R}^n) = \{u \in L^p(\mathbb{R}^n) \colon u \text{ función radial }\}$$

Definición 1.27. *(L^p con peso y radial) Sea $w \in A_p(\mathbb{R}^n)$ un peso de Muckenhoupt. El espacio L^p con peso y radial, denotado por $L^p_{w,radial}(\mathbb{R}^n)$, está definido por*

$$L^p_{w,radial}(\mathbb{R}^n) = \{u \in L^p_w(\mathbb{R}^n) \colon u \text{ función radial }\}$$

Definición 1.28. *(Espacio potencial de Bessel con peso y radial*

$$H^{s,p}_{w,radial}(\mathbb{R}^n) = \{u \in H^{s,p}_w(\mathbb{R}^n) \colon u \text{ función radial }\}$$

Observación 1.22. *Las normas de los espacios radiales definidos anteriormente siguen siendo las normas de los espacios no radiales $L^p(\mathbb{R}^n)$, $L^p_w(\mathbb{R}^n)$, $H^{s,p}_w(\mathbb{R}^n)$.*

$R \in \mathrm{SL}(n, R)\colon R^t R = I$, donde $\mathrm{O}(n)$ denota el grupo ortogonal de orden n y $\mathrm{SL}(n, R)$ corresponde al grupo especial de orden n

Similarmente al espacio definido en Definición 1.13, definimos el espacio $H_w^{s,p}(a)$ en un contexto radial:

Definición 1.29. *(El espacio radial) Sea $w \in A_p(\mathbb{R}^n)$ un peso de Muckenhoupt y una función $a \in \mathcal{J}_s^\beta(\mathbb{R}^n)$. El espacio $H_w^{s,p}(a)$ radial, denotado por $H_{w,radial}^{s,p}(a)$, es definido por*

$$H_{w,radial}^{s,p}(a) = \{u \in H_w^{s,p}(a) \colon u \text{ función radial } \}$$

.

Observación 1.23. *La norma del espacio $H_{w,radial}^{s,p}(a)$ sigue siendo la norma $\|\cdot\|_{H_w^{s,p}(a)}$.*

Definición 1.30. *(Funciones suaves, de soporte compacto, con peso) Sea $w \in A_p(\mathbb{R}^n)$ un peso de Muckenhoupt. Denotamos por $C_{c,w^{-1/p}}^\infty(\mathbb{R}^n)$, al espacio de funciones suaves, con peso $w^{-1/p}$, con soporte compacto, por*

$$C_{c,w^{-1/p}}^\infty(\mathbb{R}^n) := \left\{ \frac{1}{w^{1/p}} u \colon u \in C_{c,radial}^\infty(\mathbb{R}^n) \right\}$$

Definición 1.31. *(Funciones suaves, de soporte compacto, radiales, con peso) Sea $w \in A_p(\mathbb{R}^n)$ un peso de Muckenhoupt. Denotamos por $C_{c,w^{-1/p},radial}^\infty(\mathbb{R}^n)$, al espacio de funciones suaves, radiales, con peso $w^{-1/p}$, con soporte compacto, por*

$$C_{c,w^{-1/p},radial}^\infty(\mathbb{R}^n) := \left\{ \frac{1}{w^{1/p}} u \colon u \in C_{c,radial}^\infty(\mathbb{R}^n) \right\}$$

Teorema 1.13. *(Densidad del espacio de funciones suaves, de soporte compacto, con peso, sobre espacios L^p con peso) Sea $u \in L_w^p(\mathbb{R}^n)$, por definición, $w^{1/p}u \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Como el espacio $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ es denso en $L^p(\mathbb{R}^n)$, se cumple que $\left\| u_k - w^{1/p}u \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \to 0$, para alguna sucesión $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Esto implica que $\left\| w^{1/p}(\frac{u_k}{w^{1/p}} - u) \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \left\| \left(\frac{u_k}{w^{1/p}} - u \right) \right\|_{L_w^p(\mathbb{R}^n)} \to 0$ con la sucesión $\left\{ \frac{u_k}{w^{1/p}} \right\} \subset C_{c,w^{-1/p}}^\infty(\mathbb{R}^n)$. Por lo tanto, el espacio $C_{c,w^{-1/p}}^\infty(\mathbb{R}^n)$ es denso en $L_w^p(\mathbb{R}^n)$ con la norma $|\cdot\|_{L_w^p(\mathbb{R}^n)}$*

Definición 1.32. *Denotamos por $L_{w,radial}^p(\mathbb{R}^n)$ a la completación del espacio de funciones suaves con soporte compacto y radiales, con peso w, $C_{c,radial}^\infty(\mathbb{R}^n)$ con la norma $\|\cdot\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$. Notacionalmente, $L_{w,radial}^p(\mathbb{R}^n) := \overline{C_{c,1/w1/p,\text{ radial}}^\infty(\mathbb{R}^n)}^{\|\cdot\|_{L^p(\mathbb{R}^n}}$*

Definición 1.33. *(Espacio radial L^p con peso) Denotamos por $L_{radial}^p(\mathbb{R}^n)$ a la completación del espacio de funciones suaves, radiales, con soporte compacto $C_{c,radial}^\infty(\mathbb{R}^n)$ con la norma $\|\cdot\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$. Notacionalmente, se suele denotar por $L_{w,radial}^p = \{u \in L_w^p(\mathbb{R}^n) \colon u \text{ función radial } \}$.*

Proposición 1.28. *(Inclusión compacta) Sea $n > 1$ y $\alpha > 1$ un parámetro. La inclusión*

$$H_{radial}^{r_\alpha,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L_{radial}^{\alpha p}(\mathbb{R}^n),$$

donde $r_\alpha = \frac{n(\alpha-1)}{\alpha p}$, es compacta.

Demostración. Observando que $r_\alpha p < n$, $p < \alpha p < \frac{np}{n-r_\alpha p}$, el resultado sigue del Teorema II.1 en [Lio82]. $\square$

Dados los preliminares y definiciones anteriores, obtenemos solubilidad para el problema lineal asociado al operador A en un contexto radial:

Teorema 1.14. *(teo:1.14) Sea $w \in A_p(\mathbb{R}^n)$ un peso de Muckenhoupt radial y una función $a \in \mathcal{J}_s^\beta(\mathbb{R}^n)$. Para cada $f \in L^p_{radial}(\mathbb{R}^n)$, el problema lineal*

$$A(u) = f \tag{1.136}$$

tiene una única solución $u_f \in H^{s,p}_{w,radial}(a)$. Adicionalmente $\|u_f\|_{H^{s,p}_w(a)} = \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$

Demostración. Análogamente a la demostración del Teorema 1.7, la única solución del problema lineal (1.136) es

$$u_f = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{(1+a(|\xi|^2))^{s/2}}\widehat{\left(\frac{f}{w^{1/p}}\right)}(\xi)\right)$$

con $u_f \in D(A) = H^{s,p}_w(a)$. Más aún, u_f es una función radial ya que las funciones $\frac{1}{(1+a(|\cdot|^2)))^{s/2}}$, $\frac{f}{w^{1/p}}$ son radiales, la transformada de Fourier (e inversa) de una función radial, es radial ([IL14, Teo. 1.5]), y el producto de funciones radiales, es radial. Por lo tanto, $u_f \in H^{s,p}_{w,\mathrm{radial}}(a)$. La demostración de la igualdad de las normas $\|u_f\|_{H^{s,p}_w(a)} = \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$ se prueba de manera análoga al caso no radial (ver Teorema 1.7).

$\square$

Definición 1.34. *(Condiciones de crecimiento) Sea $\alpha > 1$ un parámetro, $V : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una función medible, de clase $C^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$, y radial en la primera variable. La función V satisface una condición de crecimiento si existen funciones $h \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^{\frac{\alpha p}{\alpha-1}}(\mathbb{R}^n)$ de modo que*

$$|V(x,y)| \le C_1(|h(x)| + |y|^\alpha), \quad x \in \mathbb{R}^n,\ y \in \mathbb{R} \tag{1.137}$$

$$|\partial_y V(x,y)| \le C_2(|g(x)| + |y|^{\alpha-1}), \quad x \in \mathbb{R}^n,\ y \in \mathbb{R} \tag{1.138}$$

para algunas constantes C_1, $C_2 > 0$

Teorema 1.15. *(Problema no lineal radial) Sea $\alpha > 1$ un parámetro, un peso de Muckenhoupt $w \in A_p(\mathbb{R}^n)$ satisfaciendo la condición diádica $C_{0,p,\beta s/4,\alpha p}$, una función $a \in \mathcal{J}_s^\beta(\mathbb{R}^n)$ y una no linealidad V bajo las condiciones de crecimiento (1.137)-(1.138) junto con el supuesto adicional que $\|h\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le \epsilon - \epsilon^\alpha$ para algún $\epsilon > 0$. Entonces el problema no lineal*

$$A(u) = V(\cdot, u) \tag{1.139}$$

tiene una solución $u \in H^{s,p}_{w,radial}(a)$.

Demostración. Como primer paso en la demostración, probaremos que el operador de Nemytskii

$$L^{\alpha p}_{\mathrm{radial}}(\mathbb{R}^n) \to L^p_{\mathrm{radial}}(\mathbb{R}^n) : u \mapsto V(\cdot, u)$$

está bien definido. Más precisamente que es acotado, es decir, que

$$\|V(\cdot,u)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|h\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|u\|_{L^{\alpha p}(\mathbb{R}^n)}.$$

Sea $u \in L^{\alpha p}_{\text{radial}}(\mathbb{R}^n)$. Por las condiciones de crecimiento (1.137)-(1.138), (omitiendo constantes), tenemos que

$$\begin{aligned}|V(x,u(x))|^p &\leq (|h(x)| + |u(x)|^\alpha)^p \\ &\leq |h(x)|^p + |u(x)|^{\alpha p},\end{aligned}$$

luego

$$\|V(\cdot,u)\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|h\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|u\|^{\alpha p}_{L^{\alpha p}(\mathbb{R}^n)}.$$

Por lo tanto,

$$\|V(\cdot,u)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|h\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|u\|^{\alpha}_{L^{\alpha p}(\mathbb{R}^n)} \tag{1.140}$$

es decir, $V(\cdot,u) \in L^p(\mathbb{R}^n)$ cuando $u \in L^{\alpha p}_{\text{radial}}(\mathbb{R}^n)$. Más aún, como u es una función radial, por el supuesto de radialidad sobre la no linealidad V, obtenemos que $V(\cdot,u)$ también es una función radial, es decir, $V(\cdot,u) \in L^p_{\text{radial}}(\mathbb{R}^n)$. Por lo tanto, el operador de Nemytskii está bien definido.

Como segundo paso en la demostración probaremos que el operador $R\colon B_\epsilon \to B_\epsilon$ donde

$$B_\epsilon := \left\{u \in L^{\alpha p}_{\text{radial}}(\mathbb{R}^n) \colon\ \|u\|_{L^{\alpha p}(\mathbb{R}^n)} \leq \epsilon\right\}$$

(la bola unitaria de radio $\epsilon > 0$ en el espacio $L^{\alpha p}_{\text{radial}}(\mathbb{R}^n)$) definido por $R(u) = v_u$ donde v_u es la única solución en $H^{s,p}_{w,\text{radial}}(a)$ del problema lineal

$$A(v) = V(\cdot,u), \tag{1.141}$$

está bien definido. Sea $u \in B_\epsilon$, por definición $u \in L^{\alpha p}_{\text{radial}}(\mathbb{R}^n)$, se sigue de (1.140) que $V(\cdot,u) \in L^p_{\text{radial}}(\mathbb{R}^n)$. Por Teorema 1.14, el problema lineal (1.141) tiene una única solución $v_u \in H^{s,p}_{w,\text{radial}}(a)$, se sigue que $v_u \in L^{\alpha p}_{\text{radial}}(\mathbb{R}^n)$ por las inclusiones $H^{s,p}_{w,\text{radial}}(a) \hookrightarrow H^{r_\alpha+m,p}_{w,\text{radial}}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^{r_\alpha,p}_{\text{radial}}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{\alpha p}_{\text{radial}}(\mathbb{R}^n)$ (Lema 1.3). Por lo tanto, la definición del operador R es consistente como operador desde B_ϵ a $L^{\alpha p}_{\text{radial}}(\mathbb{R}^n)$. Ahora probaremos que el rango del operador R está en B_ϵ. Sea $u \in B_\epsilon$, entonces

$$\begin{aligned}\|R(u)\|_{L^{\alpha p}(\mathbb{R}^n)} &= \|v_u\|_{L^{\alpha p}(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq \|v_u\|_{H^{r_\alpha,p}(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq \|v_u\|_{H^{r_\alpha+m,p}_w(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq \|v_u\|_{H^{s,p}_w(a)} \qquad (1.142) \\ &= \|A(v_u)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\ &= \|V(\cdot,u)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq \|h\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|u\|^\alpha_{L^{\alpha p}(\mathbb{R}^n)} \qquad (1.143)\end{aligned}$$

$$\leq \|h\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \epsilon^\alpha \tag{1.144}$$

$$\leq \epsilon. \tag{1.145}$$

donde (1.142) sigue de las inclusiones $H^{s,p}_w(a) \hookrightarrow H^{r_\alpha+m,p}_w(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^{r_\alpha,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{\alpha p}(\mathbb{R}^n)$, (1.143) de (1.140), (1.144) del supuesto $u \in B_\epsilon$, y (1.145) se cumple cuando $\|h\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \epsilon - \epsilon^\alpha$. Por lo tanto

$$\|R(u)\|_{L^{\alpha p}(\mathbb{R}^n)} \leq \epsilon,$$

es decir, $R\colon B_\epsilon \to B_\epsilon$ es un operador bien definido.

Como tercer paso en la demostración probaremos que el operador R es continuo y compacto. Para verificar la continuidad, sea $u \in B_\epsilon$ y $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset B_\epsilon$ una sucesión tal que $u_k \to u$ en $L^{\alpha p}(\mathbb{R}^n)$. Probaremos que $R(u_k) \to R(u)$ en $L^{\alpha p}(\mathbb{R}^n)$. Para este objetivo, notemos que

$$\begin{aligned}
\|R(u_k) - R(u)\|_{L^{\alpha p}(\mathbb{R}^n)} &= \|v_{u_k} - v_u\|_{L^{\alpha p}(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq \|v_{u_k} - v_u\|_{H^{r_\alpha,p}(a)} \\
&\leq \|v_{u_k} - v_u\|_{H^{r_\alpha+m,p}_w(a)} \\
&\leq \|v_{u_k} - v_u\|_{H^{s,p}_w(a)} \\
&= \|A(v_{u_k}) - A(v_u)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&= \|V(\cdot,u_k) - V(\cdot,u)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\|R(u_k) - R(u)\|_{L^{\alpha p}(\mathbb{R}^n)} \leq \|V(\cdot,u_k) - V(\cdot,u)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \tag{1.146}$$

Para estimar la expresión en la derecha de (1.146) tenemos que

$$\begin{aligned}
|V(x,u_k(x)) - V(x,u(x))| &= \left|\int_0^1 \partial_t[V(x,tu_k(x)+(1-t)u(x))]dt\right| &(1.147)\\
&= \left|(u_k(x)-u(x))\int_0^1 \left(\partial_y[V(x,tu_k(x)+(1-t)u(x))]\right)dt\right| &(1.148)\\
&\leq |u_k(x)-u(x)|\int_0^1 (|g(x)| + |tu_k(x)+(1-t)u(x)|^{\alpha-1})dt &(1.149)\\
&\leq |u_k(x)-u(x)|(|g(x)| + |u_k(x)|^{\alpha-1} + |u(x)|^{\alpha-1})
\end{aligned}$$

donde (1.147) sigue del Teorema fundamental del cálculo, (1.148) de la regla de la cadena y (1.149) del supuesto (1.138) sobre V. Se sigue por Desigualdad de Hölder generalizada con los exponentes $\frac{1}{\alpha p} + \frac{1}{\frac{\alpha}{(\alpha-1)p}} = \frac{1}{p}$ que

$$\begin{aligned}
\|V(\cdot,u_k) - V(\cdot,u)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} &\leq \|u_k - u\|_{L^{\alpha p}(\mathbb{R}^n)} \left\||g| + |u_k|^{\alpha-1} + |u|^{\alpha-1}\right\|_{L^{\frac{\alpha p}{\alpha-1}}(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq \|u_k - u\|_{L^{\alpha p}(\mathbb{R}^n)} \left(\|g\|_{L^{\frac{\alpha p}{\alpha-1}}(\mathbb{R}^n)} + \|u_k\|^{\alpha-1}_{L^{\alpha p}(\mathbb{R}^n)} + \|u\|^{\alpha-1}_{L^{\alpha p}(\mathbb{R}^n)}\right)
\end{aligned}$$

$$\leq \|u_k - u\|_{L^{\alpha p}(\mathbb{R}^n)} \left(\|g\|_{L^{\frac{\alpha p}{\alpha-1}}(\mathbb{R}^n)} + \epsilon^{\alpha-1} + \epsilon^{\alpha-1} \right) \tag{1.150}$$

donde (1.150) sigue del supuesto que u_k, $u \in B_\epsilon$. Además por hipótesis, $g \in L^{\frac{\alpha p}{\alpha-1}}(\mathbb{R}^n)$. Por lo tanto,

$$\|R(u_k) - R(u)\|_{L^{\alpha p}(\mathbb{R}^n)} \leq \|u_k - u\|_{L^{\alpha p}(\mathbb{R}^n)} \left(\|g\|_{L^{\frac{\alpha p}{\alpha-1}}(\mathbb{R}^n)} + 2\epsilon^{\alpha-1} \right),$$

lo que implica que

$$\|R(u_k) - R(u)\|_{L^{\alpha p}(\mathbb{R}^n)} \to 0 \text{ cuando } \|u_k - u\|_{L^{\alpha p}(\mathbb{R}^n)} \to 0,$$

es decir, el operador R es continuo.

Para verificar que R es un operador compacto, sea $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset B_\epsilon$ sucesión acotada, es decir, existe una constante $M > 0$ tal que $\|u_k\|_{L^{\alpha p}(\mathbb{R}^n)} \leq M$ para todo $k \in \mathbb{N}$ (uniformemente). Entonces

$$\begin{aligned}
\|R(u_k)\|_{H^{r_\alpha,p}(\mathbb{R}^n)} &= \|v_{u_k}\|_{H^{r_\alpha,p}(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq \|v_{u_k}\|_{H_w^{r_\alpha+m,p}(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq \|v_{u_k}\|_{H_w^{s,p}(a)} \\
&= \|A(u_k)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&= \|V(\cdot, u_k)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq \|h\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|u_k\|^\alpha_{L^{\alpha p}(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq \|h\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + M,
\end{aligned}$$

es decir, la sucesión $\{R(u_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ es acotada en $H^{r_\alpha,p}_{\text{radial}}(\mathbb{R}^n)$. Como la inclusión $H^{r_\alpha,p}_{\text{radial}}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{\alpha p}_{\text{radial}}(\mathbb{R}^n)$ es compacta (Proposición 1.28), la sucesión $\{R(u_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión convergente en $L^{\alpha p}_{\text{radial}}(\mathbb{R}^n)$. Más precisamente, existe una subsucesión $\left\{R(u_{k_j})\right\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \{R(u_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $R(u_{k_j}) \to v$ en $L^{\alpha p}(\mathbb{R}^n)$ para algún $v \in L^{\alpha p}_{\text{radial}}(\mathbb{R}^n)$. Además $\|v\|_{L^{\alpha p}(\mathbb{R}^n)} \leq \epsilon$ ya que

$$\|v\|_{L^{\alpha p}(\mathbb{R}^n)} \leq \left\|R(u_{k_j}) - v\right\|_{L^{\alpha p}(\mathbb{R}^n)} + \left\|R(u_{k_j})\right\|_{L^{\alpha p}(\mathbb{R}^n)} \leq \left\|R(u_{k_j}) - v\right\|_{L^{\alpha p}(\mathbb{R}^n)} + \epsilon \to 0 + \epsilon = \epsilon,$$

es decir, $v \in B_\epsilon$. Por lo tanto, R es un operador compacto.

Finalmente, como $R : B_\epsilon \to B_\epsilon$ es un operador continuo y compacto, por el Teorema del punto fijo de Schauder, el operador R posee un punto fijo. Más precisamente, existe $u \in B_\epsilon$ con $R(u) = u$, es decir, existe $u \in H^{s,p}_{w,\text{radial}}(a)$ tal que $R(u) = u$, es decir, el problema no lineal (1.139) tiene una solución $u \in H^{s,p}_{w,\text{radial}}(a)$. □

1.6 Aplicaciones

Proposición 1.29. *Sea $s \geq 2$. Para cada $f \in L^p(\mathbb{R}^n))$, el problema lineal*

$$|x|^{\gamma/p}(1 - \partial_x^2)^{s/2} u(x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{1.151}$$

tiene una única solución $u_f \in H^{s,p}_w(a)$*, donde* $a(t) = t$ *y* $w(x) = |x|^\gamma$*,* $-1 < \gamma < p-1$*.*

Demostración. El operador de Bessel fraccionario viene definido vía transformada de Fourier periódica por $(1-\partial_\theta^2)^{s/2} = \mathcal{F}^{-1}\left((1+k^2)^{s/2}\widehat{u}(k)\right)$ (Ver [RLS16]), es decir, el operador pseudo-diferencial periódico $(1-\partial_\theta^2)^{s/2}$ tiene el símbolo $(1+k^2)^{s/2}$. Se sigue que el símbolo del operador en el lado izquierdo de (2.51) es $\sigma_{w,a}(\theta,k) = |\theta|^{\gamma/p}(1+k^2)^{s/2}$, es decir, $\sigma_{w,a} \in S^{\beta=2}_{s,p}([-\pi,\pi]\times\mathbb{Z})$. Por lo tanto, el operador en el lado izquierdo de (2.51) es invertible (**??**). La única solución de (2.51) es $u_f = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{(1+k^2)^{s/2}}\widehat{\left(\frac{f}{|\theta|^{\gamma/p}}\right)}(k)\right)$ con $u_f \in H^{s,p}_w(a)$. □

Observación 1.24. *El operador de Bessel entrega el siguiente isomorfismo* $(I-\Delta)^{s/2} : H^{s,p}(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)$ *[Haz12]. En otras palabras, para cada* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *el problema lineal* $(I-\Delta)^{s/2}(u) = f$ *tiene una única solución* $u_f \in H^{s,p}(\mathbb{R}^n)$*. En nuestro caso, Proposición 2.15 con* $\alpha = 0$ *(caso sin peso), el problema lineal* (2.51) *es una adaptación del operador de Bessel, a un contexto periódico y con coeficiente variable.*

En [**?**] el operador $(1+(m^2-\Delta)^{\gamma/2})^{s/2}$ tiene un "símbolo" dado por $a_m(t) = (m^2+|t|)^{\gamma/2}$ y pertenece a la clase $\mathcal{G}^\gamma_s(\mathbb{R}^n)$. En nuestro caso, el operador, en un contexto periódico, es $(1+(m^2-\partial_\theta^2)^{\gamma/2})^{s/2}$. Este operador tiene coeficientes constantes, es decir, $w \equiv 1$ (caso sin peso).

Proposición 1.30. *Sea* $0 < \gamma < 1$*,* $m \neq 0$ *y* $s\gamma > 4$*. Para cada* $f \in L^p([-\pi,\pi])$*, el problema lineal*

$$(1+(m^2-\partial_\theta^2)^{\gamma/2})^{s/2}u(\theta) = f(\theta), \quad |\theta| \leq \pi \tag{1.152}$$

tiene una única solución $u_f \in H^{s,p}_{w\equiv 1}(a)$ *donde* $a(k) = (m^2+k)^{\gamma/2}$*.*

Demostración. El símbolo del operador en el lado izquierdo (2.52) es $\sigma_{w,a}(\theta,k) = (1+(m^2+k^2)^{\gamma/2})^{s/2}$, es decir, $\sigma_{w,a} \in S^{\beta=\gamma}_{s,p}([-\pi,\pi]\times\mathbb{Z})$. Por lo tanto, el operador en el lado izquierdo de (2.52), es invertible (Teorema 2.5). La única solución para (2.51) es $u_f = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{(1+(m^2+k^2)^{\gamma/2})^{s/2}}\widehat{f}(k)\right)$ con $u_f \in H^{s,p}_{w==1}(a)$. □

Proposición 1.31. *Sea* $s \geq 2$*. El problema no lineal*

$$|x|^{\gamma/p}(1-\partial_x^2)^{s/2}u(\theta) = \delta u(\theta), \tag{1.153}$$

para $|\theta| \leq \pi$ *y donde* $-1 < \gamma < p-1$*, tiene una única solución en el espacio* $H^{s,p}_w(a)$*, donde* $w(\theta) = (1+|\theta|)^{\alpha/p}$ *y* $a(k) = k$*, cuando* $\delta < \frac{1}{2C}$ *(Acá* C *es la constante de la inclusión* $H^s_w(a) \hookrightarrow L^p_w([-\pi,\pi])$*). Más aún, la solución está en el espacio* $C^{[\frac{s}{2}-1]}([-\pi,\pi])$*.*

Demostración. . Sea $\sigma_{w,a}(\theta,k) = w(\theta)^{1/p}(1+a(k^2))^{s/2}$ con $w(\theta) = (1+|\theta|)^{\gamma/p}$ y $a(k) = k$ Notemos que $\sigma_{w,a} \in \mathcal{S}^{\beta=2}_{s,p}([-\pi,\pi]\times\mathbb{Z})$. Todos los supuestos de **??** son satisfechos con $V(\theta,y) = \frac{y}{1+\theta^2}$

Por lo tanto, existe una única solución $u \in H^s_w(a)$ con la regularidad $u \in C^{[\frac{s}{2}-1]}([-\pi,\pi])$ por Corolario 2.4. □

Capítulo 2

Ecuaciones pseudo-diferenciales de coeficiente variable sobre espacios $L^p(\mathbb{S}^1)$ con peso

Este capítulo es una adaptación del Capítulo 1 a un contexto periódico. Similarmente al primer capítulo, estudiamos el problema lineal

$$A(u) = f$$

donde $f \in L^p(\mathbb{S}^1)$ y A son un operador-pseudo diferencial periódico cuyo símbolo periódico pertenece a una clase de símbolos que denotamos por $\mathcal{S}^{\beta}_{s,p}([-\pi,\pi] \times \mathbb{Z})$. El dominio del operador está definido en un espacio L^p periódico con peso. En este dominio, el operador A se define vía transformada de Fourier periódica. Lo relevante de este trabajo consiste en el hecho de que A es un operador de coeficiente variable. Estudiamos el caso cuando el símbolo del operador es de variables separadas, interpretando el coeficiente variable como un peso. Posteriormente, estudiamos problemas no lineales

$$A(u) = V(\cdot, u)$$

con métodos de punto fijo.

2.1 Preliminares

Como es usual, el círculo unitario $\mathbb{S}^1$ es identificado con el intervalo $[-\pi,\pi]$. Las funciones son medibles con la medida de Haar, es decir, la medida de Lebesgue restringida al círculo (ver [Gra14, Cap. 3, Subsec. 3.1.1]). Denotamos esta medida por $d\theta$. Las funciones (2π)-periódicas sobre la recta $\mathbb{R}$ son escritas como $u\colon [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$. La transformada de Fourier periódica es utilizada en el sentido distribucional. La transformada de Fourier periódica es denotada por $\mathcal{F}$ y la transformada de Fourier periódica inversa por $\mathcal{F}^{-1}$. En adelante $1 < p < \infty$.

Definición 2.1. *(Peso periódico) [AM08] Una función medible $w\colon [-\pi,\pi] \to [0,\infty[$ no negativa (casi en todas partes) y localmente integrable se denomina un peso periódico o simplemente un peso. Notacionalmente $w \in L^1_{loc}([-\pi,\pi])$ y $w \geq 0$ (casi en todas partes).*

Definición 2.2. *(Clase de Muckenhoupt periódica) [BG03, Def. 2.3] La clase de Muckenhoupt periódica, denotada por $A_p([-\pi,\pi])$, es el conjunto de todos los pesos $w \in A_p(\mathbb{R})$ de Muckenhoupt*

(2π)-periódicos sobre la recta $\mathbb{R}$. Un peso en la clase de Muckenhoupt periódica $A_p([-\pi,\pi])$ se denomina un peso de Muckenhoupt periódico. Con mayor detalle, estos pesos w satisfacen la estimación

$$A_p(w) := \left(\frac{1}{|I|}\int_I w(\theta)\,d\theta\right)\left(\frac{1}{|I|}\int_I [w(\theta)]^{-1/(p-1)}\,d\theta\right)^{p-1} < \infty \tag{2.1}$$

para todo I intervalo compacto de $\mathbb{R}$. La notación $|I|$ indica la medida de Lebesgue del intervalo I. La constante $A_p(w)$ se denomina la constante característica del peso w.

La función $[-\pi,\pi] \to \mathbb{R}\colon \theta \mapsto |\theta|^\gamma$ es un peso de Muckenhoupt periódico, es decir, está en la clase $A_p([-\pi,\pi])$ cuando $-1 < \gamma < p-1$ [FS97], [Sch07], [BG03, Ej. 2.4], [Ber21, Teo. 1.2]. Más ejemplos de pesos de Muckenhoupt periódicos pueden ser obtenidos mediante un proceso de periodización (Definición 2.3).

Definición 2.3. *(Periodización) [Ber21, Def. 6.1] Sea $W\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un peso. Definimos un peso (2π)-periódico $w\colon [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ por*

$$w(\theta) = W(\pi)\mathcal{X}_{\{(2k-1)\pi\colon\, k\in\mathbb{Z}\}}(\theta) + \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{X}_{\{[(2k-1)\pi,(2k+1)\pi)\}}(\theta) W(\theta - 2\pi k)$$

donde $\mathcal{X}_S$ es la función característica, $\mathcal{X}_S(\theta) = 1$ si $\theta \in S$ y $\mathcal{X}_s(\theta) = 0$ si $\theta \notin S$. El peso periódico w se denomina la periodización del peso W.

Observación 2.1. *Si el peso W es una función par, entonces W coincide con su periodización w sobre el intervalo $[-\pi,\pi]$.*

Teorema 2.1. *(Periodización de pesos de Muckenhoupt) [Ber21, Teo. 6.1] Sea $W \in A_p(\mathbb{R})$ un peso de Muckenhoupt que además es una función par. Entonces su periodización w es un peso de Muckenhoupt periódico, es decir, $w \in A_p([-\pi,\pi])$.*

Mediante el proceso de periodización (Teorema 2.1) es posible obtener ejemplos de pesos de Muckenhoupt periódicos a partir de pesos de Muckenhoupt en $A_p(\mathbb{R})$ (Ver ejemplos de estos pesos en Capítulo 1). Por ejemplo, la periodización del peso de Muckenhoupt $w \in A_p(\mathbb{R})$ definido por $w(x) = (1+|x|)^\gamma$, $x \in \mathbb{R}$, es el peso periódico $w(\theta) = (1+|\theta|)^\gamma$, $|\theta| \le \pi$, donde $-1 < \gamma < p-1$.

Definición 2.4. *(Espacio L_p periódico con peso) [AM08] Sea $w \in A_p([-\pi,\pi])$ un peso de Muckenhoupt periódico. El espacio L^p periódico con peso, denotado por $L^p_w([-\pi,\pi])$, es definido como*

$$L^p_w([-\pi,\pi]) = \left\{u : [-\pi,\pi] \to \mathbb{C} \text{ medible} : \|u\|_{L^p_w([-\pi,\pi])} := \left\|w^{1/p}u\right\|_{L^p([-\pi,\pi])} < \infty\right\}$$

Proposición 2.1. *[Sch05, Cap. 28, Cor. 28.12], [BG03] (Densidad de los polinomios trigonométricos sobre el espacio L^p periódico con peso) Sea $w \in A_p([-\pi,\pi])$ un peso de Muckenhoupt periódico. La clase de polinomios trigonométricos es densa en el espacio $L^p_w([-\pi,\pi])$ con la norma $\|\cdot\|_{L^p_w([-\pi,\pi])}$*

Proposición 2.2. *Si $w \in A_p([-\pi,\pi])$ entonces $w^{-p'/p} \in A_{p'}([-\pi,\pi])$, donde p y p' son números conjugados, es decir, $1/p + 1/p' = 1$.*

Demostración. Debemos probar que el peso $w^{-p'/p}$ satisface la condición de Muckenhoupt (2.1), es decir, que la constante característica $A_{p'}(w^{-p'/p})$ sea finita, donde

$$A_{p'}(w^{-p'/p}) := \left(\frac{1}{|I|}\int_I w(\theta)^{-p'/p}\,d\theta\right)\left(\frac{1}{|I|}\int_I [w(\theta)^{-p'/p}]^{-1/(p'-1)}\,d\theta\right)^{p'-1}.$$

Mediante las relaciones entre los exponentes $-p'/p = -1/(p-1)$, $(-p'/p)(-1/(p'-1)) = 1$ y $p'-1 = 1/(p-1)$, tenemos que

$$A_{p'}(w^{-p'/p}) = \left(\frac{1}{|I|}\int_I w(\theta)^{-1/(p-1)}\,d\theta\right)\left(\frac{1}{|I|}\int_I w(\theta)\,d\theta\right)^{1/(p-1)},$$

luego,

$$\left[A_{p'}(w^{-p'/p})\right]^{p-1} = \left(\frac{1}{|I|}\int_I w(\theta)^{-1/(p-1)}\,d\theta\right)^{p-1}\left(\frac{1}{|I|}\int_I w(\theta)\,d\theta\right) \tag{2.2}$$

donde el lado derecho de (2.2) es finito ya que $w \in A_p([-\pi,\pi])$. Por lo tanto, la constante característica $A_{p'}(w^{-p'/p})$ es finita, es decir, el peso $w^{-p'/p}$ está en la clase de Muckenhoupt periódica $A_{p'}([-\pi,\pi])$ cuando $w \in A_p([-\pi,\pi])$. □

Proposición 2.3. *(Funciones en el espacio L^p periódico con peso, son integrables) [BG03, ec. 2.7] Sea $w \in A_p([-\pi,\pi])$ un peso de Muckenhoupt periódico. Entonces $L^p_w([-\pi,\pi]) \hookrightarrow L^1([-\pi,\pi])$*

Demostración. Sea $u \in L^p_w([-\pi,\pi])$. Por desigualdad de Hölder,

$$\|u\|_{L^1([-\pi,\pi])} \le \left\|w^{-1/p}\right\|_{L^{p'}([-\pi,\pi])}\left\|w^{1/p}u\right\|_{L^p([-\pi,\pi])}$$

Como $u \in L^p_w([-\pi,\pi])$, por definición $\left\|w^{1/p}u\right\|_{L^p([-\pi,\pi])}$ es finito. Por otro lado,

$$\left\|w^{-1/p}\right\|^{p'}_{L^{p'}([-\pi,\pi])} = \int_{-\pi}^{\pi} w(\theta)^{-p'/p}\,d\theta$$

es finito: como $w \in A_p([-\pi,\pi])$, se cumple que (omitiendo la constante del largo o medida del intervalo $|[-\pi,\pi]| = 2\pi$),

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi} w(\theta)^{-1/(p-1)}\,d\theta\right)^{(p-1)/p} = \frac{(A_p(w))^{1/p}}{\left(\int_{-\pi}^{\pi} w(\theta)\,d\theta\right)^{1/p}} \tag{2.3}$$

donde el lado derecho de la ecuación (2.3) es finito ya que $A_p(w) < \infty$ por ser w un peso de Muckenhoupt periódico y $\int_{-\pi}^{\pi} w(\theta)\,d\theta < \infty$ ya que w es un peso (por definición, es localmente integrable). Por lo tanto,

$$\|u\|_{L^1([-\pi,\pi])} \le C_p\,\|u\|_{L^p_w([-\pi,\pi])}, \tag{2.4}$$

es decir, $L^p_w([-\pi,\pi]) \hookrightarrow L^1([-\pi,\pi])$. □

Proposición 2.4. *(El espacio L^p periódico con peso se identifica con distribuciones periódicas) Sea $w \in A_p([-\pi,\pi])$ un peso de Muckenhoupt periódico. El espacio $L^p_w([-\pi,\pi])$ puede ser identificado con distribuciones periódicas.*

Demostración. Sea $u \in L^p_w([-\pi,\pi])$, entonces $u \in L^1([-\pi,\pi])$ (Proposición 2.3). Identificamos (de manera usual) a la función u con la distribución periódica $T_u \in \mathcal{D}'([-\pi,\pi])$ definida por $T_u(\varphi) = \int_{-\pi}^{\pi} u(\theta)\varphi(\theta)\,d\theta$ donde $\varphi \in C^\infty([-\pi,\pi])$ es una función suave sobre el círculo ([BGH19, Cap. 3, ec. 3.1], [RT10, Cap. 3, Def. 3.1.25]). □

Similarmente al espacio potencial de Bessel con peso definido en el Capítulo 1 definimos el espacio potencial de Bessel periódico con peso:

Definición 2.5. *(Espacio potencial de Bessel periódico con peso) Sea $s \in \mathbb{R}$ un parámetro y $w \in A_p([-\pi,\pi])$ un peso de Muckenhoupt periódico. El espacio potencial de Bessel periódico con peso, denotado por $H^{s,p}_w([-\pi,\pi])$, es definido por*

$$H^{s,p}_w([-\pi,\pi]) := \left\{ u \in L^p_w([-\pi,\pi])\colon\ \|u\|_{H^{s,p}_w([-\pi,\pi])} := \left\| \mathcal{F}^{-1}\left((1+k^2)^{s/2}\widehat{u}(k) \right) \right\|_{L^p_w([-\pi,\pi])} < \infty \right\}$$

Observación 2.2. *Con el peso constante $w \equiv 1$, el espacio $H^{s,p}_w([-\pi,\pi])$ coincide con el espacio potencial de Bessel periódico $H^{s,p}([-\pi,\pi])$ [JS14, Cap. 1, Sec. 1.9] el cual es definido como*

$$H^{s,p}([-\pi,\pi]) := \left\{ u \in L^p([-\pi,\pi])\colon\ \left\| \mathcal{F}^{-1}\left((1+k^2)^{s/2}\widehat{u}(k) \right) \right\|_{L^p([-\pi,\pi])} < \infty \right\}.$$

Definición 2.6. *(Multiplicador de Fourier para espacios L^p periódicos con peso) [AM08] Sea $w \in A_p([-\pi,\pi])$ un peso de Muckenhoupt periódico y $m\colon [-\pi,\pi] \to \mathbb{C}$ una función medible y esencialmente acotada sobre los números enteros $\mathbb{Z}$, es decir, $m \in L^\infty(\mathbb{Z})$. La función m se denomina un multiplicador de Fourier para el espacio $L^p_w([-\pi,\pi])$ si el operador multiplicador de Fourier $T_m\colon C([-\pi,\pi]) \subset L^p_w([-\pi,\pi]) \to L^p_w([-\pi,\pi])$ definido por*

$$T_m(u) = \mathcal{F}^{-1}\left(m(\xi)\widehat{u}(\xi) \right),$$

donde $C([-\pi,\pi])$ es el espacio de funciones continuas sobre el círculo $[-\pi,\pi]$, se extiende a un operador acotado sobre $L^p_w([-\pi,\pi])$. Más precisamente (usando la misma notación T_m para la extensión),

$$\|T_m(u)\|_{L^p_w([-\pi,\pi])} \le C_{p,w}\,\|u\|_{L^p_w([-\pi,\pi])}, \quad u \in L^p_w([-\pi,\pi])$$

para alguna constante $C_{p,w} > 0$. El espacio de multiplicadores de Fourier es un espacio de Banach con la norma $\|m\| := \|T_m\|_{L^p_w([-\pi,\pi]) \to L^p_w([-\pi,\pi])}$

Observación 2.3. *La definición también es posible con el espacio de polinomios trigonométricos, pues este espacio es denso en $L^p_w([-\pi,\pi])$ (Proposición 2.1)*

Observación 2.4. *Considerando un peso constante $w \equiv 1$, obtenemos la definición de multiplicador de Fourier para $L^p([-\pi,\pi])$ [Sar11], [JS14, Cap. 1, Sec. 1.9.5.4], [YST16, ec. 1]. En el caso $p = 2$, por el Teorema de Plancherel [Won11, Cap. 21, Teo. 21.1], una función es un multiplicador de Fourier para $L^2([-\pi,\pi])$, si y sólo si, es medible y esencialmente acotada sobre los números enteros $\mathbb{Z}$ [Gra14, Cap. 4, Subsec. 4.3.1, Teo. 4.3.3], [TB04, Ap. A.9.3], [Won11, Cap. 21, Teo. 21.4].*

El siguiente Teorema pertenece a una clase de resultados denominados de transferencia. Para más información de estos resultados, ver [CW12]

Teorema 2.2. *(Teorema de Leeuw con peso) [BG03, Teo. 1.2], [Ber21, Teo. 3.1] Sea $w \in A_p([-\pi,\pi])$ un peso de Muckenhoupt periódico. Si m es un multiplicador de Fourier para $L^p_w(\mathbb{R})$ y es una función continua sobre $\mathbb{R}$, entonces su restricción a los números enteros $\mathbb{Z}$ es un multiplicador de Fourier para $L^p_w([-\pi,\pi])$. Más aún, la norma del multiplicador sobre $L^p_w([-\pi,\pi])$ no excede la norma del multiplicador sobre $L^p_w(\mathbb{R})$.*

Observación 2.5. *Si m es un multiplicador de Fourier para $L^p_w([-\pi,\pi])$, entonces*

$$\left\|\mathcal{F}^{-1}\left(m(\xi)\widehat{u}(\xi)\right)\right\|_{L^p_w([-\pi,\pi])} \leq C_{p,w}\left\|u\right\|_{L^p_w([-\pi,\pi])}, \quad u \in L^p_w([-\pi,\pi]).$$

Similar al caso no periódico (Capítulo 1) la constante $C_{p,w}$ también es A_p-consistente (adaptado a la clase de Muckenhoupt periódica $A_p([-\pi,\pi])$) ya que la norma del multiplicador de Fourier para $L^p_w([-\pi,\pi])$ no excede la norma del multiplicador de Fourier para $L^p_w(\mathbb{R})$.

2.2 Clase de funciones y multiplicadores de Fourier para $L^p_w(\mathbb{S}^1)$

Definición 2.7. *(Extensión) Sea $u\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ una función. Una extensión de u es una función $U\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de modo que U coincide con u en el dominio $\mathbb{Z}$. En adelante, usamos la misma notación para la extensión de una función.*

Definición 2.8. *(Clase de funciones) Sea β, $s \geq 0$ parámetros con $\beta s \geq 4$. Denotamos por $\mathcal{J}^\beta_s(\mathbb{Z})$ al conjunto de todas las funciones medibles $a\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ bajo los siguientes supuestos:*

J_1 *Existe una extensión $a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clase $C^1([0,\infty[)$ y la función $\xi \mapsto a(\xi^2)$, $\xi \in \mathbb{R}$ es no negativa.*

J_2 *Existen constantes $M_1\, R_1 > 0$ de modo que*

$$M_1(1+\xi^2)^{\beta/2} \leq a(\xi^2), \quad |\xi| > R_1$$

J_3 *Existen constantes M_2, $R_2 > 0$ de modo que*

$$\left|\partial_t|_{t=\xi^2}\, a(t)\right| \leq M_2 a(\xi^2)^{N+1}, \quad |\xi| > R_2$$

donde $N = \frac{s}{2} - \frac{2}{\beta}$

En adelante, las constantes M_1, M_2 son omitidas por ser irrelevantes en los resultados. Además, en las estimaciones a lo largo del trabajo consideramos $R = \max(R_1, R_2)$.

Proposición 2.5. *(Inclusión) Sea β, s_1, $s_2 \geq 0$ parámetros con $\beta s_1 \geq 4$ y $s_1 \leq s_2$. Entonces se cumple la siguiente inclusión*

$$\mathcal{J}^\beta_{s_1}(\mathbb{Z}) \subset \mathcal{J}^\beta_{s_2}(\mathbb{Z}).$$

Demostración. La demostración es análoga a la Proposición 1.14 del Capítulo 1. $\square$

Proposición 2.6. *(Primer multiplicador) Sea $w \in A_p([-\pi,\pi])$ un peso de Muckenhoupt periódico y una función $a \in \mathcal{J}^\beta_s(\mathbb{Z})$. Para cada $r \geq s$, la función*

$$\mathbb{Z} \to \mathbb{R} \colon k \mapsto \frac{1}{(1+a(k^2))^{r/2}}$$

es un multiplicador de Fourier para $L^p_w([-\pi,\pi])$.

Demostración. A partir de la extensión $\mathbb{R} \to \mathbb{R} \colon \xi \mapsto \frac{1}{(1+a(\xi^2))^{r/2}}$ tenemos que

$$\partial_\xi \frac{1}{(1+a(\xi^2))^{r/2}} = -\frac{-r\xi}{(1+a(\xi^2))^{r/2+1}} a'(\xi^2),$$

luego

$$\begin{aligned}
\left|\xi \partial_\xi \frac{1}{(1+a(\xi^2))^{r/2}}\right| &\leq C_r \frac{(1+\xi^2)}{(1+a(\xi^2))^{r/2+1}} (1+\xi^2)^{\left(\frac{\beta s}{4}-1\right)+\frac{\beta}{2}} \\
&= C_r \frac{(1+\xi^2)^{\frac{\beta s}{4}+\frac{\beta}{2}}}{(1+a(\xi^2))^{r/2+1}} \\
&\leq C_r \frac{(1+a(\xi^2)^{\frac{2}{\beta}\left(\frac{\beta s}{4}+\frac{\beta}{2}\right)}}{(1+a(\xi^2)))^{r/2+1}} \\
&= C_r (1+a(\xi^2))^{\frac{s}{2}-\frac{r}{2}} \\
&\leq C_r \qquad (2.5)
\end{aligned}$$

para todo $|\xi| > R$, donde (2.5) sigue del supuesto $r \geq s$. Por lo tanto,

$$\left|\xi \partial_\xi \frac{1}{(1+a(\xi^2))^{r/2}}\right| \leq C_r, \quad |\xi| > R, \tag{2.6}$$

es decir, la extensión $\xi \mapsto \frac{1}{(1+a(\xi^2))^{r/2}}$ satisface la condición de Lizorkin (Definición 3.2), luego es un multiplicador de Fourier para $L^p_w(\mathbb{R})$ (Teorema 1.2). Por el Teorema de Leeuw (Teorema 2.2), la función es un multiplicador de Fourier para $L^p_w([-\pi,\pi])$. $\square$

Análogamente a la demostración de la Proposición 2.6 junto con la regla de Leibniz, obtenemos el siguiente multiplicador:

Proposición 2.7. *(Segundo multiplicador) Sea $w \in A_p([-\pi,\pi])$ un peso de Muckenhoupt periódico y una función $a \in \mathcal{J}^\beta_s(\mathbb{Z})$. Para cada $r \geq 0$, la función*

$$\mathbb{Z} \to \mathbb{R} \colon k \mapsto \frac{(1+k^2)^{r/2}}{(1+a(k^2))^{\frac{1}{2}\left(s+\frac{2r}{\beta}\right)}}$$

es un multiplicador de Fourier para $L^p_w([-\pi,\pi])$.

Proposición 2.8. *Sea $w \in A_p([-\pi,\pi])$ un peso de Muckenhoupt periódico y una función $a \in$*

$\mathcal{J}_s^{\beta}(\mathbb{Z})$. *El operador lineal* $T\colon L^p([-\pi,\pi]) \to L^p_w([-\pi,\pi])$ *definido por*

$$T(u) = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{(1+a(k^2))^{s/2}}\widehat{\left(\frac{u}{w^{1/p}}\right)}(k)\right)$$

es lineal, inyectivo y acotado.

Demostración. Sea $u \in L^p([-\pi,\pi])$, luego, $\frac{u}{w^{1/p}} \in L^p_w([-\pi,\pi])$. Entonces

$$\begin{aligned}\|T(u)\|_{L^p_w([-\pi,\pi])} &= \left\|w^{1/p}\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{(1+a(k^2))^{s/2}}\widehat{\left(\frac{u}{w^{1/p}}\right)}(k)\right)\right\|_{L^p([-\pi,\pi])} \\ &\leq C_{p,w}\left\|w^{1/p}\frac{u}{w^{1/p}}\right\|_{L^p([-\pi,\pi])} \qquad (2.7) \\ &= C_{p,w}\|u\|_{L^p([-\pi,\pi])}\end{aligned}$$

donde (2.7) sigue del hecho de que la función $k \mapsto \frac{1}{(1+a(k^2))^{s/2}}$ es un multiplicador de Fourier para $L^p_w([-\pi,\pi])$ (Proposición 2.6). La linealidad del operador T es consecuencia de la linealidad de la transformada de Fourier periódica. El operador es inyectivo debido a que la transformada de Fourier periódica es un isomorfismo entre el espacio de distribuciones periódicas y el espacio de distribuciones temperadas sobre el círculo [BGH19, Cap. 3, Def. 3.3.1, Prop. 3.32 y Obs. 3.33], [RT10, Cap. 3, Def. 3.1.27]. □

Corolario 2.1. *(El operador T es un isomorfismo) Sea β, $s \geq 0$ con $\beta s \geq 4$ parámetros, $w \in A_p([-\pi,\pi])$ un peso de Muckenhoupt periódico y $a \in \mathcal{J}_s^{\beta}(\mathbb{Z})$. El operador $T\colon L^p([-\pi,\pi]) \to$ Rango(T) es un isomorfismo. Su operador inverso es*

$$T^{-1}(u) = w^{1/p}\mathcal{F}^{-1}\left((1+a(k^2))^{s/2}\widehat{u}(k)\right)$$

Observación 2.6. *El rango del operador T puede ser escrito por*

$$Rango(T) = \left\{u \in L^p_w([-\pi,\pi])\colon T^{-1}(u) \in L^p([-\pi,\pi])\right\}$$

2.3 El espacio $H_w^{s,p}(a)$ periódico

La Observación 2.6 motiva la definición del siguiente subespacio de $L^p_w([-\pi,\pi])$:

Definición 2.9. *(El espacio) Sea β, $s \geq 0$ con $\beta s \geq 4$ parámetros, $w \in A_p([-\pi,\pi])$ un peso de Muckenhoupt periódico y $a \in \mathcal{J}_s^{\beta}(\mathbb{Z})$. Denotamos por $H_w^{s,p}(a)$ al espacio definido como*

$$H_w^{s,p}(a) := \left\{u \in L^p_w([-\pi,\pi])\colon w^{1/p}\mathcal{F}^{-1}\left((1+a(k^2))^{s/2}\widehat{u}(k)\right) \in L^p([-\pi,\pi])\right\}$$

Observación 2.7. *Por construcción, $H_w^{s,p}(a)$ es un espacio no trivial: una función $u \in L^p_w([-\pi,\pi])$ está en $H_w^{s,p}(a)$, si y sólo si $u = T(f)$ para algún $f \in L^p([-\pi,\pi])$.*

Observación 2.8. *Sea $a \in \mathcal{J}_s^{\beta}(\mathbb{Z})$. El espacio $H_w^{r,p}(a)$ también está bien definido cuando $r \geq s$ ya que $\mathcal{J}_s^{\beta}(\mathbb{Z}) \subset \mathcal{J}_r^{\beta}(\mathbb{Z})$ por el orden en la clase de funciones (Proposición 2.5).*

Teorema 2.3. *El espacio $H_w^{s,p}(a)$ es un espacio de Banach isomométricamente isomorfo a $L^p([-\pi,\pi])$.*

Demostración. Por construcción, el espacio $H^{s,p}_w(a)$ es el rango del operador $T\colon L^p([-\pi,\pi]) \to L^p_w([-\pi,\pi])$. Naturalmente, la norma es

$$\|u\|_{H^{s,p}_w(a)} := \left\|T^{-1}(u)\right\|_{L^p([-\pi,\pi])} = \left\|w^{1/p}\mathcal{F}^{-1}\left((1+a(k^2))^{s/2}\widehat{u}(k)\right)\right\|_{L^p([-\pi,\pi])}.$$

$\square$

Observación 2.9. *En el caso $p=2$, el espacio $H^{s,2}_w(a)$ es un espacio de Hilbert isométricamente isomorfo a $L^2([-\pi,\pi])$. El producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle_{H^{s,2}_w(a)}\colon H^{s,2}_w(a)\times H^{s,2}_w(a)\to\mathbb{C}$ es*

$$\begin{aligned}\langle u,v\rangle_{H^{s,2}_w(a)} &= \langle T^{-1}(u),T^{-1}(v)\rangle_{L^2([-\pi,\pi])}\\ &= \int_{-\pi}^{\pi} w(\theta)^2\mathcal{F}^{-1}\left((1+a(k^2))^{s/2}\widehat{u}(k)\right)(\theta)\overline{\mathcal{F}^{-1}\left((1+a(k^2))^{s/2}\widehat{u}(k)\right)(\theta)}\,d\theta\end{aligned}$$

2.3.1 Relaciones de inclusión del espacio $H^{s,p}_w(a)$ periódico

Proposición 2.9. *(Inclusión con el espacio L^p periódico con peso) Sea β, $s\geq 0$ con $\beta s\geq 4$ parámetros, $w\in A_p([-\pi,\pi])$ un peso de Muckenhoupt periódico y $a\in\mathcal{J}^\beta_s(\mathbb{Z})$. Entonces se cumple la inclusión*

$$H^{s,p}_w(a)\hookrightarrow L^p_w([-\pi,\pi])$$

Demostración. Sea $u\in H^{s,p}_w(a)$, entonces

$$\begin{aligned}\|u\|_{L^p_w([-\pi,\pi])} &= \left\|\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{(1+a(k^2))^{s/2}}\mathcal{F}\left[\mathcal{F}^{-1}\left((1+a(k^2))^{s/2}\widehat{u}(k)\right)\right]\right)\right\|_{L^p_w([-\pi,\pi])}\\ &\leq C_{p,w}\left\|\mathcal{F}^{-1}\left((1+a(k^2))^{s/2}\widehat{u}(k)\right)\right\|_{L^p_w([-\pi,\pi])} \qquad (2.8)\\ &= C_{p,w}\left\|w^{1/p}\mathcal{F}^{-1}\left((1+a(k^2))^{s/2}\widehat{u}(k)\right)\right\|_{L^p([-\pi,\pi])}\\ &= C_{p,w}\|u\|_{H^{s,p}_w(a)}\end{aligned}$$

donde (2.8) sigue del hecho de que la función $k\mapsto\frac{1}{(1+a(k^2))^{s/2}}$ es un multiplicador de Fourier para $L^p_w([-\pi,\pi])$ (Proposición 2.6). Por lo tanto,

$$\|u\|_{L^p_w([-\pi,\pi])}\leq C_{p,w}\|u\|_{H^{s,p}_w(a)},$$

es decir, $H^{s,p}_w(a)\hookrightarrow L^p_w([-\pi,\pi])$. $\square$

Corolario 2.2. *Sea β, $s\geq 0$ con $\beta s\geq 4$ parámetros, un peso de Muckenhoupt periódico $w\in A_p([-\pi,\pi])$ con $0<C\leq w$ para alguna constante C y una función $a\in\mathcal{J}^\beta_s([-\pi,\pi])$. Entonces se cumple la inclusión*

$$H^{s,p}_w(a)\hookrightarrow L^p([-\pi,\pi])$$

Demostración. Por la Proposición 2.9, es suficiente probar que $L^p([-\pi,\pi])\hookrightarrow L^p_w([-\pi,\pi])$. Sea

$u \in L^p([-\pi,\pi])$. Entonces

$$\begin{aligned}
\|u\|^p_{L^p([-\pi,\pi])} &= \int_{-\pi}^{\pi} |u(\theta)|^p \, d\theta \\
&\leq \int_{-\pi}^{\pi} \frac{w(\theta)}{C} |u(\theta)|^p \, d\theta \\
&= \frac{1}{C} \int_{-\pi}^{\pi} w(\theta)|u(\theta)|^p \, d\theta \\
&= \frac{1}{C} \left\| w^{1/p} u \right\|^p_{L^p([-\pi,\pi]} \\
&= \frac{1}{C} \|u\|^p_{L^p_w([-\pi,\pi])}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\|u\|_{L^p([-\pi,\pi])} \leq \frac{1}{C^{1/p}} \|u\|_{L^p_w([-\pi,\pi])}$, es decir, $L^p_w([-\pi,\pi]) \hookrightarrow L^p([-\pi,\pi])$, luego $H_w^{s,p}(a) \hookrightarrow L^p([-\pi,\pi])$. □

Proposición 2.10. *(Inclusión con el espacio potencial de Bessel periódico con peso) Sea β, $s \geq 0$ con $\beta s \geq 4$ parámetros, un peso de Muckenhoupt periódico $w \in A_p([-\pi,\pi])$ y una función $a \in \mathcal{J}_s^{\beta}([-\pi,\pi])$. Entonces, para cada $r \geq 0$, se cumple la inclusión*

$$H_w^{s_0 = s + \frac{2r}{\beta}, p}(a) \hookrightarrow H_w^{r,p}([-\pi,\pi])$$

Demostración. La demostración sigue de la Proposición 2.7 de manera análoga a la demostración del Proposición 1.22 de la Capítulo 1. □

Corolario 2.3. *Sea β, $s \geq 0$ con $\beta s \geq 4$ parámetros, $w \in A_p([-\pi,\pi])$ un peso de Muckenhoupt periódico con $0 < C \leq w$ para alguna constante C y una función $a \in \mathcal{J}_s^{\beta}([-\pi,\pi])$. Entonces, para cada $r \geq 0$, se cumple la inclusión*

$$H_w^{s + \frac{2r}{\beta}, p}(a) \hookrightarrow H^{r,p}([-\pi,\pi])$$

Demostración. Por Proposición 2.10 es suficiente probar que $H_w^{r,p}([-\pi,\pi]) \hookrightarrow H^{r,p}([-\pi,\pi])$ donde $H^{r,p}([-\pi,\pi])$ es el espacio potencial de Bessel periódico (ver Observación 2.2). Sea $u \in H_w^{s+\frac{2r}{\beta},p}(a)$. Análogamente a la demostración del Corolario 2.2, tenemos que

$$\begin{aligned}
\|u\|_{H^{r,p}([-\pi,\pi])} &= \left\| \mathcal{F}^{-1}\left((1+k^2)^{r/2} \widehat{u}(k) \right) \right\|_{L^p([-\pi,\pi])} \\
&\leq \frac{1}{C} \left\| w^{1/p} \mathcal{F}^{-1}\left((1+k^2)^{r/2} \widehat{u}(k) \right) \right\|_{L^p([-\pi,\pi])} \\
&= \frac{1}{C} \|u\|_{H_w^{r,p}([-\pi,\pi])}
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\|u\|_{H^{r,p}([-\pi,\pi])} \leq \frac{1}{C} \|u\|_{H_w^{r,p}([-\pi,\pi])},$$

es decir, $H_w^{s+\frac{2r}{\beta},p}(a) \hookrightarrow H^{r,p}([-\pi,\pi])$. Consecuentemente, $H_w^{s+\frac{2r}{\beta}}(a) \hookrightarrow H^{r,p}([-\pi,\pi])$.

□

Las dos siguientes resultados son referentes a la regularidad del espacio $H_w^{s,p}(a)$.

Proposición 2.11. *Sea β, $s \geq 0$ con $\beta s \geq 4$ parámetros, $w \in A_p([-\pi,\pi])$ un peso de Muckenhoupt con $0 < C \leq w$ para alguna constante C y $a \in \mathcal{J}_s^\beta([-\pi,\pi])$. Sea $r > 1/p$, entonces*

$$H_w^{s+\frac{2r}{\beta},p}(a) \subset \mathscr{C}^\alpha([-\pi,\pi]) \subset C^{[\alpha]^-}([-\pi,\pi])$$

donde $\alpha = r - 1/p$, $\mathscr{C}^\alpha([-\pi,\pi])$ es el espacio de Zygmund periódico y $C^{[\alpha]^-}([-\pi,\pi])$ es el espacio de Hölder donde $\alpha = [\alpha]^- + \{\alpha\}$ con $[\alpha]^-$ la parte entera de α y $0 < \{\alpha\} \leq 1$ su parte decimal. (Ver definiciones de estos espacios en [ST87, Cap. 3, Sec. 3.5.4]).

Demostración. Por Corolario 2.3, $H_w^{s+\frac{2r}{\beta},p}(a) \hookrightarrow H^{r,p}([-\pi,\pi])$. Si $r > 1/p$, por [ST87, Cap. 3, Sec. 3.5.5, Cor. (ii) con $q = 2$], obtenemos la primera inclusión $H^{r,p}([-\pi,\pi]) \subset \mathscr{C}^\alpha([-\pi,\pi])$. La segunda inclusión sigue de la definición del espacio de Zygmund periódico.

□

Corolario 2.4. *Sea β, $s \geq 0$ con $\beta s \geq 4$ parámetros, $w \in A_p([-\pi,\pi])$ un peso de Muckenhoupt periódico con $0 < C \leq w$ para alguna constante C y $a \in \mathcal{J}_{s/2}^\beta(\mathbb{Z})$. entonces se cumple la inclusión*

$$H_w^{s,p}(a) \hookrightarrow C^{[\alpha]^-}([-\pi,\pi])$$

donde $\alpha = \frac{\beta s}{4} - \frac{1}{p}$

Demostración. La demostración es un caso particular de la Proposición 2.11 con $r = \frac{\beta s}{4}$ junto con la inclusión $\mathcal{J}_{s/2}^\beta(\mathbb{Z}) \subset \mathcal{J}_s^\beta(\mathbb{Z})$ (Proposición 2.5). □

Observación 2.10. *Observemos que $H_w^{s,p}(a) \subset L^\infty([-\pi,\pi])$ cuando $\beta s \geq 4$, es decir, las funciones en el espacio $H_w^{s,p}(a)$ son acotadas al ser funciones continuas sobre el conjunto compacto $[-\pi,\pi]$.*

Teorema 2.4. *(Escala decreciente de espacios) Sea β, s_1, $s_2 \geq 0$ con $\beta(s_2 - s_1) \geq 4$, $s_1 \leq s_2$ parámetros, $w \in A_p([-\pi,\pi])$ un peso de Muckenhoupt periódico y una función $a \in \mathcal{J}_{s_2-s_1}^\beta(\mathbb{Z})$. Entonces se cumple la inclusión*

$$H_w^{s_2,p}(a) \hookrightarrow H_w^{s_1,p}(a)$$

Demostración. Sea $u \in H_w^{s_2,p}(a)$. Entonces

$$\begin{aligned}
\|u\|_{H_w^{s_1,p}(a)} &= \left\| w^{1/p}\mathcal{F}^{-1}\left((1+a(k^2))^{s_1/2}\widehat{u}(k)\right)\right\|_{L^p([-\pi,\pi])} \\
&= \left\| \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{(1+a(k^2))^{s_1/2}}{(1+a(k^2))^{s_2/2}}\mathcal{F}\left[\mathcal{F}^{-1}(1+a(k^2))^{s_2/2}\widehat{u}(k)\right]\right)\right\|_{L_w^p([-\pi,\pi])} \\
&= \left\| \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{(1+a(k^2))^{(s_2-s_1)/2}}\mathcal{F}\left[\mathcal{F}^{-1}(1+a(k^2))^{s_2/2}\widehat{u}(k)\right]\right)\right\|_{L_w^p([-\pi,\pi])} \\
&\leq C_{p,w}\left\| \mathcal{F}^{-1}\left((1+a(k^2))^{s_2/2}\widehat{u}(k)\right)\right\|_{L_w^p([-\pi,\pi])} \qquad (2.9)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= C_{p,w} \left\| w^{1/p} \mathcal{F}^{-1} \left((1 + a(k^2))^{s_2/2} \widehat{u}(k) \right) \right\|_{L^p([-\pi,\pi])} \\
&= C_{p,w} \left\| u \right\|_{H_w^{s_2,p}(a)}
\end{aligned}
$$

donde (2.9) sigue del hecho que la función $k \mapsto \frac{1}{(1+a(k^2))^{(s_2-s_1)/2}}$ es un multiplicador para el espacio $L^p_w([-\pi,\pi])$ (Proposición 2.7). Por lo tanto,

$$
\|u\|_{H_w^{s_1,p}(a)} \leq C_{p,w} \|u\|_{H_w^{s_2,p}(a)} \, ,
$$

es decir, $H_w^{s_2,p}(a) \hookrightarrow H_w^{s_1,p}(a)$. $\square$

Proposición 2.12. *(Inclusión entre pesos) Sea $\beta, s \geq 0$ parámetros con $\beta s \geq 4$, $w_1, w_2 \in A_p([-\pi,\pi])$ pesos de Muckenhoupt periódicos y una función $a \in \mathcal{J}_s^{\beta}(\mathbb{Z})$. Si $w_1 \leq w_2$, entonces se cumple la inclusión*

$$
H_{w_2}^{s,p}(a) \hookrightarrow H_{w_1}^{s,p}(a).
$$

Demostración. Sea $w_1 \leq w_2$ y $u \in H_{w_2}^{s,p}(a)$. Entonces,

$$
\begin{aligned}
\|u\|^p_{H_{w_1}^{s,p}(a)} &= \int_{-\pi}^{\pi} w_1(\theta) |\mathcal{F}^{-1}((1 + a(k^2))^{s/2} \widehat{u}(k))(\theta)|^p \, d\theta \\
&\leq \int_{-\pi}^{\pi} w_2(\theta) |\mathcal{F}^{-1}((1 + a(k^2))^{s/2} \widehat{u}(k))(\theta)|^p \, d\theta \\
&= \|u\|^p_{H_{w_2}^{s,p}(a)}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto,

$$
\|u\|_{H_{w_1}^{s,p}(a)} \leq \|u\|_{H_{w_2}^{s,p}(a)} \, ,
$$

es decir, $H_{w_2}^{s,p}(a) \hookrightarrow H_{w_1}^{s,p}(a)$. $\square$

2.4 Clase de símbolos y operadores pseudo-diferenciales periódicos

Definición 2.10. *(Clase de símbolos) Denotamos por $S^{\beta}_{s,p}([-\pi,\pi] \times \mathbb{Z})$ al conjunto de todas las funciones $\sigma_{w,a} \colon [-\pi,\pi] \times \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ definidas por*

$$
\sigma_{w,a}(\theta, k) = w(\theta)^{1/p} (1 + a(k^2))^{s/2}
$$

donde $w \in A_p([-\pi,\pi])$ es un peso de Muckenhoupt periódico y $a \in \mathcal{J}_s^{\beta}(\mathbb{Z})$. La clase $S^{\beta}_{s,p}([-\pi,\pi] \times \mathbb{Z})$ se denomina una clase de símbolos y una función $\sigma_{w,a} \in S^{\beta}_{s,p}([-\pi,\pi] \times \mathbb{Z})$ un símbolo periódico o simplemente un símbolo. La parte espacial del símbolo $\sigma_{w,a}$ viene dada por la función $\theta \mapsto w(\theta)^{1/p}$ y la parte de frecuencia, por $k \mapsto (1 + a(k^2))^{s/2}$.

Observación 2.11. *Si $a \in \mathcal{J}^{\beta}_{s/2}(\mathbb{Z})$, entonces, $a \in \mathcal{J}_s^{\beta}(\mathbb{Z})$ (Proposición 2.5). Esta observación permite considerar un símbolo $\sigma_{w,a} \in \mathcal{S}^{\beta}_{s,p}([-\pi,\pi] \times \mathbb{Z})$ proveniente de una función a desde la clase $\mathcal{J}^{\beta}_{s/2}(\mathbb{Z})$.*

Definición 2.11. *(Clase de operadores) Dado un símbolo periódico* $\sigma_{w,a} \in S^{\beta}_{s,p}([-\pi,\pi]\times\mathbb{Z})$*, definimos el operador* $A\colon D(A) \subset L^p_w([-\pi,\pi]) \to L^p([-\pi,\pi])$ *por*

$$A(u) = w^{1/p}\mathcal{F}^{-1}\left((1+a(k^2))^{s/2}\widehat{u}(\xi)\right), \quad u \in D(A)$$

con dominio $D(A) = H^{s,p}_w(a)$*. Llamamos al operador* A *el operador pseudo-diferencial periódico asociado al símbolo periódico* $\sigma_{w,a}$*.*

Observación 2.12. *El operador* A *es invertible ya que* $A = T^{-1}$ *donde* T *es el operador en Corolario 2.1.*

La siguiente definición es formal pero es útil para entender el concepto de operador pseudo-diferencial periódico como una representación en serie a partir de un símbolo.

Definición 2.12. *(Operador pseudo-diferencial periódico formal) Sea* $\sigma\colon [-\pi,\pi]\times\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ *una función. Un operador* P *definido por*

$$(P(u))(\theta) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{i\theta k}\sigma(\theta,k)\widehat{u}(k), \quad |\theta| \le \pi$$

se denomina (formalmente) un operador pseudo-diferencial periódico. La función σ *se denomina el símbolo periódico del operador* P*.*

Observación 2.13. *Notemos que* A *es un operador pseudo-diferencial periódico [Won11, Capítulo 22], [RT10]:*

$$\begin{aligned}(A(u))(\theta) &= w(\theta)^{1/p}\mathcal{F}^{-1}\left((1+a(k^2))^{s/2}\widehat{u}(k)\right)(\theta)\\ &= w(\theta)^{1/p}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{i\theta k}(1+a(k^2))^{s/2}\widehat{u}(k)\\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{i\theta k}w(\theta)^{1/p}(1+a(k^2))^{s/2}\widehat{u}(k)\\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{i\theta k}\sigma_{w,a}(\theta,k)\widehat{u}(k)\end{aligned}$$

para todo $\theta \in [-\pi,\pi]$ *y* $u \in D(A)$*. Por lo tanto*

$$(A(u))(\theta) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{i\theta k}\sigma_{w,a}(\theta,k)\widehat{u}(k), \quad |\theta| \le \pi,\ u \in D(A)$$

donde $\sigma_{w,a}$ *es un símbolo en la clase* $S^{\beta}_{s,p}([-\pi,\pi]\times\mathbb{Z})$*.*

2.5 Problema lineal y no lineal

Teorema 2.5. *(Problema lineal) Sea* $\sigma_{w,a} \in S^{\beta}_{s,p}([-\pi,\pi]\times\mathbb{Z})$ *y* A *el operador pseudo-diferencial periódico asociado al símbolo* $\sigma_{w,a}$*. Para cada* $f \in L^p([-\pi,\pi])$*, el problema lineal*

$$A(u) = f \tag{2.10}$$

tiene una única solución $u_f \in H^{s,p}_w(a)$*. Adicionalmente,* $\|u_f\|_{H^{s,p}_w(a)} = \|f\|_{L^p([-\pi,\pi])}$*.*

Demostración. Sea $f \in L^p([-\pi,\pi])$. El operador A es invertible (Observación 2.12), luego la única solución del problema (2.10) es:

$$u_f = A^{-1}(f) = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{(1+a(k^2))^{s/2}}\widehat{\left(\frac{u}{w^{1/p}}\right)}(k)\right)$$

con $u_f \in D(A) = H_w^{s,p}(a)$. Además $\|u_f\|_{H_w^{s,p}(a)} = \|A(u_f)\|_{L^p([-\pi,\pi])} = \left\|A(A^{-1}(f)\right\|_{L^p([-\pi,\pi])} = \|f\|_{L^p([-\pi,\pi])}$. □

Análogamente al Capítulo 1, mediante la solubilidad del problema lineal asociado al operador A (Teorema 2.5), estudiamos los problemas no lineales asociados al operador A mediante métodos de punto fijo.

Definición 2.13. *(Operador de Nemytskii u operador de superposición) Sea $V: [-\pi,\pi]\times\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ una función medible. El operador*

$$u \to V(\cdot,u)$$

se denomina un operador de Nemytskii u operador de superposición asociado a la función V.

Definición 2.14. *(Condición de Lipschitz global) Una función medible $V: [-\pi,\pi]\times\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ satisface la condición de Lipschitz global (en la variable y) si*

$$|V(\theta,y_2) - V(\theta,y_2)| \le |h(\theta)||y_1 - y_2|, \quad |\theta| \le \pi,\ y_1,\ y_2 \in \mathbb{R} \tag{2.11}$$

para alguna función $f \in L^\infty([-\pi,\pi])$.

Lema 2.1. *Sea β, $s \ge 0$ con $\beta s \ge 4$ parámetros, $w \in A_p([-\pi,\pi])$ un peso de Muckenhoupt periódico tal que $0 < C \le w$ para alguna constante C y una función $a \in \mathcal{J}^\beta_{s/2}([-\pi,\pi])$. Entonces se cumplen las inclusiones*

$$H_w^{s,p}(a) \hookrightarrow H_w^{\frac{\beta s}{4},p}([-\pi,\pi]) \hookrightarrow H^{\frac{\beta s}{4},p}([-\pi,\pi]) \hookrightarrow L^p([-\pi,\pi]) \tag{2.12}$$

Demostración. La demostración es análoga al Lema 1.2 del Capítulo 1. □

Proposición 2.13. *(Primer problema no lineal) Sea β, $s \ge 0$ con $\beta s \ge 4$ parámetros, $w \in A_p([-\pi,\pi])$ un peso de Muckenhoupt periódico con $0 < C \le w$ para alguna constante C, una función $a \in \mathcal{J}^\beta_s(\mathbb{Z})$ u una función medible $V : [-\pi,\pi]\times\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ satisfaciendo la condición de Lipschitz con el supuesto adicional que $V(\cdot,0) \in L^p([-\pi,\pi])$. Entonces, para cada $\delta > 0$ suficientemente pequeño, el problema no lineal*

$$A(u) = \delta V(\cdot,u) \tag{2.13}$$

tiene una única solución $u \in H_w^{s,p}(a)$.

Demostración. Como primer paso en la demostración, probaremos que el operador de Nemytskii

$$L^p([-\pi,\pi]) \to L^p([-\pi,\pi]) \colon u \mapsto V(\cdot,u)$$

está bien definido. Más precisamente, que es acotado, es decir,

$$\|V(\cdot,u)\|_{L^p([-\pi,\pi])} \le \|u\|_{L^p([-\pi,\pi])} + \|V(\cdot,0)\|_{L^p([-\pi,\pi])}.$$

Por la condición de Lipschitz global periódica (2.11) junto con la desigualdad triangular,

$$|V(\theta,y)| \le |V(\theta,y) - V(\theta,0)| + |V(\theta,0)| \le |h(\theta)||y| + |V(\theta,0)|$$

y por una desigualdad elemental[(1)] (omitiendo constantes),

$$|V(\theta,y)|^p \le |h(\theta)|^p|y|^p + |V(\theta,0)|^p,$$

se sigue que,

$$\begin{aligned}
\|V(\cdot,u)\|^p_{L^p([-\pi,\pi])} &= \int_{-\pi}^{\pi} |V(\theta,u(\theta))|^p\,dx. \\
&\le \int_{-\pi}^{\pi} \left(|h(\theta)|^p|u(\theta)|^p + |V(\theta,0)|^p\right)\,d\theta \\
&\le \|h\|^p_{L^\infty([-\pi,\pi])} \int_{-\pi}^{\pi} |u(\theta)|^p\,d\theta + \int_{-\pi}^{\pi} |V(\theta,0)|^p\,d\theta \\
&= \|h\|^p_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\|u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|V(\cdot,0)\|^p_{L^p([-\pi,\pi])},
\end{aligned}$$

así

$$\|V(\cdot,u)\|_{L^p([-\pi,\pi])} \le \|h\|_{L^\infty([-\pi,\pi])}\|u\|_{L^p([-\pi,\pi])} + \|V(\cdot,0)\|_{L^p([-\pi,\pi])}, \tag{2.14}$$

es decir, $V(\cdot,u) \in L^p([-\pi,\pi])$ cuando $u \in L^p([-\pi,\pi])$. Por lo tanto, el operador de Nemytskii está bien definido.

Como segundo paso en la demostración, probaremos que el operador lineal $R\colon H^{s,p}_w(a) \to H^{s,p}_w$ definido por $R(u) = v_u$ donde donde v_u es la única solución en $H^{s,p}_w(a)$ del problema lineal

$$A(v) = \delta V(\cdot,u), \tag{2.15}$$

está bien definido y tiene un punto fijo en el espacio $H^{s,p}_w(a)$. Sea $u \in H^{s,p}_w(a)$. Por Lema 2.1 se cumplen las inclusiones $H^{s,p}_w(a) \hookrightarrow H^{\frac{\beta s}{4},p}_w([-\pi,\pi]) \hookrightarrow H^{\frac{\beta s}{4},p}([-\pi,\pi]) \hookrightarrow L^p([-\pi,\pi])$, luego $u \in L^p([-\pi,\pi])$. Por (2.14) obtenemos que $V(\cdot,u) \in L^p([-\pi,\pi])$ y por Teorema 2.5, el problema lineal (2.15) tiene una única solución $v_u \in H^{s,p}_w(a)$. Por lo tanto, R es un operador bien definido como operador de $H^{s,p}_w(a)$ en $H^{s,p}_w(a)$. Adicionalmente el operador R es una contracción: sea u_1, $u_2 \in H^{s,p}_w(a)$, entonces

$$\begin{aligned}
\|R(u_1) - R(u_2)\|_{H^{s,p}_w(a)} &= \|v_{u_1} - v_{u_2}\|_{H^{s,p}_w(a)} \\
&= \|A(v_{u_1} - v_{u_2})\|_{L^p([-\pi,\pi])} \\
&= \|A(v_{u_1}) - A(v_{u_2})\|_{L^p([-\pi,\pi])} \\
&= \delta\,\|V(\cdot,u_1) - V(\cdot,u_2)\|_{L^p([-\pi,\pi])}
\end{aligned}$$

[(1)] $|a+b|^p \le 2^p(|a|^p + |b|^p),\ p \ge 0, a, b \in \mathbb{C}$, [Gar07, Cap. 5, Sec. 5.1]

$$
\begin{aligned}
&\leq \delta \left\| h(u_1 - u_2) \right\|_{L^p([-\pi,\pi])} && (2.16)\\
&\leq \delta \left\| h \right\|_{L^\infty([-\pi,\pi])} \left\| u_1 - u_2 \right\|_{L^p([-\pi,\pi])} && (2.17)\\
&\leq \delta \left\| h \right\|_{L^\infty([-\pi,\pi])} \left\| u_1 - u_2 \right\|_{H^{\frac{\beta s}{4},p}([-\pi,\pi])} \\
&\leq \delta \left\| h \right\|_{L^\infty([-\pi,\pi])} \left\| u_1 - u_2 \right\|_{H_w^{\frac{\beta s}{4},p}([-\pi,\pi])} \\
&\leq \delta \left\| h \right\|_{L^\infty([-\pi,\pi])} \left\| u_1 - u_2 \right\|_{H_w^{s,p}(a)} && (2.18)\\
&< \left\| u_1 - u_2 \right\|_{H_w^{s,p}(a)} && (2.19)
\end{aligned}
$$

donde (2.16) sigue de la condición de Lipschitz global (2.11), (2.17) de la desigualdad de Hölder, (2.18) de las inclusiones $H_w^{s,p}(a) \hookrightarrow H_w^{\frac{\beta s}{4},p}([-\pi,\pi]) \hookrightarrow H^{\frac{\beta s}{4},p}([-\pi,\pi]) \hookrightarrow L^p([-\pi,\pi])$ (Lema 2.1 y (2.19) se cumple cuando $0 < \delta < \frac{1}{\|h\|_{L^\infty([-\pi,\pi])}}$. Por lo tanto

$$\left\| R(u_1) - R(u_2) \right\|_{H_w^{s,p}(a)} < \left\| u_1 - u_2 \right\|_{H_w^{s,p}(a)},$$

es decir, el operador R es una contracción. Se sigue del Teorema del punto fijo de Banach [Jos05, Cap. 4, Teo. 4.7], existe una única función $u \in H_w^{s,p}(a)$ tal que $R(u) = u$, es decir, el problema no lineal (2.13) tiene una única solución en el espacio $H_w^{s,p}(a)$. □

Definición 2.15. *(Condición de Lipschitz global con peso) Sea $w \in A_p([-\pi,\pi])$ un peso de Muckenhoupt periódico. Una función $V\colon [-\pi,\pi] \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ satisface la condición de Lipschitz global con peso w (en la variable y), si*

$$|V(\theta, y_2) - V(\theta, y_2)| \leq |h(\theta)| w(\theta)^{1/p} |y_1 - y_2|, \quad |\theta| \leq \pi,\ y_1,\ y_2 \in \mathbb{R} \tag{2.20}$$

para alguna función $h \in L^\infty([-\pi,\pi])$.

Observación 2.14. *Notemos que con el peso de Muckenhoupt periódico constante $w \equiv 1$ la Definición 2.15 coincide con la Definición 2.14.*

Proposición 2.14. *(Variante del primer problema no lineal) Sea $w \in A_p([-\pi,\pi])$ un peso de Muckenhoupt periódico y una función $a \in \mathcal{J}_s^\beta(\mathbb{Z})$ y una función $V\colon [-\pi,\pi]\times\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ satisfaciendo la condición de Lipschitz global con peso w (2.20) con el supuesto adicional que $V(\cdot, 0) \in L^p([-\pi,\pi])$. Entonces, para cada $\delta > 0$ suficientemente pequeño, el problema no lineal*

$$A(u) = \delta V(\cdot, u)$$

tiene una única solución $u \in H_w^{s,p}(a)$.

Demostración. La demostración es análoga a la demostración de la variante del primer problema no lineal (Teorema 1.10) del Capítulo 1. □

Definición 2.16. *(Condiciones de crecimiento) Sea $\alpha > 1$ un parámetro. Una función medible $V\colon [-\pi,\pi] \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de clase $C^1([-\pi,\pi] \times \mathbb{R})$ satisface una condición de crecimiento si existe una función $h \in L^p([-\pi,\pi])$ de modo que*

$$|V(\theta, y)| + |\partial_\theta V(\theta, y)| \leq C_1(|h(\theta)| + |y|^\alpha), \quad |\theta| \leq \pi,\ y \in \mathbb{R} \tag{2.21}$$

$$|\partial_y V(\theta, y)| \leq C_2(1 + |y|^\alpha), \quad |\theta| \leq \pi,\ y \in \mathbb{R}, \tag{2.22}$$

para algunas constantes C_1, $C_2 > 0$.

Los siguientes lemas se prueban de manera similar a los lemas Lema 1.3, Lema 1.4 y Lema 1.5 en el Capítulo 1 con uso de las inclusiones del espacio potencial de Bessel periódico (ver [ST87, Cap. 3. Subsec. 3.5.5]).

Lema 2.2. *Sea* $\alpha > 1$, $m \geq 0$ *parámetros,* $w \in A_p([-\pi, \pi])$ *un peso de Muckenhoupt periódico tal que* $0 < C \leq w$ *para alguna constante* C. *Entonces se cumplen las inclusiones*

$$H_w^{r_\alpha+m,p}([-\pi,\pi]) \hookrightarrow H^{r_\alpha+m,p}([-\pi,\pi]) \hookrightarrow H_w^{r_\alpha,p}([-\pi,\pi]) \hookrightarrow L^{\alpha p}([-\pi,\pi])$$

donde $r_\alpha = \frac{n(\alpha-1)}{\alpha p}$

Lema 2.3. *Sea* $\alpha > 1$, $1 < p < \infty$, $m > \frac{1}{\alpha p}$ *parámetros,* $w \in A_p([-\pi, \pi])$ *un peso de Muckenhoupt periódico con* $0 < C \leq w$ *para alguna constante* C. *Entonces se cumplen las inclusiones*

$$H_w^{r_\alpha+m,p}([-\pi,\pi]) \hookrightarrow H^{r_\alpha+m,p}([-\pi,\pi]) \hookrightarrow C^{[\lambda]^-}([-\pi,\pi])$$

donde $r_\alpha = \frac{n(\alpha-1)}{\alpha p}$ *y* $\lambda = r_\alpha + m - 1/p$.

Lema 2.4. *Sea* β, $s \geq 0$ *con* $\beta s \geq 4$, $\alpha > 1$, $m \leq \frac{\beta s}{4\alpha}$ *parámetros,* $w \in A_p([-\pi, \pi])$ *un peso de Muckenhoupt periódico y* $a \in \mathcal{J}_s^\beta([-\pi, \pi])$. *Entonces se cumplen las inclusiones*

$$H_w^{s,p}(a) \hookrightarrow H_w^{r_\alpha+m,p}([-\pi,\pi])$$

donde $r_\alpha = \frac{n(\alpha-1)}{\alpha p}$

Teorema 2.6. *(Segundo problema no lineal) Sea* β, $s \geq 0$ *con* $\beta s \geq 4$, $\alpha > 1$ *parámetros,* $w \in A_p([-\pi, \pi])$ *un peso de Muckenhoupt periódico con* $0 < C \leq w$ *para alguna constante* C, *una función* $a \in \mathcal{J}_{s/2}^\beta(\mathbb{Z})$, *y una función* V *satisfaciendo las condiciones de crecimiento* (2.21)-(2.22). *Entonces el problema no lineal*

$$A(u) = V(\cdot, u) \tag{2.23}$$

tiene una solución $u \in H_w^{s,p}(a)$.

Demostración. Como primer paso en la demostración, probaremos que el operador de Nemytskii

$$H_w^{r_\alpha+m,p}([-\pi,\pi]) \to L^p([-\pi,\pi])\colon u \mapsto V(\cdot, u)$$

está bien definido. Más precisamente, que es acotado, es decir, que

$$\|V(\cdot,u)\|_{L^p([-\pi,\pi])} \leq \|h\|_{L^p([-\pi,\pi])} + \|u\|^\alpha_{H_w^{r_\alpha+m,p}([-\pi,\pi])}.$$

Sea $u \in H_w^{r_\alpha+m,p}([-\pi,\pi])$, entonces

$$\|V(\cdot,u)\|^p_{L^p([-\pi,\pi])} \leq \|h\|^p_{L^p([-\pi,\pi])} + \int_{-\pi}^{\pi} |u(\theta)|^{\alpha p}\, d\theta \tag{2.24}$$

$$
\begin{aligned}
&= \|h\|^p_{L^p([-\pi,\pi])} + \|u\|^{\alpha p}_{L^{\alpha p}([-\pi,\pi])} \\
&\leq \|h\|^p_{L^p([-\pi,\pi])} + \|u\|^{\alpha p}_{H^{r_\alpha,p}([-\pi,\pi])} \\
&\leq \|h\|^p_{L^p([-\pi,\pi])} + \|u\|^{\alpha p}_{H^{r_\alpha+m,p}([-\pi,\pi])} \\
&\leq \|h\|^p_{L^p([-\pi,\pi])} + \|u\|^{\alpha p}_{H_w^{r_\alpha+m,p}([-\pi,\pi])} \qquad (2.25)
\end{aligned}
$$

donde (2.24) sigue de la condición de crecimiento (2.21) sobre la no linealidad V y (2.25) de las inclusiones $H_w^{r_\alpha+m,p}([-\pi,\pi]) \hookrightarrow H^{r_\alpha+m,p}([-\pi,\pi]) \hookrightarrow H^{r_\alpha,p}([-\pi,\pi]) \hookrightarrow L^{\alpha p}([-\pi,\pi])$. (Lema 2.2). Por lo tanto,

$$
\|V(\cdot,u)\|_{L^p([-\pi,\pi])} \leq \|h\|_{L^p([-\pi,\pi])} + \|u\|^{\alpha}_{H_w^{r_\alpha+m,p}([-\pi,\pi])}, \qquad (2.26)
$$

es decir, $V(\cdot,u) \in L^p([-\pi,\pi])$ cuando $u \in H_w^{r_\alpha+m,p}([-\pi,\pi])$ y $h \in L^p([-\pi,\pi])$. Por lo tanto, el operador de Nemytskii está bien definido.

Como segundo paso en la demostración probaremos que el operador lineal $R\colon B_0 \to B_0$ donde

$$
B_0 = \left\{ u \in H_w^{r_\alpha+m,p}([-\pi,\pi]) : \|u\|_{H_w^{r_\alpha+m,p}([-\pi,\pi])} \leq \epsilon \right\}.
$$

(la bola de radio ϵ en el espacio $H_w^{r_\alpha+m,p}([-\pi,\pi])$) definido por $R(u) = v_u$ donde v_u es la única solución en el espacio $H_w^{s,p}(a)$ para el problema lineal

$$
A(v) = V(\cdot,u) \qquad (2.27)
$$

está bien definido. Sea $u \in B_0$, por definición, $u \in H_w^{r_\alpha+m,p}([-\pi,\pi])$ y por (2.26) obtenemos que $V(\cdot,u) \in L^p([-\pi,\pi])$ y por Teorema 2.5, el problema lineal (2.27) tiene una única solución $v_u \in H_w^{s,p}(a)$. Por lo tanto, la definición $R(u) = v_u$ es consistente, es decir, R está bien definido como operador desde el espacio B_0 a $H_w^{r_\alpha,p}([-\pi,\pi])$. Ahora probaremos que el rango del operador R está en el espacio B_0 cuando $\|h\|_{L^p([-\pi,\pi])}$ es suficientemente pequeño. Sea $u \in B_0$, entonces (omitiendo constantes)

$$
\begin{aligned}
\|R(u)\|_{H_w^{r_\alpha+m,p}([-\pi,\pi])} &= \|v_u\|_{H_w^{r_\alpha+m,p}([-\pi,\pi])} \\
&\leq \|v_u\|_{H_w^{s,p}(a)} \qquad (2.28) \\
&= \|A(v_u)\|_{L^p([-\pi,\pi])} \\
&= \|V(\cdot,u)\|_{L^p([-\pi,\pi])} \\
&\leq \|h\|_{L^p([-\pi,\pi])} + \|u\|^{\alpha}_{H_w^{r_\alpha+m,p}([-\pi,\pi])} \qquad (2.29) \\
&\leq \|h\|_{L^p([-\pi,\pi])} + \epsilon^{\alpha} \qquad (2.30) \\
&< \epsilon \qquad (2.31)
\end{aligned}
$$

donde (2.28) sigue de la inclusión $H_w^{s,p}(a) \hookrightarrow H_w^{r_\alpha+m,p}([-\pi,\pi])$, (2.29) de la desigualdad (2.26), (2.30) del supuesto $u \in B_0$ y (2.31) se cumple cuando $\|h\|_{L^p([-\pi,\pi])} \leq \epsilon - \epsilon^{\alpha}$.

Por lo tanto,

$$\|R(u)\|_{H_w^{r_\alpha+m,p}([-\pi,\pi])} \leq \epsilon$$

es decir, $R(u) \in B_0$ cuando $u \in B_0$. Por lo tanto, el operador R está bien definido como operador desde el espacio B_0 en B_0.

Como tercer paso en la demostración, observando que la bola unitaria B_0 (que es un subconjunto del espacio de Banach $H_w^{r_\alpha+m,p}([-\pi,\pi])$) es un conjunto no vacío, cerrado y convexo, probaremos mediante el Teorema del punto fijo de Schauder [AGO02, Cap. 1, Teo. 1.2.2], que el operador R tiene un punto fijo sobre el espacio B. Para este propósito, probaremos que R es un operador continuo y compacto (notemos que el rango del operador R será relativamente compacto si el operador R es compacto).

Primero probaremos la continuidad del operador R, es decir, que

$$\|R(u_1) - R(u_2)\|_{H_w^{r_\alpha+m,p}([-\pi,\pi])} \to 0 \text{ cuando } \|u_1 - u_2\|_{H_w^{r_\alpha+m,p}([-\pi,\pi])} \to 0.$$

Sea u_1, $u_2 \in B_0$. Por la linealidad del operador A, tenemos que $R(u_1) - R(u_2) = v_{u_1} - v_{u_2}$ es la única solución en $H_w^{s,p}(a)$ para el problema lineal

$$A(v) = V(\cdot, u_1) - V(\cdot, u_2),$$

entonces

$$\begin{aligned} \|R(u_1) - R(u_2)\|_{H_w^{r_\alpha+m,p}([-\pi,\pi])} &= \|v_{u_1} - v_{u_2}\|_{H_w^{r_\alpha+m,p}([-\pi,\pi])} \\ &\leq \|v_{u_1} - v_{u_2}\|_{H_w^{s,p}(a)} \qquad (2.32) \\ &= \|A(v_{u_1} - v_{u_2})\|_{L^p([-\pi,\pi])} \\ &= \|V(\cdot, u_1) - V(\cdot, u_2)\|_{L^p([-\pi,\pi])} \end{aligned}$$

donde (2.32) sigue de la inclusión $H_w^{s,p}(a) \hookrightarrow H_w^{r_\alpha+m,p}([-\pi,\pi])$. Por lo tanto

$$\|R(u_1) - R(u_2)\|_{H_w^{r_\alpha+m,p}([-\pi,\pi])} \leq \|V(\cdot, u_1) - V(\cdot, u_2)\|_{L^p([-\pi,\pi])} \tag{2.33}$$

Para estimar la expresión en la derecha de (2.33) observemos que (omitiendo constantes)

$$\begin{aligned} |V(\theta, u_1(\theta)) - V(\theta, u_2(\theta))| &= \left| \int_0^1 \partial_t \left(V(\theta, tu_1(\theta) + (1-t)u_2(\theta)) \right) dt \right| \qquad (2.34) \\ &= \left| \int_0^1 \partial_y V(\theta, tu_1(\theta) + (1-t)u_2(\theta))(u_1(\theta) - u_2(\theta))\, dt \right| \qquad (2.35) \\ &\leq |u_1(\theta) - u_2(\theta)| \int_0^1 |\partial_y V(\theta, tu_1(\theta) + (1-t)u_2(\theta))\, dt| \\ &\leq |u_1(\theta) - u_2(\theta)| \int_0^1 (1 + |tu_1(\theta) + (1-t)u_2(\theta)|^\alpha)\, dt \qquad (2.36) \\ &\leq |u_1(\theta) - u_2(\theta)| \int_0^1 (1 + |u_1(\theta)|^\alpha + |u_2(\theta)|^\alpha)\, dt \end{aligned}$$

$$= |u_1(\theta) - u_2(\theta)|(1 + |u_1(\theta)|^\alpha + |u_2(\theta)|^\alpha).$$

donde (2.34) sigue del Teorema fundamental del cálculo, (2.35) de la regla de la cadena con el supuesto de regularidad $V \in C^1([-\pi,\pi] \times \mathbb{R})$ y (2.36) de la condición (2.22) de crecimiento sobre V. Por lo tanto,

$$|V(\theta, u_1(\theta)) - V(\theta, u_2(\theta))| \leq |u_1(\theta) - u_2(\theta)| \left(1 + |u_1(\theta)|^\alpha + |u_2(\theta)|^\alpha\right) \tag{2.37}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\|V(\cdot, u_1) - V(\cdot, u_2)\|^p_{L^p([-\pi,\pi])} &= \int_{-\pi}^{\pi} |V(\theta, u_1(\theta)) - V(\theta, u_2(\theta))|^p \, d\theta \\
&\leq \int_{-\pi}^{\pi} |u_1(\theta) - u_2(\theta)|^p (1 + |u_1(\theta)|^\alpha + |u_2(\theta)|^\alpha)^p \, d\theta \qquad (2.38)\\
&\leq \int_{-\pi}^{\pi} |u_1(\theta) - u_2(\theta)|^p \left(1 + |u_1(\theta)|^{\alpha p} + |u_2(\theta)|^{\alpha p}\right) d\theta \qquad (2.39)\\
&\leq \|u_1 - u_2\|^p_{L^p([-\pi,\pi])} \left(1 + \|u_1\|^{\alpha p}_{L^\infty([-\pi,\pi])} + \|u_2\|^{\alpha p}_{L^\infty([-\pi,\pi])}\right) \qquad (2.40)
\end{aligned}$$

donde (2.38) sigue de (2.37), (2.39) de una desigualdad elemental[(2)], (2.40) de las inclusiones $H^{r_\alpha + m,p}_w([-\pi,\pi]) \hookrightarrow H^{1,p}([-\pi,\pi]) \hookrightarrow L^\infty([-\pi,\pi])$ (Lema)

$$\|V(\cdot, u_1) - V(\cdot, u_2)\|_{L^p([-\pi,\pi])} \leq \|u_1 - u_2\|_{L^p([-\pi,\pi])} \left(1 + \|u_1\|^{\alpha}_{L^\infty([-\pi,\pi])} + \|u_2\|^{\alpha}_{L^\infty([-\pi,\pi])}\right) \tag{2.41}$$

Para estimar $\|u_1 - u_2\|_{L^p([-\pi,\pi])}$ en (2.42),

$$\begin{aligned}
\|u_1 - u_2\|_{L^p([-\pi,\pi])} &\leq \|u_1 - u_2\|_{L^{\alpha p}([-\pi,\pi])} \qquad (2.42)\\
&\leq \|u_1 - u_2\|_{H^{r_\alpha,p}([-\pi,\pi])} \qquad (2.43)\\
&\leq \|u_1 - u_2\|_{H^{r_\alpha+m,p}_w([-\pi,\pi])} \qquad (2.44)
\end{aligned}$$

donde (2.42) sigue de la inclusión $L^{\alpha p}([-\pi,\pi]) \hookrightarrow L^p([-\pi,\pi])$ ya que $p < \alpha p$ debido a que el círculo $[-\pi,\pi]$ es un conjunto compacto, (2.43)-(2.44) de las inclusiones $H^{r_\alpha+m,p}_w([-\pi,\pi]) \hookrightarrow H^{r_\alpha,p}([-\pi,\pi]) \hookrightarrow L^{\alpha p}([-\pi,\pi])$ (Lema). Por lo tanto,

$$\|u_1 - u_2\|_{L^p([-\pi,\pi])} \leq \|u_1 - u_2\|_{H^{r_\alpha+m,p}_w([-\pi,\pi])} \tag{2.45}$$

Por lo tanto, a partir de (2.33),(2.37), (2.40), (2.45) obtenemos que

$$\|R(u_1) - R(u_2)\|_{H^{r_\alpha+m,p}_w([-\pi,\pi])} \leq \|u_1 - u_2\|_{H^{r_\alpha+m,p}_w([-\pi,\pi])} \left(1 + \|u_1\|^{\alpha}_{L^\infty([-\pi,\pi])} + \|u_2\|^{\alpha}_{L^\infty([-\pi,\pi])}\right),$$

se sigue que

$$\|R(u_1) - R(u_2)\|_{H^{r_\alpha+m,p}_w([-\pi,\pi])} \to 0 \text{ cuando } \|u_1 - u_2\|_{H^{r_\alpha+m,p}_w([-\pi,\pi])} \to 0,$$

es decir, el operador R es continuo.

[(2)] $|a + b|^p \leq 2^p(|a|^p + |b|^p), \; p \geq 0, a, b \in \mathbb{C}$

Para verificar que R es un operador compacto, sea $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset B_\epsilon$ sucesión acotada en $H_w^{r_\alpha+m,p}([-\pi,\pi])$, es decir, existe una constante $M>0$ tal que $\|u_k\|_{H_w^{r_\alpha+m,p}([-\pi,\pi])} \leq M$ para todo $k \in \mathbb{N}$ (uniformemente). Entonces

$$\begin{aligned}
\|R(u_k)\|_{H_w^{r_\alpha+m,p}([-\pi,\pi])} &= \|v_{u_k}\|_{H_w^{r_\alpha+m,p}([-\pi,\pi])} \\
&\leq \|v_u\|_{H_w^{s,p}(a)} && (2.46) \\
&= \|A(v_{u_k})\|_{L^p([-\pi,\pi])} \\
&= \|V(\cdot,u_k)\|_{L^p([-\pi,\pi])} \\
&\leq \|h\|_{L^p([-\pi,\pi])} + \|u\|^\alpha_{H_w^{r_\alpha+m,p}([-\pi,\pi])} && (2.47) \\
&\leq \|h\|_{L^p([-\pi,\pi])} + M^\alpha && (2.48) \\
& && (2.49)
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\|R(u_k)\|_{H_w^{r_\alpha+m,p}([-\pi,\pi])} \leq \|h\|_{L^p([-\pi,\pi])} + M^\alpha \tag{2.50}$$

es decir, la sucesión $\{R(u_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ es acotada en $H_w^{r_\alpha+m,p}([-\pi,\pi])$. Como la inclusión $H_w^{r_\alpha+m,p}([-\pi,\pi]) \hookrightarrow H^{r_\alpha,p}([-\pi,\pi]) \hookrightarrow L^{\alpha p}([-\pi,\pi])$ es compacta debido a que la última inclusión lo es por [Pir11, Sec. 2, Prop. 2.3]), la sucesión $\{R(u_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión convergente en $L^{\alpha p}([-\pi,\pi])$. Más precisamente, existe una subsucesión $\left\{R(u_{k_j})\right\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \{R(u_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $R(u_{k_j}) \to v$ en $L^{\alpha p}([-\pi,\pi])$ para algún $v \in L^{\alpha p}([-\pi,\pi])$. Por lo tanto, R es un operador compacto.

Finalmente, dado que el operador $R\colon B_0 \to B_0$ es continuo y compacto, por el Teorema del punto fijo de Schauder [AGO02, Cap. 1, Teo. 1.2.2], existe una función $u \in B_0$ tal que $R(u) = u$. Por definición del operador R, tenemos que $u \in H_w^{s,p}(a)$, es decir, el problema no lineal (2.23) tiene una solución $u \in H_w^{s,p}(a)$ cuando δ es suficientemente pequeño. $\square$

2.6 Aplicaciones

Proposición 2.15. *Sea $s \geq 2$. Para cada $f \in L^p([-\pi,\pi])$, el problema lineal*

$$|\theta|^{\gamma/p}(1-\partial_\theta^2)^{s/2}u(\theta) = f(\theta), \quad |\theta| \leq \pi \tag{2.51}$$

tiene una única solución $u_f \in H_w^{s,p}(a)$, donde $a(k) = k$ y $w(\theta) = |\theta|^\gamma$, $-1 < \gamma < p-1$.

Demostración. El operador de Bessel fraccionario viene definido vía transformada de Fourier periódica por $(1-\partial_\theta^2)^{s/2} = \mathcal{F}^{-1}\left((1+k^2)^{s/2}\widehat{u}(k)\right)$ (Ver [RLS16]), es decir, el operador pseudo-diferencial periódico $(1-\partial_\theta^2)^{s/2}$ tiene el símbolo $(1+k^2)^{s/2}$. Se sigue que el símbolo del operador en el lado izquierdo de (2.51) es $\sigma_{w,a}(\theta,k) = |\theta|^{\gamma/p}(1+k^2)^{s/2}$, es decir, $\sigma_{w,a} \in S_{s,p}^{\beta=2}([-\pi,\pi]\times\mathbb{Z})$. Por lo tanto, el operador en el lado izquierdo de (2.51) es invertible (Teorema 2.5). La única solución de (2.51) es $u_f = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{(1+k^2)^{s/2}}\widehat{\left(\frac{f}{|\theta|^{\gamma/p}}\right)}(k)\right)$ con $u_f \in H_w^{s,p}(a)$. $\square$

Observación 2.15. *El operador de Bessel entrega el siguiente isomorfismo $(I-\Delta)^{s/2} : H^{s,p}(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)$ [Haz12]. En otras palabras, para cada $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ el problema lineal $(I-\Delta)^{s/2}(u) = f$ tiene una única solución $u_f \in H^{s,p}(\mathbb{R}^n)$. En nuestro caso, Proposición 2.15 con $\alpha = 0$ (caso sin peso), el problema lineal (2.51) es una adaptación del operador de Bessel, a un contexto periódico y con coeficiente variable.*

En [BPR19] el operador $(1+(m^2-\Delta)^{\gamma/2})^{s/2}$ tiene un "símbolo" dado por $a_m(t) = (m^2+|t|)^{\gamma/2}$ y pertenece a la clase $\mathcal{G}_s^\gamma(\mathbb{R}^n)$. En nuestro caso, el operador, en un contexto periódico, es $(1+(m^2-\partial_\theta^2)^{\gamma/2})^{s/2}$. Este operador tiene coeficientes constantes, es decir, $w \equiv 1$ (caso sin peso).

Proposición 2.16. *Sea $0 < \gamma < 1$, $m \neq 0$ y $s\gamma > 4$. Para cada $f \in L^p([-\pi,\pi])$, el problema lineal*

$$(1+(m^2-\partial_\theta^2)^{\gamma/2})^{s/2}u(\theta) = f(\theta), \quad |\theta| \leq \pi \tag{2.52}$$

tiene una única solución $u_f \in H_{w\equiv 1}^{s,p}(a)$ donde $a(k) = (m^2+k)^{\gamma/2}$.

Demostración. El símbolo del operador en el lado izquierdo (2.52) es $\sigma_{w,a}(\theta,k) = (1+(m^2+k^2)^{\gamma/2})^{s/2}$, es decir, $\sigma_{w,a} \in S_{s,p}^{\beta=\gamma}([-\pi,\pi]\times\mathbb{Z})$. Por lo tanto, el operador en el lado izquierdo de (2.52), es invertible (Teorema 2.5). La única solución para (2.51) es $u_f = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{(1+(m^2+k^2)^{\gamma/2})^{s/2}}\widehat{f}(k)\right)$ con $u_f \in H_{w==1}^{s,p}(a)$. $\square$

Proposición 2.17. *Sea $s \geq 2$. El problema no lineal*

$$(1+|\theta|)^{\gamma/p}(1-\partial_\theta^2)^{s/2}u(\theta) = \delta\frac{u(\theta)}{1+\theta^2}, \tag{2.53}$$

para $|\theta| \leq \pi$ y donde $-1 < \gamma < p-1$, tiene una única solución en el espacio $H_w^{s,p}(a)$, donde $w(\theta) = (1+|\theta|)^{\alpha/p}$ y $a(k) = k$, cuando $\delta < \frac{1}{2C}$ (Acá C es la constante de la inclusión $H_w^s(a) \hookrightarrow L_w^p([-\pi,\pi])$). Más aún, la solución está en el espacio $C^{[\frac{s}{2}-1]}([-\pi,\pi])$.

Demostración. . Sea $\sigma_{w,a}(\theta,k) = w(\theta)^{1/p}(1+a(k^2))^{s/2}$ con $w(\theta) = (1+|\theta|)^{\gamma/p}$ y $a(k) = k$ Notemos que $\sigma_{w,a} \in \mathcal{S}^{\beta=2}_{s,p}([-\pi,\pi]\times\mathbb{Z})$. Todos los supuestos de **??** son satisfechos con $V(\theta,y) = \frac{y}{1+\theta^2}$

Por lo tanto, existe una única solución $u \in H^s_w(a)$ con la regularidad $u \in C^{[\frac{s}{2}-1]}([-\pi,\pi])$ por Corolario 2.4. $\square$

Capítulo 3

Problema de evolución

En este capítulo estudiamos el problema de Cauchy lineal homogéneo

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}u(t) = A(u(t)), \quad t > 0 \\ \quad u(0) = f \end{cases}$$

con condición inicial $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y A un operador pseudo-diferencial cuyo símbolo σ_a pertenece a una clase de símbolos que denotamos por $\mathcal{S}_s^{\beta,\infty}(\mathbb{R}^n)$. Posteriormente, estudiamos el problema de Cauchy no lineal

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}u(t) = A(u(t)) + V(u(t)), \quad t > 0 \\ \quad u(0) = f \end{cases}$$

con métodos de punto fijo. Este capítulo está fuertemente inspirado en el artículo [PR16].

3.1 Preliminares

Similarmente al Capítulo 1, presentamos las definiciones de multiplicadores de Fourier clásicas, es decir, sin pesos.

Definición 3.1. *(Multiplicador de Fourier) Una función $m\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ se denomina un multiplicador de Fourier para el espacio $L^p(\mathbb{R}^n)$ si el operador multiplicador de Fourier $T_m\colon S(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)$ definido por*

$$T_m(u) = \mathcal{F}^{-1}\left(m(\xi)\widehat{u}(\xi)\right),$$

donde $S(\mathbb{R}^n)$ es el espacio de Schwartz, se extiende a un operador acotado sobre $L^p(\mathbb{R}^n)$. Más precisamente (usando la misma notación T_m para la extensión),

$$\|T_m(u)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C_p \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad u \in L^p(\mathbb{R}^n)$$

para alguna constante $C_p > 0$.

Definición 3.2. *(Condición de Lizorkin) Una función $m\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ de clase $C^n(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ satisface la condición de Lizorkin si para todo multi-índice $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ con $\alpha_i = 0$ ó $\alpha_i = 1$, para todo*

$i = 1, \ldots, n$, satisface la estimación

$$\left|\xi^\alpha \partial_\xi^\alpha m(\xi)\right| \leq C, \quad \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

para alguna constante $C > 0$.

Definición 3.3. *(Condición de Lizorkin radial) Una función $m\colon [0,\infty[\to \mathbb{C}$ de clase $C^n([0,\infty[)$ satisface la condición de Lizorkin radial si para todo $1 \leq k \leq n$ satisface la estimación*

$$(1+|\xi|^2)^k \left| \partial_t^k \Big|_{t=|\xi|^2} m(t) \right| \leq C, \quad \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

para alguna constante $C > 0$.

Teorema 3.1. *(Guidetti) [Gui10, Teo. 2] Sea $m\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ una función de clase $C^n(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ tal que, si para todo multiíndice $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ con $\alpha_i = 0$ ó $\alpha_i = 1$, para todo $i = 1, \ldots, n$, satisface la estimación*

$$\left|\xi^\alpha \partial_\xi^\alpha m(\xi)\right| \leq C, \quad \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

para alguna constante $C > 0$. Entonces m es un multiplicador de Fourier para $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Observación 3.1. *Análogamente al Capítulo 1, si una función satisface la condición de Lizorkin radial, esta será un multiplicador de Fourier para $L^p(\mathbb{R}^n)$ por el Teorema 3.1.*

Los siguientes resultados permiten probar un resultado suficiente para la no negatividad de la transformada de Fourier (Teorema 3.2).

Definición 3.4. *(Función de Bernstein) [BF75, Cap. 9, Def. 9.1], [SSV12, PSZ19] Una función $u\colon [0,\infty[\to \mathbb{R}$ no negativa se denomina una función de Bernstein si es de clase $C^\infty([0,\infty[)$ y satisface el supuesto*

$$(-1)^k \partial_t^k u(t) \leq 0, \quad t \in [0,\infty[$$

para todo $k \in \mathbb{N}$ número natural.

Ejemplos de funciones de Bernstein pueden ser consultados en el capítulo 16 de la referencia [SSV12]. A continuación, presentamos dos ejemplos de funciones de Bernstein importantes en el presente trabajo.

- La función $t \mapsto t^s$, $t \in [0,\infty[$ es una función de Berstein cuando $0 \leq s \leq 1$.
- La función $t \mapsto (1+t)^s$, $t \in [0,\infty[$ es una función de Berstein cuando $0 \leq s \leq 1$

Definición 3.5. *(Función completamente monótona) [BF75, Cap. 9, Def. 9.1], [SSV12, PSZ19] Una función $u\colon [0,\infty[\to \mathbb{R}$ no negativa se denomina una función completamente monótona si es de clase $C^\infty([0,\infty[)$ y satisface el supuesto*

$$(-1)^k \partial_t^k u(t) \geq 0, \quad t \in [0,\infty[$$

para todo $k \in \mathbb{N}$ número natural.

La siguiente proposición es una relación entre funciones de Bernstein y funciones completamente monótonas.

Proposición 3.1. *(Equivalencia entre funciones de Bernstein y funciones completamente monótonas) [SSV12, Cap. 3, Teo. 3.7] Sea* $u\colon]0,\infty[\to \mathbb{R}$ *una función no negativa. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *La función* u *es una función de Bernstein*
2. *La función* e^{-tu} *es completamente monótona para todo* $t>0$*.*

Definición 3.6. *(Función definida positiva para un conjunto* J*) [PSZ19, Def. 1.1] Sea* J *un conjunto de funciones medibles y de valor real definidas sobre* $\mathbb{R}^n$*. Una función* $u\colon \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ *se denomina definida positiva para el conjunto* J *si* u *es una función par y para toda función* $h\in J$*, la integral*

$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} u(x-y)h(x)h(y)\,dx\,dy$$

existe (en el sentido de Lebesgue) y es no negativa.

Definición 3.7. *(Funciones en* L^2 *con soporte compacto esencial) [PSZ19] Denotamos por* $L^2_0(\mathbb{R}^n)$ *al conjunto de todas las funciones en* $L^2(\mathbb{R}^n)$ *con soporte compacto esencial.*

Proposición 3.2. *(Criterio para la propiedad de definida positiva para* J*) [PSZ19, Prop. 3.1] Sea* $v\colon [0,\infty[\to\mathbb{R}$ *una función completamente monótona y una función radial* $u\colon\mathbb{R}^n\to[0,\infty[$ *definida por* $u(x):=v(|x|^2)$*. Si* $u\in L^1(\mathbb{R}^n)$ *es una función integrable, entonces* u *es una función definida positiva para el conjunto* $J=L^2_0(\mathbb{R}^n)$*.*

Proposición 3.3. *(Equivalencia de la no negatividad de la transformada de Fourier) [PSZ19, Prop. 3.3] Sea* $u\in L^1(\mathbb{R}^n)$ *función integrable. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *La función* u *es definida positiva para el conjunto* $L^2_0(\mathbb{R}^n)$
2. *La transformada de Fourier de la función* u *es no negativa.*

A partir de las definiciones y resultados previos, obtenemos el siguiente teorema que será crucial en el estudio de las propiedades del núcleo fundamental del operador A (Definición 3.12).

Teorema 3.2. *(Criterio para la no negatividad de la transformada de Fourier) Sea* $u\colon[0,\infty[\to\mathbb{R}$ *una función de Bernstein. Si para cada* $t>0$ *se cumple que* $\mathrm{e}^{-tu(|\cdot|^2)}\in L^1(\mathbb{R}^n)$*, entonces la transformada de Fourier de esta función es no negativa. Más precisamente,* $\mathcal{F}\left(\mathrm{e}^{-tu(|\xi|^2)}\right)\geq 0$*.*

Demostración. Sea u una función de Bernstein. Por definición, esta es no negativa. Por Proposición 3.1, la función e^{-tu} es completamente monótona para todo $t>0$. Además, bajo el supuesto de integrabilidad $\mathrm{e}^{-tu(|\cdot|^2)}\in L^1(\mathbb{R}^n)$, se sigue de la Proposición 3.2 que la función $\mathrm{e}^{-tu(|\cdot|^2)}$ es una función definida positiva para el conjunto $J=L^2_0(\mathbb{R}^n)$. Finalmente, por Proposición 3.3, $\mathcal{F}\left(\mathrm{e}^{-tu(|\cdot|^2)}\right)\geq 0$ □

Ejemplo 1. *La función $x \mapsto u(x) = |x|^s$ es continua, definida negativa y $u(0) = 0$. Por el Teorema de Schoenberg, la función $x \mapsto \mathrm{e}^{-tu(x)}$ es definida positiva para $s \in]0, 2]$. [BF75]*

También aparece el mismo resultado mediante una clase de funciones que asegura la no negatividad de la transformada de Fourier a partir de la representación de Bessel Ver [Gne01].

3.2 Clase de funciones y multiplicadores

Definición 3.8. *(Clase de funciones) Sean β, $s \geq 0$ parámetros con $\beta s \geq 2$ y $0 \leq s \leq 2$. Denotamos por $\mathcal{J}_s^{\beta,\infty}(\mathbb{R}^n)$ al conjunto de todas las funciones medibles $a \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bajo los siguientes supuestos:*

J_1 *La función $a \colon [0, \infty[\to \mathbb{R}$ es una función de Bernstein y la funcion $t \mapsto a(t^2)$, $t \in \mathbb{R}$ es no negativa.*

J_2 *Existen constantes M, $R_0 > 0$ de modo que*

$$M(1 + |\xi|^2)^{\beta/2} \leq a(|\xi|^2), \quad |\xi| > R_0$$

J_3 *Para cada número natural $1 \leq k \leq n$, existen constantes $M_{k,s}$, $R_k > 0$ de modo que*

$$\left| \partial_t^k \Big|_{t=|\xi|^2} a(t) \right| \leq M_{k,s} a(|\xi|^2)^{kN+1}, \quad |\xi| > R_k$$

donde $N = \frac{s}{2n} - \frac{2}{\beta}$

En adelante consideramos $R = \max(R_0, R_1, \ldots, R_n)$ y las constantes M, $M_{k,s}$ son omitidas.

Proposición 3.4. *Sea $\beta = 2$. La función $a(t) = t$ está en la clase $\mathcal{J}_s^{\beta=2,\infty}(\mathbb{R}^n)$ para todo $1 \leq s \leq 2$.*

Demostración. Dado que en el Capítulo 1 ya se probó que la función $a(t) = t$ satisface los supuestos $J_1 - J_2$, solo probaremos que la función es de Bernstein. La k-ésima derivada de la función es

$$\partial_t^k a(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 1, \\ 0 & \text{si } k > 1 \end{cases}$$

entonces

$$(-1)^k \partial_t^k a(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } k = 1, \\ 0 & \text{si } k > 1 \end{cases},$$

para todo $t \in [0, \infty[$, es decir, la función $a(t) = t$ es una función de Bernstein. Por lo tanto, la función $a(t) = t$ está en la clase $\mathcal{J}_s^{\beta,\infty}(\mathbb{R}^n)$.

□

En la referencia [Len07], se estudia el problema de Cauchy para una ecuación de Schrödinger no lineal cuyo operador diferencial viene dado por la expresión formal $\sqrt{m^2-\Delta}$ cuyo símbolo es $\sigma_{s=1}(\xi)=(m^2+|\xi|^2)^{1/2}$. La clase de símbolos en este trabajo permite incluir este problema.

Proposición 3.5. *(Multiplicador general) Sea $\lambda\in\mathbb{C}$ número complejo con parte real $\Re(\lambda)>0$. Para cada $r\geq s$, la función*

$$\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}\colon \xi\mapsto\frac{1}{\lambda+(1+a(|\xi|^2))^{r/2}}$$

es un multiplicador de Fourier para $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Demostración. Solo probaremos el caso $n=1$ (la demostración general en $\mathbb{R}^n$ es análoga a la demostración de la Proposición 1.15 en el Capítulo 1). En el caso con multi-índice $\alpha=1$, y $k=1$, verificamos la condición de Lizorkin radial (Definición 3.3)

$$\begin{aligned}(1+\xi^2)\left|\partial_t|_{t=|\xi|^2}\left(\frac{1}{\lambda+(1+a(t))^{r/2}}\right)\right| &= (1+\xi^2)\left|\frac{1}{(\lambda+(1+a(\xi^2))^{r/2})^2}\right|\frac{r}{2}(1+a(\xi^2))^{r/2-1}\left|a'(\xi^2)\right|\\ &\leq C_r(1+a(\xi^2))^{\frac{2}{\beta}}\frac{1}{(1+a(\xi^2))^r}(1+a(\xi^2))^{r/2-1}(1+a(\xi^2))^{N+1} \quad (3.1)\\ &= C_r(1+a(|\xi|^2))^{\frac{2}{\beta}-r+r/2+N}\\ &= C_r(1+a(\xi^2))^{2/\beta-r/2+s/2-2/\beta}\\ &= C_r(1+a(\xi^2))^{-r/2+s/2}\\ &\leq C_r \quad (3.2)\end{aligned}$$

donde (3.1) sigue de una desigualdad elemental [1] y (3.2) del supuesto $r\geq s$. Por lo tanto,

$$(1+\xi^2)\left|\partial_t|_{t=|\xi|^2}\left(\frac{1}{\lambda+(1+a(t))^{r/2}}\right)\right|\leq C_r.$$

Análogamente se prueba que (para $1\leq k\leq n$),

$$(1+\xi^2)^k\left|\partial_t^k\Big|_{t=|\xi|^2}\left(\frac{1}{\lambda+(1+a(t))^{r/2}}\right)\right|\leq C_r,$$

es decir, la función $\frac{1}{\lambda+(1+(a(t))^{r/2}}$ satisface la condición de Lizorkin radial. Por lo tanto, la función $\xi\mapsto\frac{1}{\lambda+(1+a(|\xi|^2))^{r/2}}$ es un multiplicador de Fourier para $L^p(\mathbb{R}^n)$.

□

3.3 El espacio $H^{s,p}(a)$

Análogamente a la definición del espacio $H^{s,p}_w(a)$ en el Capítulo 1 tenemos la siguiente definición.

Definición 3.9. *(El espacio) Sea β, $s\geq 0$ con $\beta s\geq 2$, $0\leq s\leq 2$ parámetros y $a\in\mathcal{J}_s^{\beta,\infty}(\mathbb{R}^n)$.*

[1] $\frac{1}{|z+x|}\leq\frac{1}{x}$, $\quad x>0$, $z\in\mathbb{C}\colon\Re(z)>0$

Denotamos por $H^{s,p}(a)$ al espacio definido por

$$H^{s,p}(a) := \left\{ u \in L^p(\mathbb{R}^n) : \mathcal{F}^{-1}\left((1+a(|\xi|^2))^{s/2}\widehat{u}(\xi)\right) \in L^p(\mathbb{R}^n) \right\}$$

Teorema 3.3. *(Espacio de Banach) El espacio $H_w^{s,p}(a)$ con la norma $\|\cdot\|_{H_w^{s,p}(a)}$ definida por*

$$\|u\|_{H_w^{s,p}(a)} := \left\| \mathcal{F}^{-1}\left((1+a(|\xi|^2))^{s/2}\widehat{u}(\xi)\right) \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

es un espacio de Banach.

3.4 Clase de símbolos y operadores pseudo-diferenciales

Definición 3.10. *(Clase de símbolos) Denotamos por $S_s^{\beta,\infty}(\mathbb{R}^n)$ al conjunto de todas las funciones medibles $\sigma_a \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definidas por*

$$\sigma_a(\xi) = (1+a(|\xi|^2))^{s/2}$$

donde $a \in \mathcal{J}_s^{\beta}(\mathbb{R}^n)$. El conjunto $S_s^{\beta,\infty}(\mathbb{R}^n)$ se denomina una clase de símbolos y una función σ_a en $S_s^{\beta,\infty}$ se denomina un símbolo.

Proposición 3.6. *El símbolo $\sigma_a(\xi) = (1+|\xi|^2)^{s/2}$ está en la clase $S_s^{\beta=2,\infty}(\mathbb{R}^n)$ para todo $1 \le s \le 2$.*

Demostración. Se sigue del hecho de que la función $a(t) = t$ está en la clase $\mathcal{J}_s^{\beta,\infty}(\mathbb{R}^n)$ (Proposición 3.4) □

Observación 3.2. *Este símbolo aparece en la referencia [Len07]. En esta, se estudia el problema de Cauchy para una ecuación de Schrödinger no lineal cuyo operador pseudo-diferencial viene dado por $\sqrt{m^2 - \Delta}$ y cuyo símbolo es $(m^2 + |\xi|^2)^{1/2}$.*

Definición 3.11. *(Clase de operadores) Sea σ_a un símbolo en la clase $S_s^{\beta,\infty}(\mathbb{R}^n)$. Definimos el operador $A \colon D(A) \subset L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)$ por*

$$A(u) = -\mathcal{F}^{-1}\left((1+a(|\xi|^2))^{s/2}\widehat{u}(\xi)\right)$$

con dominio $D(A) = H^{s,p}(a)$. Llamamos al operador A el operador pseudo-diferencial asociado al símbolo $\sigma_{w,a}$.

Observación 3.3. *El operador pseudo-diferencial asociado al símbolo $(1+\xi^2)^{1/2}$ es $A(u) = -\mathcal{F}^{-1}\left((1+\xi^2)^{1/2}\widehat{u}(\xi)\right)$. Este operador formalmente es $(1+\partial_x^2)^{1/2}$ y es el operador estudiado en la referencia [Len07].*

3.5 Problema homogéneo, no homogéneo

3.5.1 Generador de semigrupo

En esta subsección probamos que el operador resolvente del operador A también puede ser representado vía transformada de Fourier.

Lema 3.1. *(Semiplano en el conjunto resolvente) El semiplano derecho $\{z \in \mathbb{C} \colon \Re(z) > 0\}$ está contenido en el conjunto resolvente $\rho(A)$ del operador A.*

Demostración. Sea $\lambda \in \mathbb{C}$ con $\Re(\lambda) > 0$. La función $\xi \mapsto \frac{1}{\lambda+(1+a(|\xi|^2))^{s/2}}$ es un multiplicador de Fourier para $L^p(\mathbb{R}^n)$ (Proposición 3.5) y su denominador nunca es cero. Por lo tanto, por Lema 8.1.1 en [ABHN11], $\lambda \in \rho(A)$. □

Proposición 3.7. *(Representación del operador resolvente) Sea $\lambda \in \mathbb{C}$ número complejo con parte real positiva, es decir, $\Re(\lambda) > 0$. El operador resolvente $R(\lambda, A) \colon L^p(\mathbb{R}^n) \to D(A)$ del operador A, puede ser representado por*

$$R(\lambda, A)u = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{\lambda + (1 + a(|\xi|^2))^{s/2}}\widehat{u}(\xi)\right), \quad u \in L^p(\mathbb{R}^n),\, \Re(\lambda) > 0 \tag{3.3}$$

Demostración. Como $\{z \in \mathbb{C} \colon \Re(z) > 0\} \subset \rho(A)$, (Lema 3.1). la representación en (3.3) sigue de la Observación 8.1.2 en [ABHN11]. □

En adelante denotamos $R(\lambda, A)$ por $(\lambda I - A)^{-1}$.

Corolario 3.1. *(Sobreyectividad del operador resolvente) Para cada $\lambda > 0$, el operador resolvente $(\lambda I - A) \colon D(A) \subset L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)$ es sobreyectivo.*

Demostración. Sea $\lambda > 0$ y $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Como $\lambda \in \rho(A)$, entonces $(\lambda I - A)$ es invertible y su operador inverso es la representación dada en (3.3). Por lo tanto, $u_f := (\lambda I - A)^{-1}(f) \in D(A)$ y cumple $(\lambda I - A)u_f = f$. □

Para el estudio de la disipatividad del operador A definimos el núcleo fundamental del operador A.

Definición 3.12. *(Núcleo fundamental) Sea $t > 0$. La función $P_t \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ definida por*

$$P_t(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{ix\cdot\xi}\mathrm{e}^{-t(1+a(|\xi|^2))^{s/2}}\, d\xi \tag{3.4}$$

se denomina el núcleo fundamental del operador A.

Proposición 3.8. *(Propiedades del núcleo fundamental)*

1. *Para cada $t > 0$ se cumple que $\mathrm{e}^{-t(1+a(|\cdot|^2))^{s/2}} \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$.*
2. *Para cada $t > 0$ se cumple que $\widehat{P}_t = \mathrm{e}^{-t(1+a(|\cdot|^2))^{s/2}}$.*
3. *Para cada $t > 0$ el núcleo P_t es una función radial.*
4. *Para cada $t > 0$ el núcleo P_t es de valor real. Más precisamente, para cada $t > 0$ y para todo $x \in \mathbb{R}^n$ se cumple que $P_t(x) \in \mathbb{R}$.*
5. *Para cada $t > 0$ y para todo $x \in \mathbb{R}^n$ se cumple que $\int_{\mathbb{R}^n} P_t(x)\, dx \leq 1$.*

6. *Para cada* $t_1, t_2 > 0$ *y para todo* $x, y \in \mathbb{R}^n$ *se cumple que* $\int_{\mathbb{R}^n} P_{t_1}(x-z)P_{t_2}(z-y)\,dz = P_{t_1+t_2}(x-y)$ *(Equivalentemente en notación de convolución, se cumple que* $P_{t_1} * P_{t_2} = P_{t_1+t_2}$*)*

7. $\partial_t P_t = AP_t$

8. *Para cada* $t > 0$ *y para todo* $x \in \mathbb{R}^n$ *se cumple que* $|P_t(x)| \leq \frac{1}{e^{t/2}} + \frac{1}{t^{n/2}}$.

9. *Para cada* $t > 0$ *el núcleo* P_t *es una función no negativa.*

10. *Para todo* $t > 0$ *(uniformemente) se cumple que* $\|P_t\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq 1$.

11. *Para cada* $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$*, la sucesión de funciones* $\{P_t * u\}_{t>0}$ *está contenida en* $L^p(\mathbb{R}^n)$*. Además esta sucesión converge a* u *en* $L^p(\mathbb{R}^n)$*. Más precisamente,* $\|P_t * u - u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \to 0$ *cuando* $t \to 0^+$.

Demostración.

1. Sea $t > 0$. Por el supuesto de elipticidad J_2 y del supuesto $\beta s \geq 2$ obtenemos que

$$|\xi| \leq |\xi|^{\frac{\beta s}{2}} = (|\xi|^2)^{\frac{\beta s}{4}} \leq (1+|\xi|^2)^{\frac{\beta s}{4}} \leq (1+a(|\xi|^2))^{\frac{s}{2}}, \quad |\xi| > R$$

se sigue que

$$t|\xi| \leq t(1+a(|\xi|^2))^{\frac{s}{2}}, \quad |\xi| > R \tag{3.5}$$

para todo $t > 0$ (uniformemente). Entonces

$$\begin{aligned} \left\| e^{-t(1+a(|\cdot|^2))^{s/2}} \right\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} &= \int_{|\xi|\leq R} e^{-t(1+a(|\xi|^2))^{s/2}}\,d\xi + \int_{|\xi|>R} e^{-t(1+a(|\xi|^2))^{s/2}}\,d\xi \\ &\leq \int_{|\xi|\leq R} e^{-t}\,d\xi + \int_{|\xi|>R} e^{-t|\xi|}\,d\xi \qquad (3.6) \\ &\leq C_{n,R}\frac{1}{e^t} + D_{n,R}\frac{1}{t^n} \end{aligned}$$

donde (3.6) sigue del hecho que $1 \leq (1+a(|\xi|^2))^{s/2}$ y de (3.5). Las constantes $C_{n,R} > 0$ y $D_{n,R} > 0$ son $C_{n,R} = |(\overline{B}(0,R))| = R^n|(\overline{B}(0,1))| = R^n\frac{\pi^{n/2}}{n\Gamma(n/2)}$ (la medida de Lebesgue de la bola cerrada de radio $R > 0$ con centro en el origen), $D_{n,R} = (n-1)!A_n$ (A_n es el área de la $(n-1)$-esfera unitaria $\mathbb{S}^{n-1}$) pueden ser obtenidas mediante un cambio de variable a coordenadas polares.

Por lo tanto

$$\left\| e^{-t(1+a(|\cdot|^2))^{s/2}} \right\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq C_{n,R}\frac{1}{e^t} + D_{n,R}\frac{1}{t^n}, \tag{3.7}$$

es decir, para cada $t > 0$, se cumuple que $e^{-t(1+a(|\cdot|^2))^{s/2}} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Análogamente se prueba que $e^{-t(1+a(|\cdot|^2))^{s/2}} \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

2. Sea $t > 0$. Por Propiedad 1 obtenemos que $e^{-t(1+a(|\cdot|^2))^{s/2}} \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Se sigue del Teorema de Plancherel que $P_t = \mathcal{F}^{-1}\left(e^{-t(1+a(|\cdot|^2))^{s/2}}\right) \in L^2(\mathbb{R}^n)$, luego $\widehat{P}_t = e^{-t(1+a(|\cdot|^2))^{s/2}}$.

3. La transformada de Fourier inversa de una función radial es radial ([Gra14, Apéndice B.5]).

4. La función $\mathrm{e}^{-t(1+a(|\cdot|^2))^{s/2}}$ es de valor real y par (toda función radial es par), luego su transformada de Fourier inversa también lo es ([Osg19, p. 123]).

5.
$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} P_t(x)\,dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-i(0,\ldots,0)\cdot x} P_t(x)\,dx \\
&= \widehat{P}_t(0,\ldots,0) \\
&= \mathrm{e}^{-t(1+a(|(0,\ldots,0)|^2))^{s/2}} \qquad (3.8)\\
&\leq 1
\end{aligned}
$$

donde (3.8) sigue de la propiedad 2.

6.
$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} P_{t_1}(x-z)P_{t_2}(z-y)\,dz &= \int_{\mathbb{R}^n} P_{t_1}(w)P_{t_2}(x-y-w)\,dw \\
&= (P_{t_1} * P_{t_2})(x-y) \\
&= \mathcal{F}^{-1}\left(\widehat{P_{t_1}}(\xi)\cdot\widehat{P_{t_2}}(\xi)\right)(x-y) \\
&= \mathcal{F}^{-1}\left(\mathrm{e}^{-t_1(1+a(|\xi|^2))^{s/2}}\mathrm{e}^{-t_2(1+a(|\xi|^2))^{s/2}}\right)(x-y) \\
&= \mathcal{F}^{-1}\left(\mathrm{e}^{-(t_1+t_2)(1+a(|\xi|^2))^{s/2}}\right)(x-y) \\
&= P_{t_1+t_2}(x-y)
\end{aligned}
$$

Por lo tanto
$$
\int_{\mathbb{R}^n} P_{t_1}(x-z)P_{t_2}(z-y)\,dz = P_{t_1+t_2}(x-y).
$$

7.
$$
\begin{aligned}
\widehat{\partial_t P_t}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{i\xi\cdot x}(\partial_t P_t)(x)\,dx \\
&= \partial_t \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{i\xi\cdot x} P_t(x)\,dx \\
&= \partial_t \widehat{P}_t(\xi) \\
&= \partial_t \mathrm{e}^{-t(1+a(|\xi|^2))^{s/2}} \qquad (3.9)\\
&= -(1+a(|\xi|^2))^{s/2}\mathrm{e}^{-t(1+a(|\xi|^2))^{s/2}} \\
&= -(1+a(|\xi|^2))^{s/2}\widehat{P}_t(\xi)
\end{aligned}
$$

donde (3.9) sigue de la propiedad 2. Por lo tanto,
$$
\widehat{\partial_t P_t}(\xi) = -(1+a(|\xi|^2))^{s/2}\widehat{P}_t(\xi). \qquad (3.10)
$$

Por otro lado a partir de la definición del operador A,
$$
\widehat{AP_t} = \mathcal{F}\left(-\mathcal{F}^{-1}((1+a(|\xi|^2))^{s/2}\widehat{P_t(\xi)})\right)
$$

$$= -(1 + a(|\xi|^2))^{s/2}\widehat{P}_t(\xi)$$

Por lo tanto,

$$\widehat{AP_t}(\xi) = -(1 + a(|\xi|^2))^{s/2}\widehat{P}_t(\xi) \tag{3.11}$$

Por (3.10)-(3.11) obtenemos que $\widehat{\partial_t P_t} = \widehat{AP_t}$. Aplicando la transformada de Fourier inversa concluimos que $\partial_t P_t = AP_t$.

8.

$$\begin{aligned}|P_t(x)| &= \left|\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{ix\cdot\xi}\mathrm{e}^{-t(1+a(|\xi|^2))^{s/2}}\,d\xi\right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-t(1+a(|\xi|^2))^{s/2}}\,d\xi \\ &\leq \frac{1}{\mathrm{e}^t} + \frac{1}{t^n} \qquad (3.12)\end{aligned}$$

donde (3.12) sigue de (3.7) (omitiendo constantes).

Por lo tanto,

$$|P_t(x)| \leq \frac{1}{\mathrm{e}^t} + \frac{1}{t^n}$$

9. Por propiedad 1 tenemos que $\mathrm{e}^{-t(1+a(|\cdot|^2))^{s/2}} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Por el supuesto J_1 la función $t \mapsto a(t)$ es de Bernstein y $t \mapsto (1+t)^{s/2}$ también es una función de Berstein para $0 \leq s \leq 2$. Entonces $t \mapsto (1 + a(t))^{s/2}$ también es una función de Bernstein para $0 \leq s \leq 2$ (La composición de funciones de Bernstein sigue siendo una función de Bernstein [SSV12, Coro. 3.8, (iii)]). Por lo tanto, por Teorema 3.2, $\mathcal{F}\left(\mathrm{e}^{-t(1+a(|x|^2))^{s/2}}\right) \geq 0$. Se sigue que

$$\begin{aligned}P_t(x) &= \mathcal{F}^{-1}\left(\mathrm{e}^{-t(1+a(|\xi|^2))^{s/2}}\right)(x) \\ &= \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}\left(\mathrm{e}^{-t(1+a(|\xi|^2))^{s/2}}\right)(x) \\ &= \mathcal{F}\left(\mathrm{e}^{-t(1+a(|\xi|^2))^{s/2}}\right)(-x) \\ &= \mathcal{F}\left(\mathrm{e}^{-t(1+a(|\xi|^2))^{s/2}}\right)(x) \qquad (3.13) \\ &\geq 0\end{aligned}$$

donde (3.13) sigue del hecho que P_t es una función radial (y por ende par) (propiedad 3). Por lo tanto,

$$P_t \geq 0,$$

es decir, el núcleo P_t es una función no negativa para cada $t > 0$.

10. Por la no negatividad del núcleo fundamental P_t (propiedad 9) junto con la propiedad 5,

$$\|P_t(x)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} := \int_{\mathbb{R}^n} |P_t(x)|\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} P_t(x)\,dx \leq 1.$$

Por lo tanto, $\|P_t\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq 1$ para todo $t > 0$ (uniformemente).

11. Por desigualdad de Young para convoluciones y con uso de la propiedad 10,

$$\begin{aligned}\|P_t * u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} &\leq \|P_t\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} .\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\|P_t * u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} ,$$

es decir, $P_t * u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ cuando $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ para cada $t > 0$ (uniformemente). Para verificar la convergencia, usaremos un argumento similar al utilizado en el Teorema 3.5 de la referencia [Won14]. La propiedad 2 nos permite definir para cada $t > 0$, el número finito $c_t := \int_{\mathbb{R}^n} P_t(y)\, dy = \mathrm{e}^{-t(1+a(0))^{s/2}}$. Sea $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Por la desigualdad triangular,

$$\|P_t * u - u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|P_t * u - c_t u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|(c_t - 1)u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \tag{3.14}$$

Probaremos que cada norma en la parte derecha de la ecuación (3.14) converge a 0 cuando $t \to 0^+$. Para la primera norma tenemos que

$$\begin{aligned}\|P_t * u - c_t u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |(P_t * u)(x) - u(x)|^p \, dx \right)^{1/p} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} P_t(y) u(x-y)\, dy - \left(\int_{\mathbb{R}^n} P_t(y)\, dy \right) u(x) \right|^p dx \right)^{1/p} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} (u(x-y) - u(x)) P_t(y)\, dy \right|^p dx \right)^{1/p} \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u(x-y) - u(x)|^p |P_t(y)|^p \, dx \right)^{1/p} dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |P_t(y)| \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u(x-y) - u(x)|^p \, dx \right)^{1/p} dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |P_t(tz)| \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u(x-tz) - u(x)|^p \right)^{1/p} t^n \, dz \\ &= t^n \int_{\mathbb{R}^n} |P_t(tz)| \, \|\tau_{tz} u - u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \, dz \end{aligned} \tag{3.15}$$

donde $(\tau_{tz} u)(x) := u(x - tz)$. Como $|P_t(tz)| \leq \frac{1}{\mathrm{e}^t} + \frac{1}{t^n}$ (propiedad 8), la expresión en (3.15) puede ser acotada por

$$t^n \left(\frac{1}{\mathrm{e}^t} + \frac{1}{t^n} \right) \int_{\mathbb{R}^n} \|\tau_{tz} u - u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \, dz \tag{3.16}$$

Además como $\tau_{tz} u$ converge a u en la norma $\|\cdot\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$ cuando $t \to 0^+$ (Continuidad de las traslaciones en L^p, [Won14]), se sigue del Teorema de convergencia dominada, que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \|\tau_{tz} u - u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \, dz \to 0^+ \text{ cuando } t \to 0^+. \tag{3.17}$$

Así, la expresión en (3.16) cumple que

$$\left(\frac{t^n}{\mathrm{e}^t}+1\right)\int_{\mathbb{R}^n}\|\tau_{tz}u-u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\,dz\to 0 \text{ cuando } t\to 0^+$$

Por lo tanto, $\|P_t * u - c_t u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \to 0$ cuando $t\to 0^+$.

Para la segunda norma, como $c_t - 1 \to 0$ cuando $t \to 0^+$, la sucesión de funciones medibles $\{(c_t-1)u\}_{t\geq 0}$ converge puntualmente a la función idénticamente cero. Además $|(c_t-1)u| \leq 2|u|$ ya que $|c_t|\leq 1$ donde $u\in L^p(\mathbb{R}^n)$. Por el Teorema de Convergencia Dominada, obtenemos que $\|(c_t-1)u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\to 0$ cuando $t\to 0^+$.

Por lo tanto, por (3.14),

$$\|P_t * u - u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \to 0 \text{ cuando } t\to 0^+,$$

es decir, $P_t * u$ converge a u cuando $t\to 0^+$ en la norma $\|\cdot\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$.

□

El siguiente lema y proposición son similares al al Lema 1.1 usado en la demostración de la Proposición 1.15 en el Capítulo 1.

Lema 3.2. *(Fórmula de derivadas) Sea* $[0,\infty[\to\mathbb{R}\colon t\mapsto f(t)$ *función de clase* $C^n([0,\infty])$. *La* k*-ésima derivada* $(1\leq k\leq n)$ *de la función* $\frac{f(t)}{\mathrm{e}^{f(t)}}$ *satisface la igualdad*

$$\partial_t^k\left(\frac{f(t)}{\mathrm{e}^{f(t)}}\right)=\frac{1}{\mathrm{e}^{f(t)}}\left(\sum_{j=1}^{k}\sum_{(P_{1,j},\ldots,P_{n,j})}C_jC_{(P_{1,j},\ldots,P_{n,j})}(f^{(1)}(t))^{P_{1,j}}\cdots(f^{(n)}(t))^{P_{n,j}}\right)\tag{3.18}$$

para algunas constantes C_j, $C_{(P_{1,j},\ldots,P_{n,j})}$ *no necesariamente positivas. En la igualdad* (3.18), $f^{(k)}(t)=\partial_t^k f(t)$ *y los exponentes* $P_{i,j}$ *cumplen las siguientes relaciones*

- $P_{i,j}=0$ *si* $i>k$
- $\sum_{i=1}^n iP_{i,j}=k$
- $\sum_{i=1}^n P_{i,j}=j$

Demostración. La demostración es análoga a la demostración del Lema 1.1 en el Capítulo 1. □

Proposición 3.9. *Sea* $t>0$ *fijo. La función*

$$\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}\colon \xi\mapsto\frac{(1+a(|\xi|^2))^{s/2}}{\mathrm{e}^{t(1+a(|\xi|^2))^{s/2}}}$$

es un multiplicador de Fourier para $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Lema 3.3. *Si* $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *entonces* $P_t * u \in H^{s,p}(a)$ *para cada* $t > 0$.

Demostración. Sea $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y $t > 0$. Entonces

$$\begin{aligned}
\|P_t * u\|_{H^{s,p}(a)} &= \left\| \mathcal{F}^{-1} \left((1 + a(|\xi|^2))^{s/2} \widehat{P_t * u}(\xi) \right) \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&= \left\| \mathcal{F}^{-1} \left((1 + a(|\xi|^2))^{s/2} \widehat{P}_t(\xi) \widehat{u}(\xi) \right) \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&= \left\| \mathcal{F}^{-1} \left(\frac{(1 + a(|\xi|^2))^{s/2}}{\mathrm{e}^{t(1+a(|\xi|^2))^{s/2}}} \widehat{u}(\xi) \right) \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq C_{s,t,p} \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \qquad (3.19)
\end{aligned}$$

donde (3.30) sigue del hecho de que la función $\xi \mapsto \frac{(1+a(|\xi|^2))^{s/2}}{\mathrm{e}^{t(1+a(|\xi|^2))^{s/2}}}$ es un multiplicador de Fourier para $L^p(\mathbb{R}^n)$ (Proposición 3.9). Por lo tanto,

$$\|P_t * u\|_{H^{s,p}(a)} \leq C_{s,t,p} \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

es decir, $P_t * u \in H^{s,p}(a)$ cuando $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$. □

Proposición 3.10. *(Densidad) El espacio* $H^{s,p}(a)$ *es denso en* $L^p(\mathbb{R}^n)$ *con la norma* $\|\cdot\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$.

Demostración. Sea $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$. La sucesión de funciones $\{P_t * u\}_{t>0} \subset L^p(\mathbb{R}^n)$ converge a u en la norma $\|\cdot\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$ cuando $t \to 0^+$ (propiedad 11 del núcleo fundamental). Además, por Lema 3.3, $\{P_t * u\}_{t>0} \subset H^{s,p}(a)$. Por lo tanto, el espacio $H^{s,p}(a)$ es denso en $L^p(\mathbb{R}^n)$ respecto a la norma $\|\cdot\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$. □

La siguiente definición de disipatividad corresponde al Lema 3.4.2 en [ABHN11, Cap. 3, Sec. 3.4]. Esta es equivalente a la definición de disipatividad 3.4.1 en [ABHN11, Cap. 3, Sec. 3.4].

Definición 3.13. *(Disipatividad) Sea* X *un espacio de Banach. Un operador* $A\colon D(A) \subset X \to X$ *es disipativo si*

$$\lambda \|u\|_X \leq \|(\lambda I - A)u\|_X, \quad u \in D(A),\, \lambda > 0$$

Proposición 3.11. *(Disipatividad del operador* A*) El operador* $A\colon D(A) \subset L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)$ *es disipativo.*

Demostración. Sea $\lambda > 0$ y $u \in D(A)$. Entonces $(\lambda I - A)u = f$ para algún $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Mediante el Teorema de Fubini podemos reescribir u:

$$\begin{aligned}
u(x) &= (\lambda I - A)^{-1}(\lambda I - A)u(x) \\
&= (\lambda I - A)^{-1} f(x) \\
&= \mathcal{F}^{-1} \left(\frac{1}{\lambda + (1 + a(|\xi|^2))^{s/2}} \widehat{f}(\xi) \right)(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{ix\cdot\xi} \frac{1}{\lambda + (1 + a(|\xi|^2))^{s/2}} \widehat{f}(\xi)\, d\xi
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{ix\cdot\xi} \left(\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t(\lambda+(1+a(|\xi|^2))^{s/2})}\, dt \right) \widehat{f}(\xi)\, d\xi \\
&= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{ix\cdot\xi} \mathrm{e}^{-t(1+a(|\xi|^2))^{s/2}} \widehat{f}(\xi)\, d\xi \right) dt \\
&= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}^n} P_t(x-y) f(y)\, dy \right) dt \\
&= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t\lambda} (P_t * f)(x)\, dt,
\end{aligned}
$$

es decir,

$$
u(x) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t\lambda} (P_t * f)(x)\, dt
$$

Se sigue que

$$
\begin{aligned}
\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} &= \left\| \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t\lambda} (P_t * f)(\cdot)\, dt \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t\lambda} \|(P_t * f)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\, dt \qquad (3.20) \\
&\leq \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t\lambda} \|P_t\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\, dt \qquad (3.21) \\
&\leq \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t\lambda} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\, dt \qquad (3.22) \\
&= \frac{1}{\lambda} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&= \frac{1}{\lambda} \|\lambda I - A\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}
\end{aligned}
$$

donde (3.20), (3.21), (3.22) siguen de la Desigualdad integral de Minkwoski [Fol13, 6.19 b)], [BCD11, Prop. 1.3], Desigualdad de Young [Won14, Cap. 1, Teo. 3.1] y de $\|P_t\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq 1$ (Propiedad 10 sobre el núcleo). Por lo tanto

$$
\lambda \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|\lambda I - A\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad u \in D(A),\, \lambda > 0,
$$

es decir, el operador A es disipativo.

□

Teorema 3.4. *(Generador de semigrupo fuertemente continuo) El operador $A\colon D(A) \subset L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)$ es el generador de un semigrupo fuertemente continuo sobre $L^p(\mathbb{R}^n)$.*

Demostración. El operador es densamente definido (Proposición 3.10), disipativo (Proposición 3.11) y satisface el supuesto de sobreyectividad para valores $\lambda > 0$ (Corolario 3.1). Por lo tanto, por el Teorema de Lumer-Phillips [Paz83, Teo. 4.3], el operador genera un semigrupo de contracciones fuertemente continuo. □

Teorema 3.5. *(Generador de semigrupo holomorfo y acotado) El operador A genera un semigrupo holomorfo y acotado sobre $L^p(\mathbb{R}^n)$*

Demostración. Como $\{z \in \mathbb{C} \colon \Re(z) > 0\} \subset \rho(A)$ (Lema 3.1) y similarmente a la demostración en Proposición 3.11,

$$\begin{aligned}
\left\|\lambda(\lambda I - A)^{-1} f\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} &\leq \left\|\lambda \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t\lambda}(P_t * f)(\cdot)\, dt\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq |\lambda| \frac{1}{|\lambda|} \|P_t\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\left\|\lambda(\lambda I - A)^{-1} f\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

se sigue del Corolario 3.7.12 en [ABHN11] que el operador A genera un semigrupo holomorfo y acotado sobre $L^p(\mathbb{R}^n)$. □

3.5.2 Representación del semigrupo

Representación del semigrupo

En la subsección anterior, probamos que A genera un semigrupo holomorfo, acotado y uniformemente continuo. En adelante, este semigrupo es denotado por $\{T(t)\}_{t\geq 0}$. Con esto en mente, el propósito de esta subsección es encontrar una representacion explicita de este semigrupo.

Proposición 3.12. *(Representación del semigrupo) El semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ generado por el operador A, puede ser representado por*

$$\begin{cases} (T(t))(u) = P_t * u, \quad t > 0,\ u \in L^p(\mathbb{R}^n) \\ (T(0))(u) = u, \quad u \in L^p(\mathbb{R}^n) \end{cases} \tag{3.23}$$

donde P_t es el núcleo fundamental del operador A y $P_t * u = \int_{\mathbb{R}^n} P_t(x - y)u(y)\, dy$

Demostración. Probaremos que la familia de operadores $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ (definido abajo en (3.24)) tiene las propiedades de semigrupo para concluir por unicidad que $T(t) = S(t)$, $t \geq 0$. Mediante la aplicación de la transformada de Fourier (sobre la variable espacial x) sobre el problema lineal homogéneo (3.28), obtenemos la ecuación diferencial ordinaria

$$\begin{cases} \widehat{\partial_t u}(t,\xi) = -(1 + a(|\xi|^2))^{s/2}\widehat{u}(t,\xi) \\ \quad \widehat{u}(0,\xi) = \widehat{f}(\xi) \end{cases}$$

la cual es equivalente a (mediante el factor integrante $\mathrm{e}^{t(1+a(|\xi|^2))^{s/2}}$)

$$\begin{cases} \partial_t(\widehat{u}(t,\xi)\mathrm{e}^{t(1+a(|\xi|^2))^{s/2}}) = 0 \\ \qquad\qquad\qquad \widehat{u}(0,\xi) = \widehat{f}(\xi) \end{cases}$$

cuya solución es

$$\widehat{u}(t,\xi) = \mathrm{e}^{-t(1+a(|\xi|^2))^{s/2}} \widehat{f}(\xi).$$

Por propiedades del núcleo fundamental P_t (Proposición 3.8),

$$\widehat{u}(t,\xi) = \widehat{P}_t(\xi)\widehat{f}(\xi)$$

y mediante la Transformada inversa de Fourier junto con el Teorema de convolución, la solución del problema (3.28) viene dada por

$$\begin{cases} u(t,x) = (P_t * f)(x), \quad t>0,\, x\in\mathbb{R}^n \\ u(0,x) = f(x), \quad x\in\mathbb{R}^n \end{cases}$$

esto sugiere que el semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ debe ser la representación (3.23). Para verificar este hecho, probaremos que la familia de operadores $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ actuando sobre $L^p(\mathbb{R}^n)$, definidos por

$$\begin{cases} S(t)(u) := P_t * u, \quad t>0,\, u\in L^p(\mathbb{R}^n) \\ S(0)(u) := u, \quad u\in L^p(\mathbb{R}^n) \end{cases} \tag{3.24}$$

definen un semigrupo fuertemente continuo con generador A para concluir por unicidad del semigrupo ([Paz83, Teo. 1.3]), que $S(t) = T(t)$, $t \geq 0$.

Operadores acotados: Probaremos que $\{S(t)\}_{t\geq 0} \in \mathcal{B}(L^p(\mathbb{R}^n), L^p(\mathbb{R}^n))$, es decir, que estos operadores son acotados sobre $L^p(\mathbb{R}^n)$. (De hecho, contractivos). Sea $t>0$ (el caso $t=0$ es inmediato) y $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Entonces

$$\begin{aligned} \|S(t)(u)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} &= \|P_t * u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq \|P_t\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \qquad (3.25) \\ &\leq \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \qquad (3.26) \end{aligned}$$

donde (3.25) sigue de la Desigualdad de Young para convoluciones y (3.26) de la propiedad 10 del núcleo P_t. Por lo tanto,

$$\|S(t)(u)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

es decir, $\{S(t)\}_{t\geq 0} \in \mathcal{B}(L^p(\mathbb{R}^n), L^p(\mathbb{R}^n))$ y son operadores contractivos.

Propiedad de semigrupo: Por propiedad 6 del núcleo P_t junto con el Teorema de Fubini,

$$\begin{aligned} (S(t_1+t_2)u)(x) &= (P_{t_1+t_2} * u)(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} P_{t_1+t_2}(x-y)u(y)\,dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} P_{t_1}(x-z)P_{t_2}(z-y)\,dz\right) u(y)\,dy \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R}^n} P_{t_1}(x-z) \int_{\mathbb{R}^n} (P_{t_2}(z-y)u(y)\,dy)\ dz \\
&= \int P_{t_1}(x-z)(P_{t_2} * u)(z)\,dz \\
&= (P_{t_1} * (P_{t_2} * u))(x) \\
&= (S(t_1)(P_{t_2} * u))(x) \\
&= (S(t_1)(P_{t_2} * u))(x) \\
&= (S(t_1)S(t_2)u)(x)
\end{aligned}
$$

Por lo tanto,

$$(S(t_1+t_2)u)(x) = (S(t_1)S(t_2)u)(x)$$

es decir, $S(t)$ satisface la propiedad de homomorfismo.

Propiedad de fuertemente continuo: La propiedad 11 sobre el núcleo P_t es justamente la propiedad de semigrupo fuertemente continuo ya que

$$\lim_{t\to 0^+} \|S(t)u - u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \lim_{t\to 0^+} \|P_t * u - u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = 0$$

Generador: Sea $u \in D(A)$, entonces

$$
\begin{aligned}
\partial_t(S(t)u) &= \partial_t(P_t * u) \\
&= (\partial_t P_t * u) \\
&= (AP_t * u) \\
&\xrightarrow[t\to 0^+]{\|\cdot\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}} Au
\end{aligned}
\tag{3.27}
$$

donde (3.27) sigue de la propiedad 7 sobre el núcleo P_t. Por lo tanto,

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{S(t)u - u}{t} = Au \text{ en } L^p(\mathbb{R}^n),$$

es decir, el operador A es el generador de la familia de operadores $\{S(t)\}_{t\geq 0}$.

Unicidad. Por lo anterior, la familia de operadores $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ define un semigrupo fuertemente continuo sobre $L^p(\mathbb{R}^n)$ con generador A. Por lo tanto, como el semigrupo es único ([EN00, Teo. 1.3], [Paz83, Teo. 4]), obtenemos que $T(t) = S(t)$, $t \geq 0$

□

3.6 Problema de Cauchy lineal homogéneo, lineal no homogéneo, no lineal

En esta sección estudiamos el problema de Cauchy lineal homogéneo, no homogéneo y no lineal, asociado con el operador pseudo-diferencial A con símbolo σ_a en la clase de símbolos $S_s^\infty(\mathbb{R}^n)$ y cuyo dominio es el espacio $D(A) = H^{s,p}(a)$ (Ver Definición 3.11). En adelante P_t es el núcleo fundamental del operador A (ver Definición 3.12).

Teorema 3.6. *(Problema de Cauchy lineal homogéneo: tiempo global) Para cada $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, el problema lineal*

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}u(t) = A(u(t)), \quad t > 0 \\ u(0) = f \end{cases} \tag{3.28}$$

tiene una única solución clásica $u \in C^\infty((0,\infty), X) \cap C(\mathbb{R}_+, L^p(\mathbb{R}^n)) \cap C((0,\infty), D(A))$

Demostración. Por Teorema 3.4 y Teorema 3.5, el operador A genera un semigrupo fuertemente continuo y holomorfo; luego, el resultado sigue del Corolario 3.7.21 de la referencia [ABHN11]. $\square$

Teorema 3.7. *(Problema de Cauchy lineal no homogéneo: tiempo local) Sea $g \in L^1((0,T), L^p(\mathbb{R}^n))$ para algún $T > 0$ y $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Entonces el problema de Cauchy no homogéneo*

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}u(t) = Au(t) + g(t), \quad t \in [0,T] \\ u(0) = f \end{cases} \tag{3.29}$$

tiene una única solución débil (mild) dada por la fórmula de variación de parámetros

$$u(t) = T(t)f + \int_0^t T(t-s)g(s)\,ds, \quad t > 0 \tag{3.30}$$

donde $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ es el semigrupo generado por el operador A.

Demostración. El operador A es el generador de un semigrupo holomorfo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ sobre el espacio $L^p(\mathbb{R}^n)$ (Teorema 3.5) y el dominio $D(A)$ es denso en $L^p(\mathbb{R}^n)$ (Proposición 3.10) Por lo tanto, el resultado sigue de la Proposición 3.7.22 en [ABHN11]. $\square$

Corolario 3.2. *(Continuidad de la solución débil (mild)) Sea $g \in L^1([0,T]; L^p(\mathbb{R}^n))$. Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, entonces la solución débil (mild) en (3.30) satisface la siguiente estimación*

$$\|u\|_{C([0,T];L^p(\mathbb{R}^n))} \leq (\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|g\|_{L^1([0,T];L^p(\mathbb{R}^n))}) \tag{3.31}$$

Demostración. A partir de la solución débil (mild) (3.30), de las propiedades del núcleo fundamental P_t junto con el semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ y notando que $T(t)f = P_t * f$, $T(t-r)g(r) = P_{t-r}g(r)$ tenemos que

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} &\leq \|P_t * f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \int_0^t \|P_{t-r} * g(r)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\,dr \\ &\leq \|P_t\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \int_0^t \|P_{t-r}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\|g(r)\|_{L^p(\mathbb{R}^n}\,dr \\ &\leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \int_0^t \|g(r)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\,dr \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\|u(t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \int_0^t \|g(r)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \, dr \tag{3.32}$$

Por definición, una solución débil (mild) tiene la regularidad $u \in C(\mathbb{R}_+; L^p(\mathbb{R}^n))$ ([ABHN11, Pt. 1, Cap. 3, Def. 3.1.1]), entonces se sigue de (3.36) que

$$\|u\|_{C([0,T];L^p(\mathbb{R}^n))} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|g\|_{L^1([0,T];L^p(\mathbb{R}^n))}$$

□

Definición 3.14. *(Condición de Lipchitz local) El operador de Nemytskii $u \mapsto V(u)$ (la no linealidad) satisface la condición de Lipchitz local si para cada bola $B \subset L^p(\mathbb{R}^n)$ existe una constante $L_B > 0$ de modo que se satisface la estimación*

$$\|V(u_1) - V(u_2)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq L_B \|u_1 - u_2\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad u_1, u_2 \in B \tag{3.33}$$

junto con el supuesto $V(0) = 0$.

Teorema 3.8. *(Problema no lineal: tiempo local) Sea $u \mapsto V$ el operador de Nemytskii bajo la condición de Lipschitz local (3.35). Para cada $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, el problema de Cauchy no lineal*

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} v(t) = Av(t) + V(u(t)), & t > 0 \\ u(0) = f \end{cases} \tag{3.34}$$

tiene una única solución débil (mild) $u \in C([0,T]; L^p(\mathbb{R}^n))$ para algún $T > 0$.

Demostración. Como primer paso en la demostración, probaremos que para cada bola $B \subset L^p(\mathbb{R}^n)$, el operador de Nemytskii $B \to L^p(\mathbb{R}^n)\colon u \mapsto V(u)$ está bien definido. Sea $u \in B$. Por condición de Lipchitz local (3.35) junto con la desigualdad triangular tenemos que

$$\begin{aligned} \|V(u)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} &\leq \|V(u) - V(0)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|V(0)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq L_B \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\|V(u)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq L_B \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad u \in B \tag{3.35}$$

es decir, $V(u) \in L^p(\mathbb{R}^n)$ cuando $u \in B$.

Como segundo paso en la demostración, dado $T > 0$ fijo pero arbitrario (un tiempo local), probaremos que el operador $R\colon B_T \to B_T$ donde

$$B_T = \left\{ u \in C([0,T]; L^p(\mathbb{R}^n))\colon \|u\|_{C([0,T];L^p(\mathbb{R}^n))} \leq 4 \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \right\}$$

definido por $R(u) = v_u$ donde v_u es la única solución débil (mild) del problema de Cauchy lineal no homogéneo

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}v(t) = A(v(t)) + V(u), & t > 0 \\ v(0) = f, \end{cases} \tag{3.36}$$

está bien definido. Para verificar este hecho notemos que $V(u) \in L^1([0,T]; L^p(\mathbb{R}^n))$ cuando $u \in B_T$: sea $u \in B_T$, entonces

$$\begin{aligned} \|V(u)\|_{L^1([0,T);L^p(\mathbb{R}^n))} &= \int_0^T \|V(u(r))\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\, dr \\ &\leq \int_0^T L_B\, \|u(r)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\, dr \qquad (3.37) \\ &\leq L_B T\, \|u\|_{C([0,T];L^p(\mathbb{R}^n))} \qquad (3.38) \end{aligned}$$

donde (3.37) sigue de (3.35) y (3.38) del supuesto $u \in B_T$. Por Teorema 3.7 el problema de Cauchy lineal no homogéneo (3.38) tiene una única solución débil (mild) $v_u \in C([0,T]; L^p(\mathbb{R}^n))$ dada por la fórmula de variación de parámetros

$$v_u(t) = T(t)f + \int_0^t T(t-s)V(u(r))\, dr, \quad t > 0$$

Por lo tanto, la definición $R(u) = v_u$ está bien definida.

Como tercer paso en la demostración probaremos que R está bien definido como operador de B_T en B_T para algún tiempo $T > 0$. Por la estimación (3.32) en Corolario 3.2, tenemos que

$$\begin{aligned} \|R(u)\|_{C([0,T];L^p(\mathbb{R}^n))} &\leq (\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|V(u)\|_{L^1([0,T];L^p(\mathbb{R}^n))} \\ &\leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + 2L_B T\, \|u\|_{C([0,T];L^p(\mathbb{R}^n))} \\ &\leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + 2L_B T\, \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\ &= (1 + 2L_B T)\, \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq 2\, \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \qquad (3.39) \end{aligned}$$

donde (3.39) se cumple con el tiempo $T = \frac{1}{2L_B}$. Por lo tanto, el operador R está bien definido.

Como cuarto paso en la demostración, probaremos que el operador R es una contracción con el tiempo $T = \frac{1}{2L_B}$. En efecto,

$$\begin{aligned} \|R(u_1) - R(u_2)\|_{C([0,T];L^p(\mathbb{R}^n))} &\leq \|V(u_1) - V(u_2)\|_{L^1([0,T];L^p(\mathbb{R}^n))} \\ &\leq L_B T\, \|u_1 - u_2\|_{C([0,T];L^p(\mathbb{R}^n))} \\ &< \frac{1}{2}\, \|u_1 - u_2\|_{C([0,T];L^p(\mathbb{R}^n))} \end{aligned}$$

Por lo tanto, por el Teorema del punto fijo de Banach, existe una única función $u \in B_T$ tal que $R(u) = u$, es decir, el problema de Cauchy no lineal (3.34) tiene una única solución débil (mild)

$u \in C([0,T]; L^p(\mathbb{R}^n))$ dada por

$$u(t) = T(t)f + \int_0^t T(t-s)V(u(s))\,ds, \quad t > 0$$

□

Corolario 3.3. *(Continuidad de la solución débil (mild)) Sea* $g \in L^1([0,T]; H^{s,p}(a))$. *Si* $f \in H^{s,p}(a)$ *entonces la solución débil (mild) satisface la siguiente estimación*

$$\|u\|_{C([0,T];H^{s,p}(a))} \leq \|f\|_{H^{s,p}(a)} + \|g\|_{L^1([0,T];H^{s,p}(a))} \tag{3.40}$$

Demostración. A partir de la solución débil (mild), y por propiedades del núcleo fundamental P_t junto con el semigrupo $T(t)$, tenemos que $T(t)f = P_t * f$, $T(t-r)g(r) = P_{t-r} * g(r)$. Entonces

$$\|u(t)\|_{H^{s,p}(a))} \leq \|P_t * f\|_{H^{s,p}(a)} + \int_0^t \|P_{t-r} * g(r)\|_{H^{s,p}(a)}\,dr \tag{3.41}$$

Para estimar la primera norma en (3.41)

$$\begin{aligned}
\|P_t * f\|_{H^{s,p}(a)} &= \left\|\mathcal{F}^{-1}\left((1+a(|\xi|^2))^{s/2}\widehat{P_t * f}(\xi)\right)\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&= \left\|\mathcal{F}^{-1}\left((1+a(|\xi|^2))^{s/2}\widehat{P}_t(\xi)\widehat{f}(\xi)\right)\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&= \left\|\mathcal{F}^{-1}\left(\widehat{P}_t(\xi)\right) * \mathcal{F}^{-1}\left((1+a(|\xi|^2))^{s/2}\widehat{f}(\xi)\right)\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&= \left\|P_t * \mathcal{F}^{-1}\left((1+a(|\xi|^2))^{s/2}\widehat{f}(\xi)\right)\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq \|P_t\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\left\|\mathcal{F}^{-1}\left((1+a(|\xi|^2))^{s/2}\widehat{f}(\xi)\right)\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&= \|P_t\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\|f\|_{H^{s,p}(a)} \\
&\leq \|f\|_{H^{s,p}(a)}
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\|P_t * f\|_{H^{s,p}(a)} \leq \|f\|_{H^{s,p}(a)} \tag{3.42}$$

y para la segunda norma,

$$\begin{aligned}
\int_0^t \|P_{t-r} * g(r)\|_{H^{s,p}(a)}\,dr &= \int_0^t \left\|\mathcal{F}^{-1}\left((1+a(|\xi|^2))^{s/2}\widehat{P_{t-r} * g}(r)(\xi)\right)\right\|_{H^{s,p}(a)}\,dr \\
&= \int_0^t \left\|\mathcal{F}^{-1}\left((1+a(|\xi|^2))^{s/2}\widehat{P_{t-r}}(\xi)\widehat{g(r)}(\xi)\right)\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\,dr \\
&= \int_0^t \left\|\mathcal{F}^{-1}\left(\widehat{P}_t(\xi)\right) * \mathcal{F}^{-1}\left((1+a(|\xi|^2))^{s/2}\widehat{g(r)}(\xi)\right)\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\,dr \\
&= \int_0^t \left\|P_{t-r} * \mathcal{F}^{-1}\left((1+a(|\xi|^2))^{s/2}\widehat{g(r)}(\xi)\right)\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\,dr \\
&\leq \int_0^t \|P_{t-r}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\left\|\mathcal{F}^{-1}\left((1+a(|\xi|^2))^{s/2}\widehat{g(r)}(\xi)\right)\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\,dr
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^t \|P_{t-r}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \|g(r)\|_{H^{s,p}(a)} \, dr \\
&\leq \int_0^t \|g(r)\|_{H^{s,p}(a)} \, dr
\end{aligned}
$$

Por lo tanto

$$\int_0^t \|P_{t-r} * g(r)\|_{H^{s,p}(a)} \, dr \leq \int_0^t \|g(r)\|_{H^{s,p}(a)} \, dr \tag{3.43}$$

Se sigue de (3.41), (3.42) y (3.43) que

$$\|u(t)\|_{H^{s,p}(a))} \leq \|f\|_{H^{s,p}(a)} + \int_0^t \|g(s)\|_{H^{s,p}(a)} \, dr$$

Por definición, una solución débil (mild) tiene la regularidad $u \in C([0,T]; L^p(\mathbb{R}^n))$ y $H^{s,p}(a) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$. Por lo tanto,

$$\|u\|_{C([0,T];H^{s,p}(a))} \leq \|f\|_{H^{s,p}(a)} + \|g\|_{L^1([0,T];H^{s,p}(a))} \, .$$

□

Definición 3.15. *(Condición de Lipchitz local sobre $H^{s,p}(a)$) El operador de Nemytskii (la no linealidad) satisface la condición de Lipchitz local (sobre $H^{s,p}(a)$) si para cada bola $B \subset H^{s,p}(a)$ existe una constante $L_B > 0$ de modo que se satisface la estimación*

$$\|V(u_1) - V(u_2)\|_{H^{s,p}(a)} \leq L_B \|u_1 - u_2\|_{H^{s,p}(a)} \, , \quad u_1, \, u_2 \in B \tag{3.44}$$

y además $V(0) = 0$.

Teorema 3.9. *(Problema no lineal: solución en tiempo local) Sea $u \mapsto V$ el operador de Nemytskii bajo la condición de Lipschitz local (3.44). Para cada $f \in H^{s,p}(a)$, el problema de Cauchy no lineal*

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} v(t) = Av(t) + V(u(t)), & t > 0 \\ u(0) = f \end{cases} \tag{3.45}$$

tiene una única solución débil (mild) $u \in C([0,T]; H^{s,p}(a))$ para algún $T > 0$.

Demostración. Como primer paso en la demostración, probaremos que, para cada bola $B \subset H^{s,p}(a)$, el operador de Nemytskii $B \to L^p(\mathbb{R}^n)$: $u \mapsto V(u)$ está bien definido, es decir, que $V(u) \in L^p(\mathbb{R}^n)$ cuando $u \in B$. Sea $u \in B$. Por condición de Lipschitz local sobre $H^{s,p}(a)$ ((3.44)) junto con la desigualdad triangular tenemos que

$$
\begin{aligned}
\|V(u)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} &\leq \|V(u) - V(0)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|V(0)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq L_B \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto,

$$\|V(u)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \, , \quad u \in B \tag{3.46}$$

es decir, $V(u) \in L^p(\mathbb{R}^n)$ cuando $u \in B$.

Como segundo paso en la demostración, dado $T > 0$ fijo pero arbitrario (un tiempo local), probaremos que el operador $R\colon B_T \to B_T$ donde

$$B_T = \left\{ u \in C([0,T]; H^{s,p}(a))\colon \; \|u\|_{C([0,T];H^{s,p}(a))} \leq 2\,\|f\|_{H^{s,p}(a)} \right\}$$

definido por $R(u) = v_u$ donde v_u es la única solución débil (mild) del problema de Cauchy lineal no homogéneo

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}v(t) = A(v(t)) + V(u(t)), \quad t > 0 \\ \quad v(0) = f, \end{cases} \tag{3.47}$$

está bien definido. Para verificar este hecho, notemos que $V(u) \in L^1([0,T]; H^{s,p}(a))$ cuando $u \in B_T$:

$$\begin{aligned} \|V(u)\|_{L^1([0,T);L^p(\mathbb{R}^n))} &= \int_0^T \|V(u(r))\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\, dr \\ &\leq \int_0^T L_B \,\|u(r)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\, dr \qquad (3.48) \\ &\leq L_B T \,\|u\|_{C([0,T];L^p(\mathbb{R}^n))} \qquad (3.49) \end{aligned}$$

donde (3.48) sigue de (3.46) y (3.49) del hecho de que $u \in B_T$. Por Teorema 3.7, el problema de Cauchy lineal no homogéneo (3.47) tiene una única solución débil (mild) $v_u \in C([0,T]; L^p(\mathbb{R}^n))$ dada por la fórmula de variación de parámetros

$$v_u(t) = T(t)f + \int_0^t T(t-s)V(u(r))\, dr, \quad t > 0 \tag{3.50}$$

Por lo tanto, la definición $R(u) = v_u$ está bien definida.

Como tercer paso, probaremos que R está bien definido como operador de B_T en B_T para algún tiempo $T > 0$. Por la estimación (3.32) en Corolario 3.2, tenemos que

$$\begin{aligned} \|R(u)\|_{C([0,T];L^p(\mathbb{R}^n))} &\leq (\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|V(u)\|_{L^1([0,T];L^p(\mathbb{R}^n))}) \\ &\leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + 2L_B T\,\|u\|_{C([0,T];L^p(\mathbb{R}^n))} \\ &\leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + 2L_B T\,\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\ &= (1 + 2L_B T)\,\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq 2\,\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \qquad (3.51) \end{aligned}$$

donde (3.51) se cumple con el tiempo $T = \frac{1}{2L_B}$. Por lo tanto, el operador R está bien definido.

Como cuarto paso en la demostración, probaremos que el operador R es una contraccion con el tiempo $T = \frac{1}{2L_B}$. En efecto,

$$\begin{aligned}\|R(u_1) - R(u_2)\|_{C([0,T];L^p(\mathbb{R}^n))} &\leq \|V(u_1) - V(u_2)\|_{L^1([0,T];L^p(\mathbb{R}^n))} \\ &\leq L_B T \|u_1 - u_2\|_{C([0,T];L^p(\mathbb{R}^n))} \\ &< \frac{1}{2} \|u_1 - u_2\|_{C([0,T];L^p(\mathbb{R}^n))}\end{aligned}$$

Por lo tanto, por el Teorema del punto fijo de Banach, existe una única función $u \in B_T$ tal que $R(u) = u$, es decir, el problema de Cauchy no lineal (3.53) tiene una única solución débil (mild) $u \in C([0,T]; L^p(\mathbb{R}^n)$ dada por

$$u(t) = T(t)f + \int_0^t T(t-s)V(u(s))\, ds, \quad t > 0 \tag{3.52}$$

□

Teorema 3.10. *(Problema no lineal: solución en tiempo local) Sea $u \mapsto V$ el operador de Nemytskii bajo la condición de Lipschitz local. Para cada $f \in H^{s,p}(a)$, el problema de Cauchy no lineal*

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}v(t) = Av(t) + V(u(t)), & t > 0 \\ u(0) = f \end{cases} \tag{3.53}$$

tiene una única solución débil (mild) $u \in C([0,T]; H^{s,p}(a))$ para algún $T > 0$.

Demostración. Como primer paso en la demostración, probaremos que, para cada bola $B \subset H^{s,p}(a)$, se cumple que $V(u) \in H^{s,p}(a)$ cuando $u \in B$. Por la desigualdad triangular con el supuesto $V(0) = 0$,

$$\begin{aligned}\|V(u)\|_{H^{s,p}(a)} &\leq \|V(u) - V(0)\|_{H^{s,p}(a))} + \|V(0)\|_{H^{s,p}(a)} \\ &\leq L_B \|u\|_{H^{s,p}(a)}\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\|V(u)\|_{H^{s,p}(a)} \leq \|u\|_{H^{s,p}(a)}, \quad u \in B \tag{3.54}$$

es decir, $V(u) \in H^{s,p}(a)$ cuando $u \in B$

Como segundo paso en la demostración, dado $T > 0$ fijo pero arbitrario (un tiempo local), probaremos que el operador $R\colon B_T \to B_T$ donde

$$B_T = \left\{ u \in C([0,T]; H^{s,p}(a)) \colon \|u\|_{C([0,T];H^{s,p}(a))} \leq 2\|f\|_{H^{s,p}(a)} \right\}$$

definido por $R(u) = v_u$ donde v_u es una solución del problema lineal (con $V(u)$, $f \in H^{s,p}(a)$)

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}v = A(v) + V(u), & t > 0 \\ v(0) = f \end{cases} \tag{3.55}$$

está bien definido. Para verificar este hecho, primero, notemos que $V(u) \in L^1([0,T]; H^{s,p}(a))$. En efecto,

$$\begin{aligned}
\|V(u)\|_{L^1([0,T);H^{s,p}(a))} &= \int_0^T \|V(u(r))\|_{H^{s,p}(a)}\, dr \\
&\leq \int_0^T L_B \|u(s)\|_{H^{s,p}(a)}\, dr \\
&\leq L_B T \|u\|_{C([0,T];H^{s,p}(a))}
\end{aligned}$$

Por (), el problema (3.55) tiene una única solución débil (mild) $u \in C([0,T]; H^{s,p}(a))$ dada por

$$u(t) = T(t)f + \int_0^t T(t-s)V(u(s,x))\, ds, \quad t > 0$$

Sea $u \in B_T$, entonces

$$\begin{aligned}
\|R(u)\|_{C([0,T];L^p(\mathbb{R}^n)} &\leq (\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|V(u)\|_{L^1([0,T];L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + L_B T \|u\|_{C([0,T];L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + L_B T \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&= (1 + L_B T) \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq 4 \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \qquad (3.56)
\end{aligned}$$

donde (3.56) se satisface con el tiempo $T = \frac{1}{4L_B}$. Por lo tanto, el operador R está bien definido.

Como tercer paso en la demostración probaremos que el operador R es una contracción:

$$\begin{aligned}
\|R(u_1) - R(u_2)\|_{C([0,T];L^p(\mathbb{R}^n))} &\leq \|V(u_1) - V(u_2)\|_{L^1([0,T];L^p(\mathbb{R}^n))} \\
&\leq L_B T \|u_1 - u_2\|_{C([0,T];L^p(\mathbb{R}^n))} \\
&< \|u_1 - u_2\|_{C([0,T];L^p(\mathbb{R}^n))} \qquad (3.57) \\
& \qquad (3.58)
\end{aligned}$$

donde (3.57) se satisface con el tiempo $T = \frac{1}{L_B}$. Por lo tanto, por el Teorema del punto fijo de Banach, existe una única función $u \in B_T$ tal que $R(u) = u$, es decir, el problema de Cauchy no lineal (3.53) tiene una única función $u \in C([0,T]; L^p(\mathbb{R}^n)$ dada por

$$u(t) = T(t)f + \int_0^t T(t-s)V(u(s))\, ds, \quad t > 0$$

□

Capítulo 4

Problemas o preguntas abiertas

Estudiar un operador de coeficiente variable cuyo símbolo no sea de variables separadas.

Sobre el Capítulo 1:

1. Conocida es la inclusión de Sobolev acerca de la regularidad,

$$H^{s,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C^{\alpha}(\mathbb{R}^n) \cap L^{\infty}(\mathbb{R}^n)$$

   donde $\alpha = s - n/p$.

   Si $w \in A_p(\mathbb{R}^n)$ es un peso de Muckenhoupt. ¿La inclusión

$$H^{s,p}_w(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C^{\alpha}(\mathbb{R}^n) \cap L^{\infty}(\mathbb{R}^n)$$

   también es válida?

2. ¿Es posible desprenderse del supuesto $0 < C \leq w$ para obtener resultados similares?

3. ¿Es posible desarrollar una teoría similar con símbolos de la forma $\sigma_{w,a} = w^{1/p}a(|\xi|^{2s/2}$, en vez de $w^{1/p}(1 + a(|\xi|^2))^{s/2}$?. Más aún, ¿para símbolos no radiales?

4. ¿Es posible estudiar el caso con $p = 2$ con algún resultado de tipo "Teorema de Plancherel con peso"?

5. ¿Es posible realizar el estudio con símbolos más generales?, es decir, con símbolos no necesariamente de variables separadas.

Sobre el Capítulo 2:

1. Mismas preguntas del Capítulo 1 adaptadas al caso periódico.

2. ¿Es posible realizar un estudio sin el uso del método de transferencia?

Sobre el Capítulo 3:

1. ¿Es posible estudiar el problema de evolución

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}u(t) = A(u(t)), \quad t > 0 \\ u(0) = f \end{cases}$$

para un operador A de coeficiente variable?

Bibliografía

[Abe12] H. Abels, Pseudo-differential and Singular Integral Operators: An Introduction with Applications (De Gruyter, Berlin; Boston, 2012).

[AGO02] Agarwal RP, Grace SR, O'Regan D. Oscillation Theory for Second Order Linear, Half-Linear, Superlinear and Sublinear Dynamic Equations [Internet]. Dordrecht: Springer Netherlands; 2002 [cited 2024 Aug 25]. Available from: http://link.springer.com/10.1007/978-94-017-2515-6

[AC92] P. Auscher, and M. Carro, "On relations between operators on $\mathbb{R}^N$, $[0, 2\pi]^N$ and $\mathbb{Z}^N$," Studia Mathematica (1992) 101(2), 165–182 (1992).

[AM08] K.F. Andersen, P. Mohanty, Restriction and Extension of Fourier Multipliers between Weighted Spaces on , (2008).

[ABHN11] W. Arendt, C.J.K. Batty, M. Hieber, and F. Neubrander, Vector-Valued Laplace Transforms and Cauchy Problems: Second Edition (Springer Basel, Basel, 2011). .

[BCD11] H. Bahouri, J.-Y. Chemin, and R. Danchin, Fourier Analysis and Nonlinear Partial Differential Equations (Springer, Heidelberg New York Dordrecht London, 2011).

[BGH19] B. Barraza Martínez, J. González Ospino, and J. Hernández Monzón, Vector-Valued Function and Distribution Spaces on the Torus (Universidad del Norte, Barranquilla, Columbia, 2019).

[BPR19] Bravo, Prado, Reyes Nonlinear pseudo-differential equations defined by elliptic symbols on $L^p(\mathbb{R})$ and the fractional Laplacian (2019)

[BO13] A. Benyi, and T. Oh, "The Sobolev inequality on the torus revisited," Publ. Math. Debrecen 83(3), 359–374 (2013).

[BF75] C. Berg, and G. Forst, Potential Theory on Locally Compact Abelian Groups (Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 1975).

[BG03] E. Berkson, T.A. Gillespie, On restrictions of multipliers in weighted settings, Indiana Univ. Math. J. 52 (2003) 0–0. https://doi.org/10.1512/iumj.2003.52.2368.

[Ber21] E. Berkson, "Periodization, Transference of Muckenhoupt Weights, and Automatic Tight Norm Estimates for the Periodic Hilbert Transform," J Geom Anal 31(9), 8780–8831 (2021).

[BV13] O. Blasco, and P. Villarroya, "Transference of Vector-valued Multipliers on Weighted L p -spaces," Can. j. Math. 65(3), 510–543 (2013).

[BT92] V. I. Burenkov, M. Sh. Tuyakbaev, "On Fourier integral multipliers in weighted Lp -spaces with an exponential weight. II", Investigations in the theory of differentiable functions of many variables and its applications. Part 16, Trudy Mat. Inst. Steklov., 204, Nauka, Moscow, 1993, 81–112; Proc. Steklov Inst. Math., 204 (1994), 69–96

[DG24] S. Douglas, and L. Grafakos, "Weighted Kato–Ponce inequalities for multiple factors," Mathematische Nachrichten n/a(n/a), 2024.

[Cam22] P. Campos, "Bessel Potentials and Lions-Calderón Spaces," Boletim Da Sociedade Portuguesa de Matemática Número 80 (Dezembro 2022), (2022).

[CPR16] M. Carlsson, H. Prado, and E.G. Reyes, "Differential Equations with Infinitely Many Derivatives and the Borel Transform," Ann. Henri Poincaré 17(8), 2049–2074 (2016).

[CW12] Coifman and Weiss Transference Methods in Analysis (published for the Conference Board of the Mathematical Sciences by the American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2012).

[Chr10] O. Christensen, Functions, Spaces, and Expansions: Mathematical Tools in Physics and Engineering (Birkhäuser, Boston, Mass, 2010).

[DM05] L. Debnath, and P. Mikusiński, Hilbert Spaces with Applications, 3rd. ed (Elsevier Academic Press, Amsterdam; Boston, 2005).

[DI19] B. Dyda, L. Ihnatsyeva, J. Lehrbäck, H. Tuominen, and A.V. Vähäkangas, "Muckenhoupt Ap-properties of Distance Functions and Applications to Hardy–Sobolev -type Inequalities," Potential Anal 50(1), 83–105 (2019).

[EN00] K.-J. Engel, R. Nagel, and S. Brendle, One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations (Springer, New York Heidelberg, 2000).

[Eva10] Evans LC. Partial differential equations. 2nd ed. Providence, R.I: American Mathematical Society; 2010. 749 p. (Graduate studies in mathematics).

[PSZ19] T.R.L. Phillips, K.M. Schmidt, and A. Zhigljavsky, "Extension of the Schoenberg theorem to integrally conditionally positive definite functions," Journal of Mathematical Analysis and Applications 470(1), 659–678 (2019).

[FHL20] S. Fackler, T.P. Hytönen, and N. Lindemulder, "Weighted estimates for operator-valued Fourier multipliers," Collectanea Mathematica 71(3), 511–548 (2020).

[FS97] R. Farwig, and H. Sohr, "Weighted Lq -theory for the Stokes resolvent in exterior domains.," J. Math. Soc. Japan, 49:251–288, 1997., (n.d.).

[Fol13] G.B. Folland, Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications, 2nd ed (John Wiley and Sons, Incorporated, Wiley, New York, 2013).

[Gar07] D.J.H. Garling, Inequalities: A Journey into Linear Analysis (Cambridge University Press, Cambridge, 2007).

[Gra09] L. Grafakos, Modern Fourier Analysis, 2. ed (Springer, New York, NY, 2009).

[Gra14] L. Grafakos, and L. Grafakos, Classical Fourier Analysis, Third edition (Springer, New York, 2014).

[Gri09] A. Grigoryan, Heat Kernel and Analysis on Manifolds (American Mathematical Society [u.a.], Providence, RI, 2009).

[Gne01] Gneiting, "Criteria of Pólya type for radial positive definite functions," Proc. Amer. Math. Soc. 129(8), 2309–2318 (2001)..

[Gui10] D. Guidetti, "Vector valued Fourier multipliers and applications," Bruno Pini Mathematical Analysis Seminar, Seminars 2010 (2010).

[GPR11] Górka, Prado, Reyes, Nonlinear Equations with Infinitely many Derivatives (2009)

[GPR13] Górka, Prado, Reyes. On a General Class of Nonlocal Equations (2013)

[GKLP14] P. Górka, A. Kurek, E. Lazarte, and H. Prado, "Parabolic flow on metric measure spaces," Semigroup Forum 88(1), 129–144 (2014).

[PR16] H. Prado, and E.G. Reyes, "Nonlinear Evolution Equations with Infinitely Many Derivatives," Complex Anal. Oper. Theory 10(7), 1577–1590 (2016).

[Hao16] C. Hao, "Introduction to Harmonic Analysis LECTURE NOTES," (2016).

[Hao20] C. Hao, "Lecture Notes On Harmonic Analysis," (2020).

[HS08] D.D. Haroske, and L. Skrzypczak, "Entropy and Approximation Numbers of Embeddings of Function Spaces with Muckenhoupt Weights, I," Rev. Mat. Complut. 21(1), 135–177 (2008).

[Haz12] Hazewinkel M, editor. Encyclopaedia of Mathematics: Supplement Volume I. Springer Science and Business Media.

[HMW73] R. Hunt, B. Muckenhoupt, R. Wheeden, Weighted Norm Inequalities for the Conjugate Function and Hilbert Transform, Transactions of the American Mathematical Society 176 (1973) 227–251. https://doi.org/10.2307/1996205.

[IL14] A. Iosevich, and E. Liflyand, Decay of the Fourier Transform: Analytic and Geometric Aspects (Springer Basel, Basel, 2014).

[HVW24] . Hytönen, J. van Neerven, M. Veraar, L. Weis, Analysis in Banach spaces: Volume III: Harmonic analysis and spectral theory, 1st ed., Springer International Publishing, Cham, Switzerland, 2024.

[Jos05] J. Jost, Postmodern Analysis, Third edition (Springer, Berlin Heidelberg New York, 2005).

[JS14] B.S. Jovanović, and E. Süli, Analysis of Finite Difference Schemes: For Linear Partial Differential Equations with Generalized Solutions, 1st ed. 2014 (Springer London: Imprint: Springer, London, 2014).

[Kak97] Y. Kakihara, Multidimensional Second Order Stochastic Processes (World Scientific, Singapore; River Edge, N.J, 1997).

[KKOS21] S. Koike, H. Kozono, T. Ogawa, and S. Sakaguchi, Nonlinear Partial Differential Equations for Future Applications: Sendai, Japan, July 10–28 and October 2–6, 2017 (Springer Nature, 2021).

[KS09] V.M. Kokilashvili, and S.G. Samko, "Operators of harmonic analysis in weighted spaces with non-standard growth," Journal of Mathematical Analysis and Applications 352(1), 15–34 (2009).

[KR06] M.N. Kolountzakis, and S.Gy. Révész, "TURÁN'S EXTREMAL PROBLEM FOR POSITIVE DEFINITE FUNCTIONS ON GROUPS," J. London Math. Soc. 74(02), 475–496 (2006).

[Koo81] P. Koosis, "Entire functions of exponential type as multipliers for weight functions," Pacific J. Math. 95(1), 105–123 (1981).

[Kres14] R. Kress, Linear Integral Equations, Third edition (Springer, New York, 2014).

[Kur80] D.S. Kurtz, "Littlewood-Paley and Multiplier Theorems on Weighted L p Spaces," Transactions of the American Mathematical Society 259(1), 235 (1980).

[Len07] E. Lenzmann, "Well-posedness for Semi-relativistic Hartree Equations of Critical Type," Math Phys Anal Geom 10(1), 43–64 (2007).

[Lee65] K. de Leeuw, "On Lp Multipliers," Annals of Mathematics 81(2), 364–379 (1965).

[Lio82] . Lions PL. Symétrie et compacité dans les espaces de Sobolev. Journal of Functional Analysis. 1982 Dec;49(3):315–34.

[LC19] Z. Luo, and G. Chen, Proper Orthogonal Decomposition Methods for Partial Differential Equations (Academic press, London, 2019).

[MV14] M. Meyries, and M. Veraar, "Characterization of a class of embeddings for function spaces with Muckenhoupt weights," Arch. Math. 103(5), 435–449 (2014).

[MS09] V.G. Mazia, and T.O. Shaposhnikova, Theory of Sobolev Multipliers: With Applications to Differential and Integral Operators (Springer, Berlin, 2009).

[Mil82] N. Miller, Weighted Sobolev Spaces and Pseudodifferential Operators with Smooth Symbols, Transactions of the American Mathematical Society 269 (1982) 91–109. https://doi.org/10.2307/1998595.

[MRWs83] G. Mauceri, F. Ricci, and G. Weiss, editors , Harmonic Analysis: Proceedings of a Conference Held in Cortona, Italy, July 1–9, 1982 (Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 1983).

[MY83] B. Muckenhoupt, and W.-S. Young, "L p Multipliers with Weight — x — kp-1," Transactions of the American Mathematical Society 275(2), 623 (1983).

[MWY87(1)] B. Muckenhoupt, R.L. Wheeden, and W.-S. Young, "Sufficiency Conditions for L p Multipliers With Power Weights," Transactions of the American Mathematical Society 300(2), 433 (1987).

[MWY87(2)] B. Muckenhoupt, R.L. Wheeden, and W.-S. Young, "Sufficiency Conditions for L p Multipliers With General Weights," Transactions of the American Mathematical Society 300(2), 463 (1987).

[Muc87] B. Muckenhoupt, "Necessity Conditions for L p Multipliers With Power Weights," Transactions of the American Mathematical Society 300(2), 503 (1987).

[NS00] A.W. Naylor, and G.R. Sell, Linear Operator Theory in Engineering and Science, First Springer edition (Springer, New York, 2000).

[Nik94] S. M. Nikol'skii, Theory and Applications of Differentiable Functions of Several Variables: Collection of Papers (American Mathematical Soc., 1994).

[NOS16] R.H. Nochetto, E. Otárola, and A.J. Salgado, "Piecewise polynomial interpolation in Muckenhoupt weighted Sobolev spaces and applications," Numer. Math. 132(1), 85–130 (2016).

[NS04] A. Novotny, and I. Straškraba, Introduction to the Mathematical Theory of Compressible Flow (OUP Oxford, 2004).

[Now20] S. Nowak, "$H^{s,p}$ regularity theory for a class of nonlocal elliptic equations," Nonlinear Analysis 195, 111730 (2020).

[Osg19] B.G. Osgood, Lectures on the Fourier Transform and Its Applications (American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, USA, 2019).

[Paz83] A. Pazy, Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations (Springer New York, New York, NY, 1983).

[Pir11] M. Pirhayati, "Spectral Theory of Pseudo-Differential Operators on $\mathbb{S}^1$," in Pseudo-Differential Operators: Analysis, Applications and Computations, edited by L. Rodino, M.W. Wong, and H. Zhu, (Springer Basel, Basel, 2011), pp. 15–23.

[Pre13] R. Precup, Linear and Semilinear Partial Differential Equations: An Introduction (De Gruyter, Berlin; Boston, 2013).

[Ray91] X. Saint Raymond, Elementary Introduction to the Theory of Pseudodifferential Operators (CRC Press, Boca Raton, 1991).

[RS80] M. Reed, and B. Simon, Methods of Modern Mathematical Physics, Rev. and enl. ed (Academic Press, New York, 1980).

[RLS16] Roncal, Luz, and Pablo Raúl Stinga. "Fractional Laplacian on the torus.Çommunications in Contemporary Mathematics 18, no. 03 (2016): 1550033.

[Rud87] W. Rudin, Real and Complex Analysis, 3rd ed (McGraw-Hill, New York, 1987).

[Rud90] W. Rudin, Fourier Analysis and Groups (J. Wiley, New York Chichester Brisbane, 1990).

[RT10] M. Ruzhansky, and V. Turunen, Pseudo-Differential Operators and Symmetries: Background Analysis and Advanced Topics, 1st ed (Birkhaeuser, Basel; Boston, 2010).

[Sam02] S.G. Samko, Hypersingular Integrals and Their Applications, 1. publ (Taylor & Francis, London, 2002).

[San18] Aristegui JSM. Teoría de la medida. Editorial Universitaria; 2018. 412 p.

[SV02] J. Saranen, and G. Vainikko, Periodic Integral and Pseudodifferential Equations with Numerical Approximation (Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2002).

[Sar11] L. Sarybekova, Some New Fourier Multiplier Results of Lizorkin and Hörmander Types (Luleå University of Technology, Luleå, 2011).

[SSV12] R.L. Schilling, R. Song, and Z. Vondraček, Bernstein Functions: Theory and Applications, 2. ed (De Gruyter, Berlin, 2012).

[Sch05] R.L. Schilling, Measures, Integrals and Martingales (Cambridge University Press, 2005).

[Tri78] H. Triebel, Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators (North-Holland Pub. Co, Amsterdam; New York, 1978).

[ST87] H.-J. Schmeisser, and H. Triebel, Topics in Fourier Analysis and Function Spaces (J. Wiley and sons, Chichester, 1987).

[Sch07] K. Schumacher, The Navier-Stokes Equations with Low-Regularity Data in Weighted Function Spaces, 2007.

[Sch09] K. Schumacher, "The instationary Stokes equations in weighted Bessel-potential spaces," J. Evol. Equ. 9(1), 1–36 (2009).

[Ste70] E.M. Stein, E.M. Stein, and E.M. Stein, Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions (Princeton University Press, Princeton, N.J, 1970).

[SS11] Stein EM, Shakarchi R. Functional analysis: introduction to further topics in analysis. Princeton: Princeton University Press; 2011. 423 p. (Princeton lectures in analysis).

[Tay97] Taylor ME, Taylor ME. Partial differential equations. 1: Basic theory. Corr. 2. print. New York Heidelberg: Springer; 1997. 561 p. (Applied mathematical sciences).

[Tay11] Taylor ME. Partial Differential Equations III: Nonlinear Equations [Internet]. New York, NY: Springer New York; 2011 [cited 2024 Apr 9]. (Applied Mathematical Sciences; vol. 117).
.

[Trev06] F. Treves, Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels (Dover Publications, Mineola, N.Y, 2006).

[Tri83] H. Triebel, Theory of Function Spaces (Birkhäuser, Basel Boston, 1983).

[TB04] Trigub, and E.S. Bellinsky, Fourier Analysis and Approximation of Functions (Springer Netherlands, Dordrecht, 2004).

[Tuc06] E.O. Tuck, "On Positivity of Fourier Transforms," Bull. Austral. Math. Soc. 74(1), 133–138 (2006).

[TV97] V. Turunen, and G. Vainikko, On Symbol Analysis of Periodic Pseudodifferential Operators (Helsinki Univ. of Techn., Institute of Mathematics, Espoo, 1997).

[Won11] M.W. Wong, Discrete Fourier Analysis (Birkhäuser, Basel, 2011).

[Won14] M.W. Wong, An Introduction to Pseudo-Differential Operators, 3. ed (World Scientific, New Jersey, 2014).

[YST16] A. Ydyrys, L. Sarybekova, and N. Tleukhanova, "The multipliers of multiple trigonometric Fourier series," Open Engineering 6(1), (2016).